

Projeto e Análise de Algoritmos

Demonstrações e princípio da indução

Lehilton Pedrosa

Primeiro Semestre de 2020

Técnicas de demonstração

Demonstração direta

A **demonstração direta** de uma implicação $p \Rightarrow q$ é uma sequência de passos lógicos

$$p \Rightarrow p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow p_n \Rightarrow q,$$

que resultam, por transitividade, na implicação desejada.

- ▶ Cada passo da demonstração é um axioma ou um teorema demonstrado previamente.

Exemplo

Prove que $\sum_{i=1}^k (2i - 1) = k^2$.

Demonstração pela contrapositiva

A **contrapositiva** de $p \Rightarrow q$ é $\neg q \Rightarrow \neg p$.

- ▶ A contrapositiva é equivalente à implicação original.
- ▶ Demonstrar $\neg q \Rightarrow \neg p$ implica em $p \Rightarrow q$ e vice-versa.
- ▶ É útil quando é mais fácil demonstrar a contrapositiva.
- ▶ Para demonstrarmos a contrapositiva de uma implicação, podemos utilizar qualquer técnica de demonstração.

Exemplo

Prove que se $2 \mid 3m$, então $2 \mid m$.

Demonstração por contradição

A **demonstração por contradição** supõe que a afirmação a ser demonstrada é falsa e obtém uma conclusão contraditória.

- ▶ A contradição obtida implica que a suposição é falsa.
- ▶ Portanto, a afirmação é verdadeira.
- ▶ A negação de $p \Rightarrow q$ corresponde a $p \wedge \neg q$.

Exemplo

Prove que $\sqrt{2}$ é irracional.

Demonstração por casos

Na **demonstração por casos**, particionamos as possibilidades em um conjunto de casos e demonstramos cada um deles.

- ▶ O número de casos é normalmente finito.
- ▶ Cada caso é demonstrado usando qualquer técnica.

Exemplo

Provar que a soma de dois inteiros x e y de mesma paridade é sempre par.

Princípio da indução

Demonstração por indução

Usando o **princípio da indução**, demonstramos uma afirmação $P(n)$ que depende de um parâmetro natural n .

- ▶ Demonstramos $P(n)$ para cada todos os valores de n .
- ▶ Quebramos a demonstração em duas partes.

1. Caso básico

- ▶ consideramos $n = 1$
- ▶ demonstramos $P(n)$

2. Caso geral

- ▶ consideramos $n > 1$
- ▶ **hipótese da indução:** supomos que $P(n - 1)$ vale
- ▶ **passo da indução:** demonstramos $P(n)$ usando a hipótese

Exemplo

Prove que a soma dos n primeiros números ímpares é n^2 .

Demonstração por indução alternativa

Uma forma equivalente:

1. Caso básico

- ▶ consideramos $n = 1$
- ▶ demonstramos $P(1)$

2. Caso geral

- ▶ consideramos $n \geq 1$
- ▶ supomos que $P(n)$ vale
- ▶ demonstramos $P(n + 1)$

Exemplo

Prove que a soma dos n primeiros números ímpares é n^2 .

Fortalecendo a hipótese

Algumas vezes é útil supor que a hipótese vale para **todos** os casos anteriores.

1. Caso básico

- ▶ consideramos $n = 1$
- ▶ demonstramos $P(n)$

2. Caso geral

- ▶ consideramos $n > 1$
- ▶ supomos que $P(k)$ vale para todo $1 \leq k \leq n - 1$
- ▶ demonstramos $P(n)$

Exemplo

Prove que todo inteiro n pode ser escrito como a soma de diferentes potências de 2.

Indução a partir de um ponto

Às vezes queremos provar uma afirmação $P(n)$ apenas para $n \geq n_0$ para algum n_0 .

1. Caso básico

- ▶ consideramos $n = n_0$
- ▶ demonstramos $P(n)$

2. Caso geral

- ▶ consideramos $n > n_0$
- ▶ supomos que $P(k)$ vale para todo $n_0 \leq k \leq n - 1$
- ▶ demonstramos $P(n)$ usando a hipótese

Exemplo

Prove que todo inteiro $n \geq 2$ pode ser fatorado como um produto de primos.

Princípio da indução

- ▶ Exemplos de demonstração por indução

Exemplo 1

Exemplo

Demonstre que, para inteiros $x \geq 1$ e $n \geq 1$, o número $x^n - 1$ é divisível por $x - 1$.

Demonstração:

1. No caso básico, considere $n = 1$
 - ▶ temos $x^n - 1 = x - 1$, que é divisível por $x - 1$
 - ▶ isso mostra a afirmação para $n = 1$

Exemplo 1 (cont)

2. No caso geral, considere $n \geq 1$

▶ hipótese de indução:

▶ suponha que $x - 1$ divide $x^n - 1$

▶ passo de indução:

▶ observe que $x^{n+1} - 1 = x(x^n - 1) + (x - 1)$.

▶ pela h.i., $x^n - 1$ é divisível por $x - 1$

▶ então $x - 1$ divide o lado direito da equação

▶ portanto $x - 1$ também divide $x^{n+1} - 1$

Exemplo 2

Exemplo

Demonstre que a equação

$$\sum_{i=1}^n (3 + 5i) = \frac{5n^2 + 11n}{2}$$

vale para todo inteiro $n \geq 1$.

Demonstração:

- ▶ Para o caso básico, temos

$$\sum_{i=1}^1 (3 + 5i) = 8 = \frac{5n^2 + 11n}{2}.$$

- ▶ Então a afirmação vale quando $n = 1$.

Exemplo 2 (cont)

- ▶ Considere um número $n > 1$ fixo.
- ▶ Suponha que a equação valha para $n - 1$.
- ▶ Vamos mostrar que a equação também vale para n .
- ▶ Desenvolvendo a soma,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (3 + 5i) &= \sum_{i=1}^{n-1} (3 + 5i) + (3 + 5n) \\ &= \frac{5(n-1)^2 + 11(n-1)}{2} + (3 + 5n) \quad (\text{pela h.i.}) \\ &= \frac{5n^2 - 10n + 5 + 11n - 11}{2} + \frac{6 + 10n}{2} \\ &= \frac{5n^2 + 11n}{2}.\end{aligned}$$

Exemplo 3

Exemplo

Demonstre que a inequação

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

vale para todo natural n e real x tal que $(1 + x) > 0$.

Demonstração:

- ▶ Se $n = 1$, ambos os lados da inequação valem $1 + x$.
- ▶ Isso demonstra o caso básico.

Exemplo 3 (cont)

- ▶ Considere $n \geq 1$ e suponha que a inequação vale para n .
- ▶ Desenvolvendo o lado esquerdo da inequação, temos

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \\ &\geq (1+nx)(1+x) && \text{(pela h.i. e já que } (1+x) > 0\text{)} \\ &= 1 + (n+1)x + nx^2 \\ &\geq 1 + (n+1)x. && \text{(já que } nx^2 \geq 0\text{)}\end{aligned}$$

- ▶ Isso demonstra desigualdade para $n+1$.

Exemplo 4

Um conjunto de retas está em posição geral no plano se

- ▶ não há retas paralelas e
- ▶ não existem três retas que interceptam o mesmo ponto.

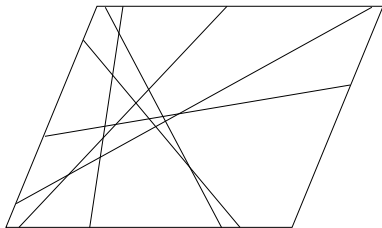
Exemplo

Demonstre que o número T_n de regiões no plano criadas por n retas em posição geral é igual a

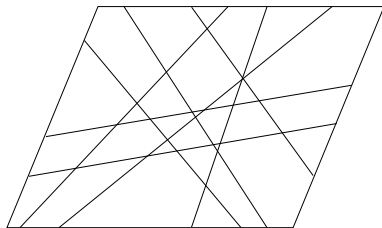
$$T_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

Exemplo 4 (cont)

Alguns exemplos:



Em posição geral



Não estão em posição geral

Exemplo 4 (cont)

Ideia para a demonstração

- ▶ Vamos considerar n retas para as quais a fórmula vale.
- ▶ E verificar a fórmula quando adicionamos uma nova reta.

Demonstração:

- ▶ Quando $n = 1$, há apenas uma reta.
- ▶ Uma reta sozinha divide o plano em dois, então

$$T_1 = 2 = \frac{1(1+1)}{2} + 1.$$

- ▶ Isto conclui o caso básico.

Exemplo 4 (cont)

- ▶ Considere um número $n > 1$.
- ▶ **Suponha** que a fórmula vale para $n - 1$:

$$T_{n-1} = \frac{(n-1)n}{2} + 1.$$

- ▶ **Vamos demonstrar** que a fórmula também vale para n :

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

Exemplo 4 (cont)

- ▶ Seja L um conjunto de n retas em posição geral.
- ▶ Remova uma reta r arbitrariamente de L .
- ▶ Obtemos um novo conjunto $L' = L \setminus \{r\}$.
- ▶ Note que L' é um conjunto de $n - 1$ retas em posição geral.
- ▶ Pela h.i., sabemos que L' divide o plano em T_{n-1} partes.

Exemplo 4 (cont)

Qual o efeito de adicionar a reta r ao conjunto L' ?

- ▶ a reta r intersecta as $n - 1$ retas de L' em pontos distintos
- ▶ assim, de um extremo ao outro, ela cruza n regiões
- ▶ cada região cruzada é dividida em duas regiões menores
- ▶ ou seja, o número de regiões aumenta em n

Assim, o número de regiões definidas por L é

$$\begin{aligned}T_n &= T_{n-1} + n \\ &= \frac{(n-1)n}{2} + 1 + n && \text{(pela h.i.)} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + 1.\end{aligned}$$

Exemplo 5

Algumas vezes temos que ter mais cuidado ao usar a hipótese da indução.

Exemplo

Demonstre que a série S_n definida abaixo satisfaz

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} < 1,$$

para todo inteiro $n \geq 1$.

Demonstração:

- ▶ Para $n = 1$, a inequação se reduz a $\frac{1}{2} < 1$, que é válida.
- ▶ Isso demonstra o caso básico.

Exemplo 5 (cont)

- ▶ Considere um número $n \geq 1$ e suponha que $S_n < 1$.
- ▶ Queremos mostrar que $S_{n+1} < 1$.

Primeira tentativa:

- ▶ Desenvolvemos S_{n+1} usando a definição

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{2^{n+1}} < 1 + \frac{1}{2^{n+1}} \quad (\text{pela h.i.})$$

- ▶ Mas o lado direito já é maior do que 1!

Exemplo 5 (cont)

Podemos manipular S_{n+1} e usar a hipótese de outro jeito:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \right) \\ &< \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (1) && \text{(pela h.i.)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Isto conclui a demonstração.

Indução reversa

Podemos usar indução para derivar o seguinte resultado.

Indução reversa

Considere uma afirmação $P(n)$ e suponha que

1. $P(n)$ vale para um subconjunto infinito de naturais e
2. se $P(n)$ vale para $n > 1$, então $P(n - 1)$ também vale.

Então $P(n)$ vale para todo natural n .

Você consegue ver por que esse resultado vale?

Exemplo 6

Teorema

Se x_1, x_2, \dots, x_n são números reais positivos, então

$$(x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Demonstração:

1. Primeiro, mostramos que vale para $n = 2^k$ para todo $k \geq 0$.
2. Depois, mostramos que, se vale n , também vale para $n - 1$.

Exemplo 6 (cont)

Lema 1

Considere um inteiro $k \geq 0$. Se $n = 2^k$, então o teorema vale.

Vamos mostrar por indução em k .

- ▶ Se $n = 2^0 = 1$, a inequação vale trivialmente.
- ▶ Se $n = 2^1 = 2$, a inequação vale, já que

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$$

pois

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq (x_1 + x_2)/2 \quad \Leftrightarrow$$

$$x_1 x_2 \leq (x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2)/4 \quad \Leftrightarrow$$

$$2x_1 x_2 \leq x_1^2 + x_2^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$0 \leq x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$0 \leq (x_1 - x_2)^2.$$

Exemplo 6 (cont)

- ▶ Agora considere um número $k \geq 0$.
- ▶ **Suponha** que a inequação vale para $n = 2^k$.
- ▶ **Vamos demonstrar** que a inequação vale para $2n = 2^{k+1}$.
- ▶ Reescrevendo o lado esquerdo da inequação para $2n$,

$$(x_1 x_2 \dots x_{2n})^{\frac{1}{2n}} = \sqrt{(x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} (x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{2n})^{\frac{1}{n}}}.$$

- ▶ Defina $y_1 = (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}}$ e $y_2 = (x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{2n})^{\frac{1}{n}}$
- ▶ Portanto, pelo caso $n = 2$ já demonstrado,

$$(x_1 x_2 \dots x_{2n})^{\frac{1}{2n}} = \sqrt{y_1 y_2} \leq \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Exemplo 6 (cont)

- ▶ Utilizando a h.i. duas vezes

$$y_1 = (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

$$y_2 = (x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{2n})^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{2n}}{n}.$$

- ▶ Substituindo na inequação anterior

$$\begin{aligned} (x_1 x_2 \dots x_{2n})^{\frac{1}{2n}} &\leq \frac{y_1 + y_2}{2} \\ &= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{2n} + \frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{2n}}{2n} \\ &= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2n}}{2n} \end{aligned}$$

- ▶ Isso mostra o lema para $k + 1$ e completa a demonstração.

Exemplo 6 (cont)

Para utilizar a indução reversa, ainda precisamos do seguinte.

Lema 2

Se que o teorema vale para $n \geq 2$, ele também vale para $n - 1$.

Demonstração:

- ▶ Queremos demonstrar

$$(x_1 x_2 \dots x_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1}.$$

- ▶ Defina

$$z = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1}.$$

- ▶ Como o teorema vale para n , pela premissa, sabemos que

$$(x_1 x_2 \dots x_{n-1} z)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + z}{n}.$$

Exemplo 6 (cont)

- ▶ Como z é a média dos valores x_i , sabemos que

$$(x_1 x_2 \dots x_{n-1} z)^{\frac{1}{n}} \leq z$$

- ▶ Elevando ambos os lados à potência $\frac{n}{n-1}$,

$$(x_1 x_2 \dots x_{n-1} z)^{\frac{1}{n-1}} \leq z^{\frac{n}{n-1}}.$$

- ▶ Finalmente, multiplicando ambos os lados por $z^{-\frac{1}{n-1}}$,

$$(x_1 x_2 \dots x_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \leq z = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1}.$$

- ▶ Assim, o teorema para $n - 1$, completando a prova.

Princípio da indução

- ▶ Erros comuns

Reduzir ou aumentar

- ▶ No passo da indução, supomos que a afirmação é válida para o caso $n - 1$ e mostramos que é válida para n .
- ▶ Portanto, devemos **sempre** partir de um caso genérico para n e reduzi-lo a algum caso particular para $n - 1$.
- ▶ Um **erro comum** é sair de um caso genérico para $n - 1$ e construir um exemplo do caso n .
 - ▶ não basta dar um exemplo para n
 - ▶ esse procedimento não é geral

Todas as retas se interceptam?

O que há de errado com a demonstração seguinte ?

Exemplo

Considere n retas distintas no plano, concorrentes duas a duas. Então existe um ponto comum a todas as n retas.

Demonstração:

- ▶ Se $n = 1$ ou $n = 2$, então a afirmação é clara.
- ▶ Fixe $n > 2$ e suponha que a afirmação vale para $n - 1$.
- ▶ Considere n retas no plano concorrentes duas a duas.

Todas as retas se interceptam?

- ▶ Sejam S_1, S_2 dois subconjuntos distintos com $n - 1$ retas.
- ▶ Pela h.i., as retas de S_1 interceptam-se em um ponto p_1 .
- ▶ Analogamente, as retas de S_2 interceptam-se em p_2 .
- ▶ Daí, cada reta de $S_1 \cap S_2$ intercepta tanto p_1 quanto p_2 .
- ▶ Como duas retas da interseção só se tocam em um ponto, sabemos que $p_1 = p_2$.
- ▶ Portanto, todas as retas interceptam-se em um ponto.

Certo? **Não!**

- ▶ Supomos que há duas retas na interseção.
- ▶ Isso é verdade quando $n \geq 4$, mas falha quando $n = 3$.