Projeto e Análise de Algoritmos

Crescimento assintótico de funções

Lehilton Pedrosa

Primeiro Semestre de 2020

Notação assintótica e crescimento de funções

Notação assintótica

- Vamos expressar complexidade como uma função em n.
- A função mede o número de instruções de um algoritmo.
- Então, as funções consideradas são sempre positivas.
- Dependendo do caso, n representa diferentes valores:
  - Problemas de precisão arbitrária: número de bits.
  - Problemas em grafos: número de vértices e/ou arestas
  - Problemas com vetores: tamanho do vetor
  - Problemas de busca em textos: tamanho das strings

Comparação de funções

- Vamos comparar funções assintoticamente
- Queremos desprezar as constantes multiplicativas
- Vamos falar em termos de ordem de crescimento

	$n = 100$	$n = 1000$	$n = 10^4$	$n = 10^6$	$n = 10^9$
$\log n$	2	3	4	6	9
n	100	1000	10^4	10^6	10^9
$n \log n$	200	3000	$4 \cdot 10^4$	$6 \cdot 10^6$	$9 \cdot 10^9$
n^2	10^4	10^6	10^8	10^{12}	10^{18}
$100n^2 + 15n$	$1{,}0015 \cdot 10^6$	$1{,}00015 \cdot 10^8$	$\approx 10^{10}$	$\approx 10^{14}$	$\approx 10^{20}$
2^n	$\approx 1{,}26 \cdot 10^{30}$	$\approx 1{,}07 \cdot 10^{301}$	?	?	?

Notação assintótica e crescimento de funções

- Definições

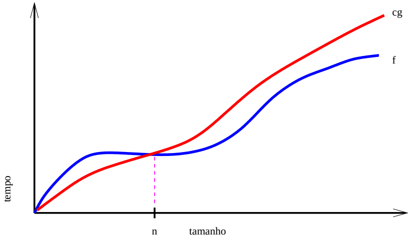
Notação O

Definição

A classe $O(g(n))$ é o conjunto de funções $f(n)$ tais que:

- existem constantes positivas c e n_0
- $0 \leq f(n) \leq cg(n)$ para todo $n \geq n_0$

Dizemos que $f(n)$ cresce no máximo tão rápido quanto $g(n)$.



Notação O: exemplo

Exemplo

$\frac{1}{2}n^2 - 3n \in O(n^2)$

- Temos $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$ e $g(n) = n^2$.
- Escolha valores

$$c = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad n_0 = 1.$$

- Então, supondo $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{2}n^2 - 3n \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(n^2 - 6n\right) \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot n^2 && \text{(pois } n \geq 0\text{)} \\ &= c \cdot g(n). \end{aligned}$$

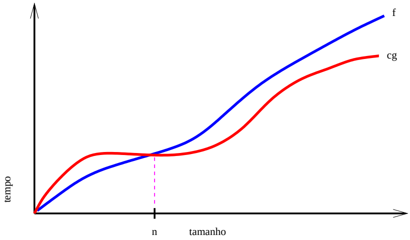
Notação Ω

Definição

A classe $\Omega(g(n))$ é o conjunto de funções $f(n)$ tais que:

- existem constantes positivas c e n_0
- $0 \leq cg(n) \leq f(n)$ para todo $n \geq n_0$

Dizemos que $f(n)$ cresce no mínimo tão rápido quanto $g(n)$.



Notação Ω: exemplo

Exemplo

$\frac{1}{2}n^2 - 3n \in \Omega(n^2)$

- Temos $f(n) = \frac{1}{4}n^2 - 3n$ e $g(n) = n^2$.
- Escolha valores

$$c = \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad n_0 = 12.$$

- Então, supondo $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{2}n^2 - 3n \\ &= \frac{n}{2} \cdot (n-6) \\ &\geq \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} && \text{(pois } n \geq 12\text{)} \\ &= c \cdot g(n). \end{aligned}$$

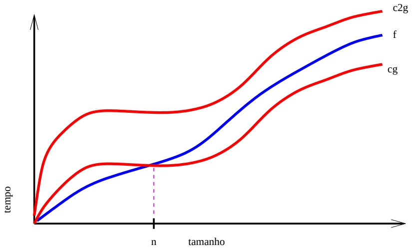
Notação Θ

Definição

A classe $\Omega(g(n))$ é o conjunto de funções $f(n)$ tais que:

- existem constantes positivas c_1, c_2 e n_0
- $0 \leq c_1\, g(n) \leq f(n) \leq c_2\, g(n)$ para todo $n \geq n_0$

Dizemos que $f(n)$ cresce tão rápido quanto $g(n)$.



Notação Θ: exemplo

Exemplo

$\frac{1}{2}n^2 - 3n \in \Theta(n^2)$

- Temos $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$ e $g(n) = n^2$.
- Escolha valores

$$c_1 = \frac{1}{4}, \quad c_2 = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad n_0 = 12.$$

- Então, supondo $n \geq n_0$, já verificamos que

$$c_1\, g(n) \leq f(n) \leq c_2\, g(n).$$

Notação o

Definição

A classe $o(g(n))$ é o conjunto de funções $f(n)$ tais que:

- para toda constante $c > 0$, existe um número n_0
- tal que $0 \leq f(n) < cg(n)$ para todo $n \geq n_0$

Dizemos que $f(n)$ cresce mais lentamente que $g(n)$.

Notação o: exemplo

Exemplo

$1000n^2 \in o(n^3)$

- Temos $f(n) = 1000n^2$ e $g(n) = n^3$.
- Seja $c > 0$ uma constante arbitrária
- Defina $n_0 = \left\lceil \frac{1000}{c} \right\rceil + 1$.
- Então, supondo $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} f(n) &= 1000n^2 \\ &= \frac{1000}{n} \cdot n^3 \\ &< \quad c \cdot n^3 && \text{(pois } n \geq n_0\text{)} \\ &= \quad c \cdot g(n). \end{aligned}$$

Notação ω

Definição

A classe $\omega(g(n))$ é o conjunto de funções $f(n)$ tais que:

- para toda constante $c > 0$, existe um número n_0
- tal que $0 \leq cg(n) < f(n)$ para todo $n \geq n_0$

Dizemos que $f(n)$ cresce mais rapidamente que $g(n)$.

Notação ω: exemplo

Exemplo

$\frac{1}{1000}n^2 \in \omega(n)$

- Temos $f(n) = \frac{1}{1000}n^2$ e $g(n) = n$.
- Seja $c > 0$ uma constante arbitrária.
- Defina $n_0 = \lceil 1000c \rceil + 1$.
- Então, supondo $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{1000}n^2 \\ &= \frac{n}{1000} \cdot n \\ &> c \cdot n && \text{(pois } n \geq n_0\text{)} \\ &= c \cdot g(n). \end{aligned}$$

Notação assintótica e crescimento de funções

- Propriedades das notações assintóticas

Equivalências

Condições equivalentes

Sejam $f(n)$ e $g(n)$ funções não negativas, então:

- $f(n) \in o(g(n))$ se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.
- $f(n) \in O(g(n))$ se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$.
- $f(n) \in \Theta(g(n))$ se, e somente se, $0 < \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$.
- $f(n) \in \Omega(g(n))$ se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} > 0$.
- $f(n) \in \omega(g(n))$ se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$.

Propriedades das classes

Transitividade

- Se $f(n) \in O(g(n))$ e $g(n) \in O(h(n))$, então $f(n) \in O(h(n))$.
- Se $f(n) \in \Omega(g(n))$ e $g(n) \in \Omega(h(n))$, então $f(n) \in \Omega(h(n))$.
- Se $f(n) \in \Theta(g(n))$ e $g(n) \in \Theta(h(n))$, então $f(n) \in \Theta(h(n))$.
- Se $f(n) \in o(g(n))$ e $g(n) \in o(h(n))$, então $f(n) \in o(h(n))$.
- Se $f(n) \in \omega(g(n))$ e $g(n) \in \omega(h(n))$, então $f(n) \in \omega(h(n))$.

Propriedades das classes

Reflexividade

- $f(n) \in O(f(n))$.
- $f(n) \in \Omega(f(n))$.
- $f(n) \in \Theta(f(n))$.

Simetria

- $f(n) \in \Theta(g(n))$ se, e somente se, $g(n) \in \Theta(f(n))$.

Simetria Transposta

- $f(n) \in O(g(n))$ se, e somente se, $g(n) \in \Omega(f(n))$.
- $f(n) \in o(g(n))$ se, e somente se, $g(n) \in \omega(f(n))$.

Regra de l′Hôpital

Regra de l′Hôpital

Sejam f e g funções diferenciáveis tais que

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} g(n) = \infty.$$

Se o limite de $\frac{f'(n)}{g'(n)}$ existir, então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(n)}{g'(n)}.$$

Exercício: descreva as outras formas da Regra de l′Hôpital.

Regra de l'Hôpital

Exemplo

Relacione $f(n) = \ln n$ e $g(n) = \sqrt{n}$ usando classes de funções adequadas.

- Temos $f'(n) = \frac{1}{n}$ e $g'(n) = \frac{1}{2\sqrt{n}}$
- Assim,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(n)}{g'(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0.$$

- Portanto, $f(n) = o(g(n))$.

Ordenando várias funções

Exemplo

Ordene de acordo com a ordem de complexidade e relacione funções adjacentes nessa ordem.

- 2^{π}
- $\log n$
- n
- $n \log n$
- n^2
- $100n^2 + 15n$
- 2^n

Recorrências

Complexidade de MERGE-SORT

MERGE-SORT(A, p, r)

```
se p < r
   então q ← ⌊(p + r)/2⌋
         MERGE-SORT(A, p, q)
         MERGE-SORT(A, q + 1, r)
         INTERCALA(A, p, q, r)
```

- Vamos relembrar a complexidade do MERGE-SORT
- Tamanho da entrada: $n = r - p + 1$
- Seja $T(n)$ o número de instruções executadas no pior caso

Complexidade de MERGE-SORT

```
MERGE-SORT(A, p, r)
1  se p < r
2     então q ← ⌊(p + r)/2⌋
3           MERGE-SORT(A, p, q)
4           MERGE-SORT(A, q + 1, r)
5           INTERCALA(A, p, q, r)
```

Linha	Tempo
1	c_1
2	c_2
3	$T(\lceil n/2 \rceil)$
4	$T(\lfloor n/2 \rfloor)$
5	$c_5 n + d_5$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + c_5 n + d_5 + c_1 + c_2 \\
&= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + an + b
\end{aligned}
$$

Resolução de recorrências

Obtemos a recorrência:

$$T(n) = \begin{cases} d & \text{se } n = 1 \\ T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + an + b & \text{se } n \geq 2, \end{cases}$$

- Queremos uma fórmula fechada para $T(n)$.
- Não é necessária a solução exata.
- Basta encontrar uma função $f(n)$ tal que $T(n) \in \Theta(f(n))$.

Resolução de recorrências

Existem alguns métodos comuns para resolver recorrências:

- substituição
- iteração
- árvore de recorrência

Veremos também o chamado Teorema Master

- aplicável a uma família comum de recorrências
- fornece uma fórmula fechada diretamente

Recorrências

- Método da substituição

Método da substituição

Ideia:

1. adivinhar uma solução
2. demonstrar que é válida usando indução

Nem sempre é fácil chutar a solução

- é necessário ter experiência
- mas vamos obter sugestões com os métodos estudados

Exemplo

Exemplo

Encontre uma fórmula fechada para

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

Chutamos que $T(n) \in O(n \lg n)$.

- Observe que há uma constante escondida na notação O.
- Para usar indução, precisamos conhecer essa constante.
- Então chutamos que $T(n) \leq 3n \lg n$.

Exemplo: passo da indução

Suponha que a desigualdade vale para $k < n$.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\
&\le 3\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 3\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \qquad \text{(pela h.i.)} \\
&\le 3\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg n + 3\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor (\lg n - 1) + n \\
&= 3\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) \lg n - 3\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&= 3n \lg n - 3\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&\le 3n \lg n.
\end{aligned}
$$

Mostramos o passo da indução!

Exemplo: base da indução

Ainda falta a base

- Temos $T(1) = 1$, mas $3 \cdot 1 \cdot \lg 1 = 0$
- A desigualdade não vale para $n = 1$
- Não temos uma base da indução

Ok, queremos mostrar apenas $T(n) \in O(n \lg n)$.

- Basta mostrar que a desigualdade vale para $n \geq n_0$
- Vamos escolher $n_0 = 2$

Base da indução:

- Para $n = 2$ e $n = 3$, temos

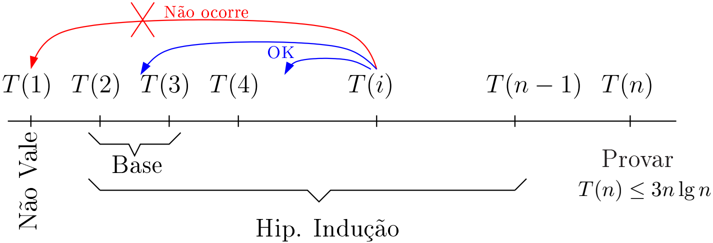
$$T(2) = T(1) + T(1) + 2 = 4 \leq 3 \cdot 2 \cdot \lg 2 = 6$$
$$T(3) = T(2) + T(1) + 3 = 8 \leq 3 \cdot 3 \cdot \lg 3 \approx 14{,}26$$

- Por que precisamos de dois casos básicos?

Exemplo: verificando a base

Não podemos ter $k = 1$ quando usamos a hipótese da indução:

$$T(1) = 1$$
$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n$$



Modificando um pouco o exemplo

Mas se tivéssemos $T(1) = 8$?

- A desigualdade não vale para $n = 2$
- Temos $T(2) = 8 + 8 + 2 = 18$, mas $3 \cdot 2 \cdot \lg 2 = 6$
- Podemos escolher uma constante multiplicativa maior.
- Tentando $T(n) \leq 10 n \lg n$, obtemos

$$T(2) = 18 \leq 10 \cdot 2 \cdot \lg 2 = 20$$
$$T(3) = 29 \leq 10 \cdot 3 \cdot \lg 3 \approx 47{,}55$$

Conclusão:

- Se o passo da indução vale, então podemos escolher valores adequados para as constantes c e n_0.

Encontrando as constantes

Suponha que já adivinhamos que $T(n) \in O(n \lg n)$

- Chutamos que $T(n) \leq cn \lg n$ para $c = 3$.
- Depois escolhemos $n_0 = 2$.
- Como podemos encontrar essas constantes?

Uma maneira possível:

1. Suponha $T(n) \leq cn \lg n$ para algum c genérico.
2. Substitua e desenvolva a expressão para $T(n)$.
3. Determine c e n_0 de forma a provar o passo da indução.

Primeira tentativa

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\
&\le c\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&\le c\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg n + c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg n + n \\
&= c\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) \lg n + n \\
&= cn \lg n + n
\end{aligned}
$$

Não deu certo...

Segunda tentativa

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\
&\le c\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&\le c\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg n + c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor (\lg n - 1) + n \\
&= c\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) \lg n - c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&= cn \lg n - c\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&\le cn \lg n. \qquad \text{(escolhendo } n \ge n_0 \text{ adequado)}
\end{aligned}
$$

- Para a última desigualdade, queremos $-c\lceil n/2 \rceil + n \le 0$
- Basta que $c = 3$ e $n_0 \ge 2$.

Completando o exemplo

- Já mostramos que $T(n) \in O(n \lg n)$.
- Mas queremos mostrar que $T(n) \in \Theta(n \lg n)$.
  - Basta mostrar $T(n) \in \Omega(n \lg n)$.
  - A prova é similar.
  - Faça como exercício.

Adivinhando uma solução

Não há receita genérica para adivinhar soluções.

- A experiência é um fator importante.
- Normalmente, recorrências similares têm a mesma ordem de crescimento.

Exemplo

Resolva a recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

- Ela muito parecida com a anterior.
- Então chutamos $T(n) \in \Theta(n \lg n)$.
- Mostre isso como exercício.

Adivinhando uma solução (cont)

Exemplo

Resolva a recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ 2T(\lfloor n/2 \rfloor + 17) + n & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

- Ela parece mais difícil por causa do termo 17.
- Intuitivamente, parece que $T(\lfloor n/2 \rfloor) \approx T(\lfloor n/2 \rfloor + 17)$
- Chutamos que $T(n) \in \Theta(n \lg n)$.
- Mostre isso como exercício.

Sutilezas

Algumas vezes é necessário fortalecer a hipótese de indução.

Exemplo

Resolva a recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1 & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

Chutamos que $T(n) \leq cn$ para alguma constante c.

$$\begin{aligned} T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1 \\ &\leq c\lceil n/2 \rceil + c\lfloor n/2 \rfloor + 1 \\ &= cn + 1. \end{aligned}$$

- Não deu certo
- Mas de fato $T(n) \in \Theta(n)$!

Fortalecendo a hipótese

- Vamos fazer uma hipótese de indução um pouco diferente.
- Vamos mostrar que $T(n) \leq cn - b$ para $c > 0$ e $b > 0$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1 \\
&\leq c\lceil n/2 \rceil - b + c\lfloor n/2 \rfloor - b + 1 \\
&= cn - 2b + 1 \\
&\leq cn - b
\end{aligned}
$$

- Para a última de desigualdade, basta escolher $b \geq 1$.
- Isso mostra o passo indutivo.

Recorrências

- Método da iteração

Método da iteração

Idéia:

1. expandir a recorrência iterativamente
2. reescrevê-la como uma somatória em termos de n

Não é necessário adivinhar a resposta!

- Mais é um pouco mais trabalhoso
- É útil conhecer limitantes de somatórias
- Nem sempre é trivial encontrar um termo geral da soma

Exemplo

Exemplo

Encontre uma fórmula fechada para

$$T(n) = \begin{cases} b & \text{se } n \leq 3 \\ 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + n & \text{se } n \geq 4 \end{cases}$$

Iterando a recorrência

$$\begin{aligned} T(n) &= n + 3T(\lfloor n/4 \rfloor) \\ &\leq n + 3(n/4 + 3T(\lfloor n/16 \rfloor)) \\ &\leq n + 3(n/4 + 3(n/16 + 3T(\lfloor n/64 \rfloor))) \\ &\leq n + 3n/4 + 9n/16 + 27T(\lfloor n/64 \rfloor). \end{aligned}$$

Queremos

- identificar o termo geral da soma: $3^i n/4^i$
- e o argumento da função: $\left\lfloor n/4^k \right\rfloor$

Encontrando a função

Quantas vezes iteramos?

- suponha que iteramos k vezes
- paramos quando $\left\lfloor n/4^k \right\rfloor \leq 3$, i.e., quando $k+1 > \log_4 n \geq k$

A soma completa é

$$\begin{aligned} T(n) &\leq \left(n + 3n/4 + 9n/16 + \cdots + 3^{k-1} n/4^{k-1}\right) + 3^k b \\ &\leq (n + 3n/4 + 9n/16 + 27n/64 + \dots) + 3^{\log_4 n} b \\ &= n \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^i + n^{\log_4 3} b \\ &= 4n + n^{\log_4 3} b. \end{aligned}$$

Como $\log_4 3 < 1$, concluímos que $T(n) \in O(n)$.

Simplificando

Podemos supor que $n = 4^k$

- As contas ficam mais simples
- Não prova o caso geral
- Mas obtemos um bom chute
- E verificamos com o método da substituição

Exercício: verifique que $T(n) = \Theta(n)$.

Recorrências

- Método da árvore de recorrência

Árvore de recorrência

Idéia:

1. crie uma árvore de recorrência:
   - os nós representam os termos independentes
   - os filhos representam as subfunções recorrentes
2. somamos os termos de cada nível da árvore
3. depois somamos todos os níveis

Vantagens

- útil quando há vários termos recorrentes
- é mais fácil organizar as contas

Exemplo

Exemplo

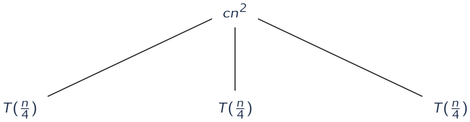
Encontre uma fórmula fechada para

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \leq 3 \\ 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + cn^2 & \text{se } n \geq 4 \end{cases}$$

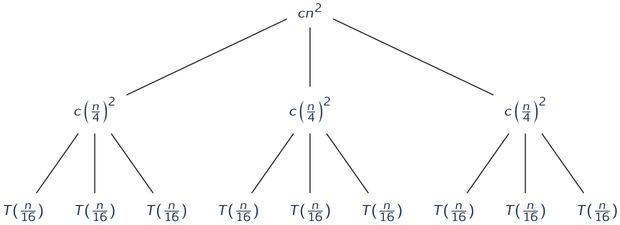
Simplificando

- Queremos obter uma fórmula fechada apenas
- De novo, supomos que $n = 4^k$
- Depois, verificamos com o método da substituição

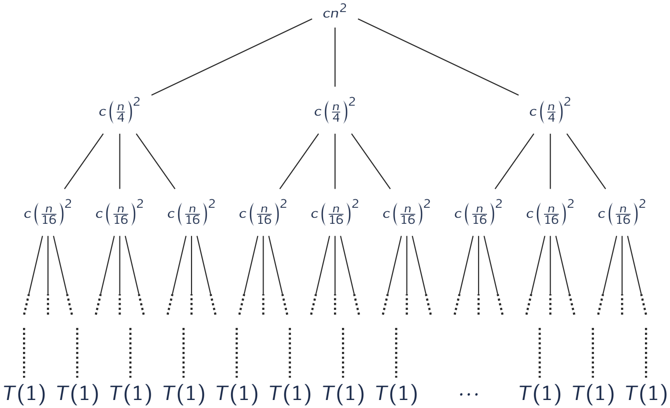
Árvore de recorrência



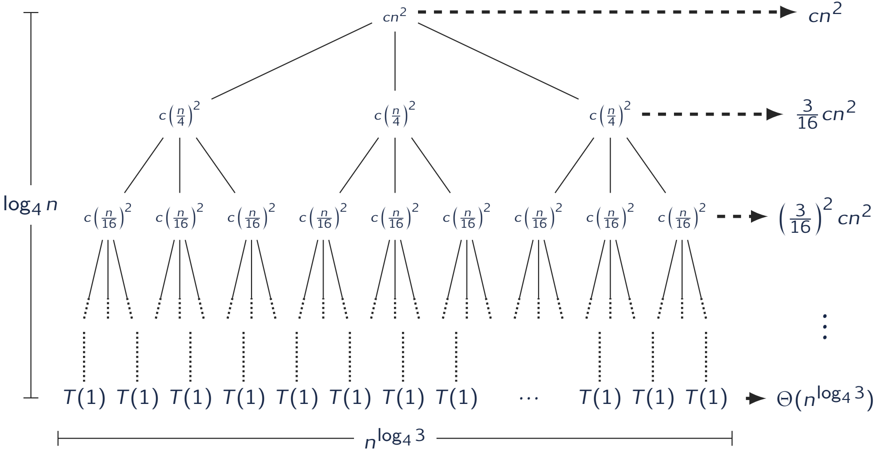
Árvore de recorrência



Árvore de recorrência



Árvore de recorrência



Total: $\Theta(n^2)$

Somando os termos

- A árvore tem altura $\log_4 n$
- A soma de cada nível interno é $\left(\frac{3}{16}\right)^i cn^2$
- O número de folhas é $3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= \left(cn^2 + \frac{3}{16}cn^2 + \cdots + \left(\frac{3}{16}\right)^{\log_4 n - 1} cn^2\right) + \Theta(n^{\log_4 3}) \\
&\leq \left(\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{3}{16}\right)^i\right) cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\
&= \frac{16}{13}cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}),
\end{aligned}
$$

Concluímos que $T(n) \in O(n^2)$.

Outro exemplo

Exemplo

Encontre uma fórmula fechada para

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \leq 2 \\ T(\lceil n/3 \rceil) + T(\lfloor 2n/3 \rfloor) + n & \text{se } n \geq 3 \end{cases}$$

Esse exemplo é um pouco mais complicado

- Os termos recorrentes são diferentes
- A árvore não será completa
- Vamos mostrar juntos que $T(n) \in O(n \lg n)$

Recorrências

- Recorrências e notação assintótica

Recorrências com notação assintótica

- Escrevemos

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n \leq 2 \\ 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + \Theta(n^2) & \text{se } n \geq 3 \end{cases}$$

- Para representar a família de recorrências

$$T(n) = \begin{cases} a & \text{se } n \leq 2 \\ 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + f(n) & \text{se } n \geq 3 \end{cases}$$

  onde a é uma constante e $f(n)$ está em $\Theta(n^2)$

- Todas elas têm a mesma solução assintótica

- A mesma coisa vale as outras classes de função

Cuidados com a notação assintótica

Exemplo

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n & \text{se } n \geq 2, \end{cases}$$

- O uso descuidado da notação assintótica leva a erros
- Já sabemos que $T(n) = \Theta(n \log n)$
- Mas vamos "provar" que $T(n) = O(n)$!

Cuidados com a notação assintótica (cont)

Vamos mostrar que $T(n) \leq cn$ para alguma constante $c > 0$.

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\ &\leq 2c\lfloor n/2 \rfloor + n \\ &\leq cn + n \\ &= O(n) \qquad \longleftarrow \text{ERRADO!} \end{aligned}$$

Qual é o erro?

- A nossa afirmação é que $T(n) \leq cn$
- Mas mostramos que $T(n) \leq (c+1)n$
- Não concluímos o passo indutivo

Recorrências

- Teorema Master

Teorema Master

Veremos um teorema para resolver recorrências da forma

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

- os valores a e b são constantes
- também vale se substituirmos n/b por $\lfloor n/b \rfloor$ ou $\lceil n/b \rceil$
- o teorema **não** se aplica a todas recorrências dessa forma

Teorema Master

Teorema Master

Sejam $a \geq 1$ e $b > 1$ constantes, seja $f(n)$ uma função e seja $T(n)$ definida para os inteiros não negativos pela relação de recorrência

$$T(n) = aT(n/b) + f(n).$$

Então $T(n)$ tem os seguintes limitantes assintóticos:

1. Se $f(n) \in O(n^{\log_b a - \epsilon})$ para alguma constante $\epsilon > 0$, então $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$
2. Se $f(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$, então $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \log n)$
3. Se $f(n) \in \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ para alguma constante $\epsilon > 0$ e se $af(n/b) \leq cf(n)$ para alguma constante $c < 1$ e todo n suficientemente grande, então $T(n) \in \Theta(f(n))$

Exemplos de Recorrências

Exemplos para os quais Teorema Master se aplica:

- Caso 1:
  $T(n) = 9T(n/3) + n$
  $T(n) = 4T(n/2) + n \log n$

- Caso 2:
  $T(n) = T(2n/3) + 1$
  $T(n) = 2T(n/2) + (n + \log n)$

- Caso 3:
  $T(n) = T(3n/4) + n \log n$

Exemplos de Recorrências

Exemplos para os quais Teorema Master **não** se aplica:

- $T(n) = T(n-1) + n$
- $T(n) = T(n-a) + T(a) + n$, ($a \geq 1$ inteiro)
- $T(n) = T(\alpha n) + T((1-\alpha)n) + n$, ($0 < \alpha < 1$)
- $T(n) = T(n-1) + \log n$
- $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n \log n$