Universidade Estadual de Campinas – Instituto de Computação

MO417A – Complexidade de Algoritmos – 1º Semestre de 2020

https://www.ic.unicamp.br/~lehilton/mo417a

Técnicas e escrita de demonstração

Princípio da indução

Questão 1. (CLRS) Exercícios: 2.3-3

Questão 2. (Manber) (2.4) Encontre a uma fórmula fechada para a seguinte forma soma e demostre-a:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}.$$

Questão 3. (CLRS) (3.2-7) A razão ϕ áurea e seu conjugado $\hat{\phi}$ são as raízes da equação

$$x^2 = x+1$$

Mostre por indução que o i-ésimo número de Fibonacci F_i satisfaz a igualdade

$$F_= \frac{\phi^i - \hat{\phi}^i}{\sqrt{5}}.$$

Questão 4. Considere a sequência $1, 1, 3, 5, 11, \ldots$ dada pela seguinte expressão:

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1, 2, \\ a_{n-1} + 2a_{n-2} & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Mostre por indução que a_n satisfaz

$$a_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}.$$

Questão 5. (Manber) (2.19) Mostre que as regiões formadas por n círculos no plano podem ser coloridas com duas cores de forma que que quaisquer regiões vizinhas tenham cores distintas.

Questão 6. (Manber) (2.29) O princípio das caixas de pombo (na sua forma mais simples) afirma o seguinte: se $n+1$ bolas ($n \geq 1$) são colocada dentro de n caixas, então pelo menos uma caixa conterá mais de uma bola. Demonstre esse afirmação por indução.

Questão 7. (Manber) (2.9) Mostre por indução que, dado um inteiro em sua representação decimal, ele é divisível por três se e somente se a soma de seus dígitos é divisível por três. (Dica: é mais fácil provar um resultado mais forte em que o resto da divisão do número por três é igual ao resto da divisão da soma de seus dígitos por três.)

Questão 8. (Manber) Encontre uma expressão para a soma da i-ésima linha do seguinte triângulo, que é chamado de triângulo de Pascal, e prove que sua afirmação está correta usando indução. Os lados do triângulo são 1s e cada um dos outros itens tem valor igual à soma dos dois itens imediatamente acima.

```
        1
      1   1
    1   2   1
  1   3   3   1
1   4   6   4   1
```

Questão 9. (Manber) Considere a sequência 1, 2, 3, 4, 5, 10, 20, 40, ..., que começa como uma progressão aritmética, mas após os cinco primeiros termos é progressão geométrica. Mostre que todo inteiro positivo pode ser escrito como a soma de números *distintos* dessa sequência.