

Projeto e Análise de Algoritmos

Introdução

Lehilton Pedrosa

Primeiro Semestre de 2020

Agradecimentos

A maioria dos exemplos dos slides e exercícios adicionais foram ou criados e gentilmente cedidos pelo prof. Cid Carvalho de Souza e pela profa. Cândida Nunes da Silva (particularmente com modificações do prof. Orlando Lee); ou criados e gentilmente cedidos pelo prof. Flávio Keidi Miyazawa. Eu recriei ou reestruturei o conteúdo das unidades, possivelmente introduzindo erros, que devem ser reportados a mim.

O conjunto de slides de cada unidade do curso será disponibilizado como guia de estudos e deve ser usado unicamente para revisar as aulas. Para estudar e praticar, leia o livro-texto indicado e resolva os exercícios sugeridos.

Lehilton

Introdução à análise de algoritmos

O que veremos nesta disciplina?

1. Demonstrar **correção** de um algoritmo
 - ▶ como ter certeza de que a saída está correta
 - ▶ como convencer outras pessoas disso
2. Analisar a **complexidade** de um algoritmo
 - ▶ como estimar a quantidade de recursos utilizados
 - ▶ recursos podem ser tempo, memória, acesso a rede etc.

3. Utilizar técnicas conhecidas de **projeto** de algoritmos
 - ▶ divisão e conquista, programação dinâmica etc.
 - ▶ utilizar **recursão** adequadamente
4. Entender a **dificuldade** intrínseca de alguns problemas
 - ▶ inexistência de algoritmos eficientes
 - ▶ identificar os problemas intratáveis

Problemas computacionais

Um problema computacional é uma relação entre um conjunto de **instâncias** e um conjunto de **soluções**:

- ▶ uma **instância** é um conjunto de valores conhecidos
- ▶ uma **solução** é um conjunto de valores a computar
- ▶ cada instância corresponde a **uma ou mais** soluções

Exemplo de problema: teste de primalidade

Problema: determinar se um dado número é primo

- ▶ **instâncias:** números inteiros
- ▶ **soluções:** sim ou não

Exemplo:

- ▶ Instância: 9411461
- ▶ Solução: sim

Exemplo:

- ▶ Instância: 8411461
- ▶ Solução: não

Exemplo de problema: ordenação

Problema: ordenar os elementos de um vetor

- ▶ **instâncias:** conjunto de vetores de inteiros
- ▶ **soluções:** conjunto de vetores de inteiros em ordem crescente

Exemplo:

- ▶ Instância:

1										n
33	55	33	44	33	22	11	99	22	55	77

- ▶ Solução:

1										n
11	22	22	33	33	33	44	55	55	77	99

Um algoritmo é uma sequência de **instruções** que

- ▶ recebe uma instância de um problema computacional
- ▶ devolve uma solução correspondente à instância recebida

Observações:

- ▶ a instância recebida é chamada de **entrada**
- ▶ a solução devolvida é chamada de **saída**
- ▶ toda instrução deve ser **bem definida**

Descrição de algoritmos

Podemos escrever um algoritmo de várias maneiras:

- ▶ em uma linguagem de programação, como C, Pascal, Java, Python...
- ▶ em português, ou outra língua natural
- ▶ em pseudocódigo, como no livro de CLRS

Usaremos apenas as duas últimas opções!

Exemplo de pseudocódigo

Um algoritmo para o problema da ordenação:

```
INSERTION-SORT( $A, n$ )
1  para  $j \leftarrow 2$  até  $n$  faça
2    chave  $\leftarrow A[j]$ 
3     $i \leftarrow j - 1$ 
4    enquanto  $i \geq 1$  e  $A[i] > \textit{chave}$  faça
5       $A[i + 1] \leftarrow A[i]$ 
6       $i \leftarrow i - 1$ 
7     $A[i + 1] \leftarrow \textit{chave}$ 
```

Más prácticas

- ▶ **Não** misture código com pseudocódigo:

```
for ( $i = 0; i < n; i++$ ) ...
```

```
if ( $A[i] \geq \text{chave}$ )  
break
```

- ▶ **Não** escreva frases confusas:

```
se  $A[i] > \text{chave}$  então  
troque as posições dos elementos
```

```
 $\text{chave} \leftarrow$  pega o próximo elemento  
 $i \leftarrow$  procura posição da  $\text{chave}$ 
```

- ▶ **Evite** algoritmos complicados ou com muitas variáveis:

```
se  $j = 1$  então  
   $A[2] \leftarrow A[1]$   
   $A[1] \leftarrow \text{chave}$   
senão  
  enquanto  $i \geq 1$  e  $A[i] \geq \text{chave}$  faça  
    ...
```

Só podemos escrever instruções **bem definidas**:

- ▶ o resultado de cada instrução é inambíguo e depende somente do estado corrente da execução
- ▶ deve ser possível executar cada instrução usando o computador adotado

O conjunto de instruções permitidas é determinado pelo que chamamos de **modelo computacional**

Correção de algoritmos

Um algoritmo está **correto** se:

1. só utiliza instruções do modelo de computação adotado,
2. termina para toda instância do problema e
3. devolve uma solução que correspondente à instância recebida.

Ao escrever um algoritmo, sempre devemos

1. Testar o algoritmo
 - ▶ com uma ou mais instâncias de exemplo
 - ▶ executando ou simulando o algoritmo
2. Demonstrar que o algoritmo está correto
 - ▶ escrever uma prova formal genérica
 - ▶ vale para **toda** instância do problema

Complexidade de algoritmos

- ▶ Nem sempre é viável executar um algoritmo
 - ▶ pode levar anos ou séculos para terminar
 - ▶ pode precisar de mais memória do que há disponível

- ▶ Queremos
 1. projetar algoritmos eficientes
 2. comparar algoritmos diferentes

- ▶ Para isso, precisamos medir a **complexidade do algoritmo**
 - ▶ independentemente de quem programou,
 - ▶ da linguagem em foi escrito
 - ▶ e da máquina a ser usada

Modelo computacional e complexidade

Vamos estimar o tempo de execução de um algoritmo

- ▶ contamos o número de **instruções elementares** executadas
- ▶ supomos que cada instrução elementar consome um tempo contante

A análise de complexidade depende sempre do modelo computacional adotado!

- ▶ queremos um modelo computacional realista
- ▶ o conjunto de **instruções elementares** deve ser compatível com os computadores modernos
- ▶ mas deve ser suficientemente genérico para as diferentes arquiteturas

Máquinas RAM

Usaremos o **Modelo Abstrato RAM** (Random Access Machine)

- ▶ simula máquinas convencionais
- ▶ possui um único processador sequencial
- ▶ tipos básicos são números inteiros e pontos flutuantes
- ▶ cada *palavra de memória* tem tamanho limitado, i.e., valores não podem ser arbitrários

Instruções elementares

- ▶ operações aritméticas como soma, subtração, produto...
- ▶ acesso direto às posições da memória
- ▶ comandos de fluxo de controle (**se, enquanto...**)

Operações como exponenciação não são elementares.

Tamanho da entrada

Um parâmetro importante é o **tamanho da entrada**:

- ▶ normalmente proporcional ao número de bits da entrada
- ▶ também usamos o número de elementos do vetor

Problema: Primalidade

- ▶ Entrada: inteiro n
- ▶ Tamanho: $\lceil \log_2 n \rceil$ bits

Problema: Ordenação

- ▶ Entrada: vetor $A[1 \dots n]$
- ▶ Tamanho: $n \lceil \log_2 M \rceil$ bits, onde M é o máximo em $A[1 \dots n]$

Análise assintótica e de pior caso

Consideramos apenas instâncias **grandes**

- ▶ o número de instruções normalmente cresce com o tamanho da entrada n
- ▶ instâncias com tamanho limitado por constante gastam tempo constante

Fazemos apenas análise de **pior caso**

- ▶ restringimos a entradas com um dado tamanho n
- ▶ consideramos apenas uma instância para a qual o algoritmo executa o maior número de instruções

Denotamos por $T(n)$ o número de instruções executadas no pior caso para entradas de tamanho n

Características e limitações

Esse tipo de análise de complexidade:

- ▶ normalmente **estima** bem tempo de execução real
- ▶ permite comparar diversos algoritmos para um problema
- ▶ continua relevante mesmo com evoluções tecnológicas

Limitações:

- ▶ é uma análise **pessimista** do tempo de execução
- ▶ em certas aplicações, certas instâncias ocorrem mais frequentemente que um pior caso
- ▶ não fornece informação sobre tempo de execução médio

Começando a trabalhar

Problema: ordenar os elementos de um vetor

- ▶ Entrada: vetor $A[1 \dots n]$
- ▶ Saída: rearranjo de $A[1 \dots n]$ em ordem crescente

Vamos começar revendo a ordenação por inserção.

Inserção em um vetor ordenado

Ideia do algoritmo

- ▶ suponha que o subvetor $A[1 \dots j - 1]$ já está ordenado.
- ▶ vamos inserir o $A[j]$ para que $A[1 \dots j]$ fique ordenado
- ▶ o valor do elemento a ser inserido é chamado de *chave*

Antes de inserir:

1						j				n
20	25	35	40	44	55	38	99	10	65	50

Após inserir:

1						j				n
20	25	35	38	40	44	55	99	10	65	50

Inserindo uma chave

chave = 38

1					<i>i</i>	<i>j</i>					<i>n</i>
20	25	35	40	44	55	38	99	10	65	50	

1					<i>i</i>	<i>j</i>					<i>n</i>
20	25	35	40	44		55	99	10	65	50	

1				<i>i</i>	<i>j</i>						<i>n</i>
20	25	35	40		44	55	99	10	65	50	

1		<i>i</i>			<i>j</i>						<i>n</i>
20	25	35		40	44	55	99	10	65	50	

1		<i>i</i>			<i>j</i>						<i>n</i>
20	25	35	38	40	44	55	99	10	65	50	

Ordenando por inserção

<i>chave</i>	1							<i>j</i>			<i>n</i>
99	20	25	35	38	40	44	55	99	10	65	50

<i>chave</i>	1								<i>j</i>		<i>n</i>
10	10	20	25	35	38	40	44	55	99	65	50

<i>chave</i>	1									<i>j</i>	<i>n</i>
65	10	20	25	35	38	40	44	55	65	99	50

<i>chave</i>	1										<i>j</i>
50	10	20	25	35	38	40	44	50	55	65	99

Pseudocódigo de INSERTION-SORT

```
INSERTION-SORT( $A, n$ )
1  para  $j \leftarrow 2$  até  $n$  faça
2      chave  $\leftarrow A[j]$ 
3       $i \leftarrow j - 1$ 
4      enquanto  $i \geq 1$  e  $A[i] > \textit{chave}$  faça
5           $A[i + 1] \leftarrow A[i]$ 
6           $i \leftarrow i - 1$ 
7       $A[i + 1] \leftarrow \textit{chave}$ 
```

O que é importante analisar?

- ▶ Correção
 - ▶ já testamos o algoritmo com um exemplo
 - ▶ por enquanto, suponha que o algoritmo está correto
 - ▶ vamos mostrar que ele está correto depois

- ▶ Complexidade de tempo
 - ▶ considere vetores com n elementos
 - ▶ quantas instruções são executadas?

Contando o número de instruções

INSERTION-SORT(A, n)	Custo	Qnts vezes?
1 para $j \leftarrow 2$ até n faça	c_1	n
2 <i>chave</i> $\leftarrow A[j]$	c_2	$n - 1$
3 $i \leftarrow j - 1$	c_3	$n - 1$
4 enquanto $i \geq 1$ e $A[i] >$ <i>chave</i> faça	c_4	$\sum_{j=2}^n t_j$
5 $A[i + 1] \leftarrow A[i]$	c_5	$\sum_{j=2}^n (t_j - 1)$
6 $i \leftarrow i - 1$	c_6	$\sum_{j=2}^n (t_j - 1)$
7 $A[i + 1] \leftarrow$ <i>chave</i>	c_7	$n - 1$

- ▶ a linha k executa um número constante de instruções c_k
- ▶ cada linha executa uma ou mais vezes
- ▶ quantas vezes a linha 4 executa depende da entrada
 - ▶ seja t_j quantas vezes **enquanto** executa para um certo j

Tempo de execução total

- ▶ Considere uma instância de tamanho n
- ▶ Seja $T(n)$ o número de instruções executadas para ela
- ▶ Basta somar para todas as linhas

$$T(n) = c_1 \cdot n + c_2 \cdot (n - 1) + c_3 \cdot (n - 1) + c_4 \cdot \sum_{j=2}^n t_j + c_5 \cdot \sum_{j=2}^n (t_j - 1) + c_6 \cdot \sum_{j=2}^n (t_j - 1) + c_7 \cdot (n - 1)$$

Observações:

- ▶ entradas do mesmo tamanho têm tempos diferentes
- ▶ vamos considerar diferentes instâncias
 - ▶ **melhor caso:** quando $T(n)$ é o menor possível
 - ▶ **pior caso:** quando $T(n)$ é o maior possível

Melhor caso

Um melhor caso ocorre quando $t_j = 1$ para cada j

- ▶ basta que a condição do **enquanto** sempre falhe
- ▶ ocorre se a entrada A já vem ordenada

Nesse caso:

$$\begin{aligned}T(n) &= c_1 \cdot n + c_2 \cdot (n-1) + c_3 \cdot (n-1) + c_4 \cdot (n-1) + c_7 \cdot (n-1) \\ &= (c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_7) \cdot n - (c_2 + c_3 + c_4 + c_7) \\ &= a \cdot n + b\end{aligned}$$

- ▶ os valores de a e b são constantes
- ▶ o tempo de execução no melhor caso é **linear** em n

Um pior caso ocorre quando t_j é máximo para cada j

- ▶ basta que a condição do **enquanto** só falha quando $i = 0$
- ▶ nessa situação, teremos $t_j = j$
- ▶ ocorre se a entrada A vem ordenada decrescentemente

Relembre que

- ▶ $\sum_{j=2}^n j = n(n+1)/2 - 1$ e $\sum_{j=2}^n (j-1) = n(n-1)/2$

Pior caso (cont)

Substituindo, temos

$$\begin{aligned}T(n) &= c_1 \cdot n + c_2 \cdot (n-1) + c_3 \cdot (n-1) + c_4 \cdot (n(n+1)/2 - 1) + \\ &\quad c_5 \cdot n(n-1)/2 + c_6 \cdot n(n-1)/2 + c_7 \cdot (n-1) \\ &= (c_4/2 + c_5/2 + c_6/2) \cdot n^2 + \\ &\quad (c_1 + c_2 + c_3 + c_4/2 - c_5/2 - c_6/2 + c_7) \cdot n - \\ &\quad (c_2 + c_3 + c_4 + c_7) \\ &= a \cdot n^2 + b \cdot n + c\end{aligned}$$

- ▶ os valores de a, b, c são constantes
- ▶ o tempo de execução no pior caso é **quadrático** em n

Complexidade assintótica

Estamos interessados principalmente

- ▶ na análise de **pior caso**
- ▶ no tempo de execução para **instâncias grandes**

Comportamento assintótico

- ▶ no pior caso temos $T(n) = an^2 + bn + c$
 - ▶ o termo dominante é o que contém n^2
 - ▶ o tempo de execução é uma **função quadrática**
 - ▶ as constantes a, b, c só dependem da implementação
- ▶ não nos preocupamos com os valores de a, b, c

Por que isso é razoável?

Um exemplo de função quadrática

Considere a função $3n^2 + 10n + 50$

n	$3n^2 + 10n + 50$	$3n^2$
64	12978	12288
128	50482	49152
512	791602	786432
1024	3156018	3145728
2048	12603442	12582912
4096	50372658	50331648
8192	201408562	201326592
16384	805470258	805306368
32768	3221553202	3221225472

- ▶ quando n é grande, o termo $3n^2$ é uma boa estimativa
- ▶ podemos nos concentrar nos termos dominantes

Notação assintótica

Como simplificar o tempo de pior caso de INSERTION-SORT?

- ▶ ao invés de escrever $T(n) = an^2 + bn + c$,
- ▶ escrevemos somente $T(n) = \Theta(n^2)$

Essa notação significa que, para n suficientemente grande,

1. $T(n)$ é limitada **superiormente** por $c \cdot n^2$, para algum $c > 0$
2. $T(n)$ é limitada **inferiormente** por $d \cdot n^2$, para algum $d > 0$

Vamos formalizar essa notação assintótica mais adiante!

Projetando algoritmos

Projetando algoritmos

- ▶ Divisão e conquista

Entendendo e melhorando

Até agora:

- ▶ ordenamos **incrementalmente** com o INSERTION-SORT
- ▶ vimos que sua complexidade de pior caso é $\Theta(n^2)$

Vamos estudar uma maneira alternativa de ordenar números

- ▶ vamos utilizar uma técnica recursiva chamada de **divisão e conquista**
- ▶ muitas vezes, obtemos algoritmos mais rápidos do que os incrementais

“To understand recursion, we must first understand recursion.”
(autor desconhecido)

- ▶ Um **algoritmo recursivo** resolve um problema
 - ▶ diretamente, se a instância for pequena
 - ▶ executando a si mesmo, se a instância não for pequena
- ▶ A chamada recursiva deve receber uma **instância menor**

Divisão e conquista

Um algoritmo de **divisão e conquista** tem três etapas:

1. **Divisão:** dividir o problema em subproblemas semelhantes, mas com instâncias menores
2. **Conquista:** cada subproblema é resolvido recursivamente, ou diretamente se os subproblemas forem pequenos
3. **Combinação:** as soluções dos subproblemas são combinadas para obter uma solução da instância original

Exemplo: ordenando usando divisão e conquista

MERGE-SORT é um exemplo clássico de divisão e conquista.

Ideia:

1. **Divisão:** divida um vetor de tamanho n em dois subvetores de tamanhos $\lfloor n/2 \rfloor$ e $\lceil n/2 \rceil$
2. **Conquista:** ordene os dois subvetores recursivamente
3. **Combinação:** intercale os dois subvetores obtendo um vetor ordenado

Mergesort

O vetor de entrada é representado como $A[p \dots r]$, com $p \leq r$.

```
MERGE-SORT( $A, p, r$ )
```

```
1  se  $p < r$ 
```

```
2      então  $q \leftarrow \lfloor (p + r) / 2 \rfloor$ 
```

```
3          MERGE-SORT( $A, p, q$ )
```

```
4          MERGE-SORT( $A, q + 1, r$ )
```

```
5          INTERCALA( $A, p, q, r$ )
```

	p				q			r	
A	66	33	55	44	99	11	77	22	88

Mergesort

O vetor de entrada é representado como $A[p \dots r]$, com $p \leq r$.

```
MERGE-SORT( $A, p, r$ )  
1  se  $p < r$   
2    então  $q \leftarrow \lfloor (p + r) / 2 \rfloor$   
3    MERGE-SORT( $A, p, q$ )  
4    MERGE-SORT( $A, q + 1, r$ )  
5    INTERCALA( $A, p, q, r$ )
```

	p				q				r
A	33	44	55	66	99	11	77	22	88

Mergesort

O vetor de entrada é representado como $A[p \dots r]$, com $p \leq r$.

```
MERGE-SORT( $A, p, r$ )  
1  se  $p < r$   
2    então  $q \leftarrow \lfloor (p + r) / 2 \rfloor$   
3          MERGE-SORT( $A, p, q$ )  
4          MERGE-SORT( $A, q + 1, r$ )  


---

5          INTERCALA( $A, p, q, r$ )
```

	p				q				r
A	33	44	55	66	99	11	22	77	88

Mergesort

O vetor de entrada é representado como $A[p \dots r]$, com $p \leq r$.

```
MERGE-SORT( $A, p, r$ )  
1  se  $p < r$   
2    então  $q \leftarrow \lfloor (p + r) / 2 \rfloor$   
3          MERGE-SORT( $A, p, q$ )  
4          MERGE-SORT( $A, q + 1, r$ )  
5          INTERCALA( $A, p, q, r$ )
```

	p				q				r
A	11	22	33	44	55	66	77	88	99

Combinando soluções dos subproblemas

Problema: Intercalar dois subvetores

Entrada: vetor $A[p \dots r]$ tal que

1. subvetor $A[p \dots q]$ está ordenado
2. subvetor $A[q + 1 \dots r]$ está ordenado

Saída: rearranjo $A[p \dots r]$ ordenado

Entrada:

	p				q				r
A	22	33	55	77	99	11	44	66	88

Saída:

	p				q				r
A	11	22	33	44	55	66	77	88	99

Pseudocódigo de INTERCALA

```
INTERCALA( $A, p, q, r$ )
1  para  $i \leftarrow p$  até  $q$  faça
2       $B[i] \leftarrow A[i]$ 
3  para  $j \leftarrow q + 1$  até  $r$  faça
4       $B[r + q + 1 - j] \leftarrow A[j]$ 
5   $i \leftarrow p$ 
6   $j \leftarrow r$ 
7  para  $k \leftarrow p$  até  $r$  faça
8      se  $B[i] \leq B[j]$ 
9          então  $A[k] \leftarrow B[i]$ 
10              $i \leftarrow i + 1$ 
11         senão  $A[k] \leftarrow B[j]$ 
12              $j \leftarrow j - 1$ 
```

Intercalando

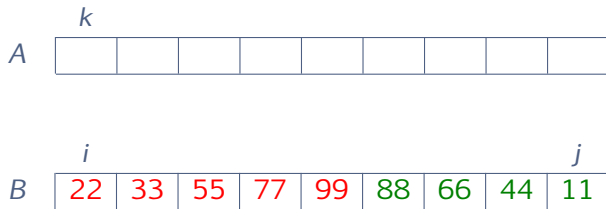
A

p				q			r	
22	33	55	77	99	11	44	66	88

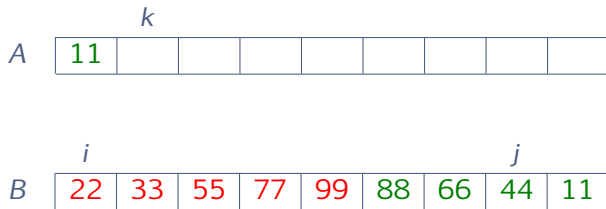
B

--	--	--	--	--	--	--	--	--

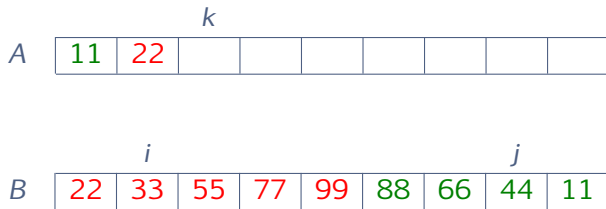
Intercalando



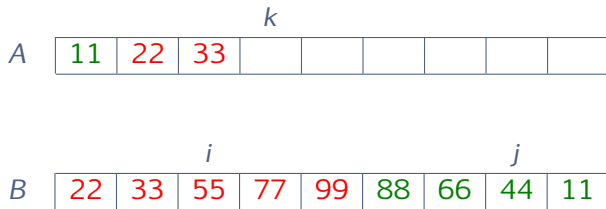
Intercalando



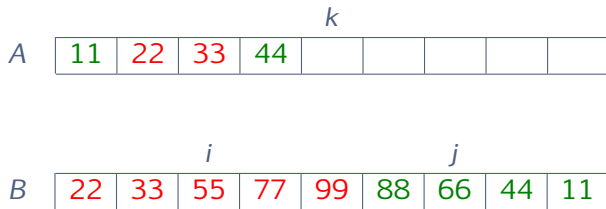
Intercalando



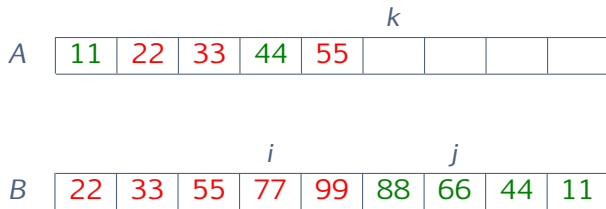
Intercalando



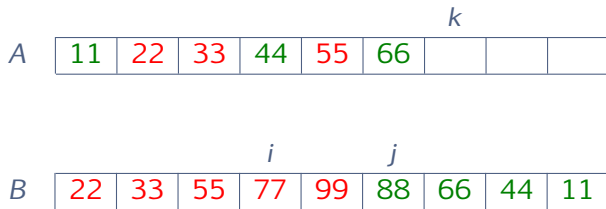
Intercalando



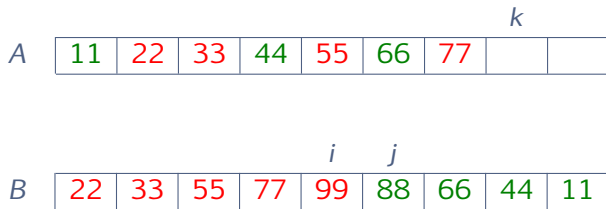
Intercalando



Intercalando



Intercalando



Intercalando

A

11	22	33	44	55	66	77	88	
----	----	----	----	----	----	----	----	--

k

$i=j$

22	33	55	77	99	88	66	44	11
----	----	----	----	----	----	----	----	----

Intercalando

A

11	22	33	44	55	66	77	88	99
----	----	----	----	----	----	----	----	----

B

22	33	55	77	99	88	66	44	11
----	----	----	----	----	----	----	----	----

j i

Complexidade de INTERCALA

Entrada:

	p				q				r
A	22	33	55	77	99	11	44	66	88

Saída:

	p				q				r
A	11	22	33	44	55	66	77	88	99

Tamanho da entrada: $n = r - p + 1$

Consumo de tempo: $\Theta(n)$

Ordenando por intercalação

	p				q				r
A	66	33	55	44	99	11	77	22	88

Ordenando por intercalação

	<i>p</i>				<i>q</i>				<i>r</i>
A	66	33	55	44	99	11	77	22	88

	<i>p</i>		<i>q</i>		<i>r</i>				
A	66	33	55	44	99				

Ordenando por intercalação

	p				q				r
A	66	33	55	44	99	11	77	22	88

	p		q		r				
A	66	33	55	44	99				

	p	q	r						
A	66	33	55						

Ordenando por intercalação

	p				q				r
A	66	33	55	44	99	11	77	22	88

	p		q		r				
A	66	33	55	44	99				

	p	q	r						
A	66	33	55						

	p	r							
A	66	33							

Ordenando por intercalação

	p				q				r
A	66	33	55	44	99	11	77	22	88

	p		q		r				
A	66	33	55	44	99				

	p	q	r						
A	66	33	55						

	p	r							
A	66	33							

	$p = r$								
A	66								

Ordenando por intercalação

	<i>p</i>				<i>q</i>				<i>r</i>
A	66	33	55	44	99	11	77	22	88

	<i>p</i>		<i>q</i>		<i>r</i>				
A	66	33	55	44	99				

	<i>p</i>	<i>q</i>	<i>r</i>						
A	66	33	55						

	<i>p</i>	<i>r</i>							
A	66	33							

Ordenando por intercalação

A

p				q				r
66	33	55	44	99	11	77	22	88

A

p		q		r				
66	33	55	44	99				

A

p	q	r						
66	33	55						

A

p	r							
66	33							

A

	$p = r$							
	33							

Ordenando por intercalação

	p				q				r
A	66	33	55	44	99	11	77	22	88

	p		q		r				
A	66	33	55	44	99				

	p	q	r						
A	66	33	55						

	p	r							
A	66	33							

Ordenando por intercalação

	<i>p</i>				<i>q</i>				<i>r</i>
A	33	66	55	44	99	11	77	22	88

	<i>p</i>		<i>q</i>		<i>r</i>				
A	33	66	55	44	99				

	<i>p</i>	<i>q</i>	<i>r</i>						
A	33	66	55						

	<i>p</i>	<i>r</i>							
A	33	66							

Ordenando por intercalação

	p				q				r
A	33	66	55	44	99	11	77	22	88

	p		q		r				
A	33	66	55	44	99				

	p	q	r						
A	33	66	55						

Ordenando por intercalação

A

	p				q				r
	33	66	55	44	99	11	77	22	88

A

	p		q		r				
	33	66	55	44	99				

A

	p	q	r						
	33	66	55						

A

			$p = r$						
			55						

Ordenando por intercalação

	p				q				r
A	33	66	55	44	99	11	77	22	88

	p		q		r				
A	33	66	55	44	99				

	p	q	r						
A	33	66	55						

Ordenando por intercalação

	p				q				r
A	33	55	66	44	99	11	77	22	88

	p		q		r				
A	33	55	66	44	99				

	p	q	r						
A	33	55	66						

Ordenando por intercalação

	p				q				r
A	33	55	66	44	99	11	77	22	88

	p		q		r				
A	33	55	66	44	99				

Ordenando por intercalação

A

p				q				r
33	55	66	44	99	11	77	22	88

A

p		q		r				
33	55	66	44	99				

A

			p	r				
			44	99				

Ordenando por intercalação

A

	p				q				r
	33	55	66	44	99	11	77	22	88

A

	p		q		r				
	33	55	66	44	99				

A

			p	r					
			44	99					

A

			$p = r$						
			44						

Ordenando por intercalação

A

	p				q				r
	33	55	66	44	99	11	77	22	88

A

	p		q		r				
	33	55	66	44	99				

A

			p	r					
			44	99					

Ordenando por intercalação

A

	p			q				r	
	33	55	66	44	99	11	77	22	88

A

	p		q		r				
	33	55	66	44	99				

A

			p	r					
			44	99					

A

				$p = r$					
				99					

Ordenando por intercalação

A

	p				q				r
	33	55	66	44	99	11	77	22	88

A

	p		q		r				
	33	55	66	44	99				

A

				p	r				
				44	99				

Ordenando por intercalação

	p				q				r
A	33	55	66	44	99	11	77	22	88

	p		q		r				
A	33	55	66	44	99				

Ordenando por intercalação

A

	<i>p</i>				<i>q</i>				<i>r</i>
	33	44	55	66	99	11	77	22	88

A

	<i>p</i>		<i>q</i>		<i>r</i>				
	33	44	55	66	99				

Ordenando por intercalação

	p				q				r
A	33	44	55	66	99	11	77	22	88

Ordenando por intercalação

A

	p				q				r
	33	44	55	66	99	11	77	22	88

A

					p			r
					11	77	22	88

Ordenando por intercalação

A

	p				q				r
	33	44	55	66	99	11	77	22	88

A

					p			r
					11	77	22	88

A

					p	r		
					11	77		

Ordenando por intercalação

A

	p				q			r	
	33	44	55	66	99	11	77	22	88

A

					p			r
					11	77	22	88

A

					p	r		
					11	77		

A

					$p = r$			
					11			

Ordenando por intercalação

A

p				q			r	
33	44	55	66	99	11	77	22	88

A

					p		r	
					11	77	22	88

A

					p	r		
					11	77		

Ordenando por intercalação

A

	p				q			r	
	33	44	55	66	99	11	77	22	88

A

					p		r		
					11	77	22	88	

A

					p	r			
					11	77			

A

						$p = r$			
						77			

Ordenando por intercalação

A

	p				q			r	
	33	44	55	66	99	11	77	22	88

A

					p			r	
					11	77	22	88	

A

					p	r			
					11	77			

Ordenando por intercalação

A

	p				q			r	
	33	44	55	66	99	11	77	22	88

A

					p			r	
					11	77	22	88	

Ordenando por intercalação

A

	p				q			r	
	33	44	55	66	99	11	77	22	88

A

						p		r	
						11	77	22	88

A

							p	r
							22	88

A

								$p = r$
								88

Ordenando por intercalação

A

	p				q			r	
	33	44	55	66	99	11	77	22	88

A

					p			r	
					11	77	22	88	

Ordenando por intercalação

A

	p				q				r
	33	44	55	66	99	11	22	77	88

A

					p			r
					11	22	77	88

Ordenando por intercalação

A

	p				q				r
	33	44	55	66	99	11	22	77	88

Ordenando por intercalação

A

	p			q				r	
	11	22	33	44	55	66	77	88	99

Ordenando por intercalação

	p				q				r
A	11	22	33	44	55	66	77	88	99

Complexidade de MERGE-SORT

```
MERGE-SORT( $A, p, r$ )  
1  se  $p < r$   
2    então  $q \leftarrow \lfloor (p + r)/2 \rfloor$   
3          MERGE-SORT( $A, p, q$ )  
4          MERGE-SORT( $A, q + 1, r$ )  
5          INTERCALA( $A, p, q, r$ )
```

- ▶ Tamanho da entrada: $n = r - p + 1$
- ▶ Seja $T(n)$ o número de instruções executadas no pior caso

Complexidade de MERGE-SORT

MERGE-SORT(A, p, r)

```
1  se  $p < r$ 
2      então  $q \leftarrow \lfloor (p+r)/2 \rfloor$ 
3          MERGE-SORT( $A, p, q$ )
4          MERGE-SORT( $A, q+1, r$ )
5          INTERCALA( $A, p, q, r$ )
```

Linha	Tempo
1	$\Theta(1)$
2	$\Theta(1)$
3	$T(\lceil n/2 \rceil)$
4	$T(\lfloor n/2 \rfloor)$
5	$\Theta(n)$

$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n) + \Theta(2)$$

O tempo de MERGE-SORT é dado pela fórmula

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n = 1 \\ T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n) & \text{se } n = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

Obtemos uma **fórmula de recorrência**

- ▶ é a descrição de uma função em termos de si mesma.
- ▶ o tempo de um algoritmo recursivo costuma se descrito por uma recorrência

Mas queremos uma **fórmula fechada**

- ▶ Nesse caso, $T(n) = \Theta(n \log n)$
- ▶ Aprenderemos a resolver recorrências depois

Projetando algoritmos

- ▶ Entendendo a importância de algoritmos eficientes

Algoritmos bons e ruins

Que diferença faz ter um algoritmo $\Theta(n^2)$ ou $\Theta(n \log n)$?

Suponha que queremos ordenar um vetor de n elementos

1. Usando um computador A com velocidade 1GHz e com um algoritmo que executa $2n^2$ instruções.
2. Usando um computador B com velocidade 10MHz e com um algoritmo que executa $50n \log n$ instruções.

Comparando as implementações:

- ▶ O computador A é 100 vezes mais rápido do que B .
- ▶ A constante multiplicativa do segundo é bem maior:
 - ▶ pode ser devido a uma linguagem de mais alto nível
 - ▶ ou devido a um programador menos experiente

Algoritmos bons e ruins (cont)

Que implementação ordena um milhão de elementos primeiro?

1. A máquina *A* leva

$$\frac{2 \cdot (10^6)^2 \text{instruções}}{10^9 \text{instruções /segundo}} \approx 2000 \text{segundos}$$

2. A máquina *B* leva

$$\frac{50 \cdot (10^6 \log 10^6) \text{instruções}}{10^7 \text{instruções /segundo}} \approx 100 \text{segundos}$$

- ▶ A máquina *B* foi **vinte vezes** mais rápida do que *A*
- ▶ Se fossem 10 milhões de elementos, a razão seria de **2,3 dias** para **20 minutos**

E se usarmos um supercomputador?

$f(n)$	Computador atual	100×mais rápido	1000×mais rápido
n	N_1	$100N_1$	$1000N_1$
n^2	N_2	$10N_2$	$31,6N_2$
n^3	N_3	$4,64N_3$	$10N_3$
n^5	N_4	$2,5N_4$	$3,98N_4$
2^n	N_5	$N_5 + 6,64$	$N_5 + 9,97$
3^n	N_6	$N_6 + 4,19$	$N_6 + 6,29$

Se só tivermos um algoritmo ruim, não iremos resolver problemas muito maiores.

Algumas conclusões:

- ▶ Projetar algoritmos melhores pode levar a ganhos extraordinários de desempenho.
- ▶ Isso é tão importante quanto o projeto de hardware.
- ▶ O ganho obtido ao melhorar a complexidade de um algoritmo não poderia ser obtida simplesmente com o avanço da tecnologia.
- ▶ Queremos estudar principalmente algoritmos fundamentais, que produzem avanços em outras componentes básicas das aplicações (pense nos compiladores, buscadores na internet, classificadores, etc).