Projeto e Análise de Algoritmos

Buscas em grafos

Cid Carvalho de Souza, Cândida Nunes da Silva et al.

Primeiro Semestre de 2017

Busca em Largura

Busca em grafos

- Grafos são estruturas mais complicadas do que listas, vetores e árvores (binárias).
  Precisamos de métodos para explorar/percorrer um grafo (direcionado ou não direcionado).
- Busca em largura (breadth-first search – BFS)
  Busca em profundidade (depth-first search – DFS)
- Pode-se obter várias informações sobre a estrutura do grafo que podem ser úteis para projetar algoritmos eficientes para determinados problemas.

Notação

- Para um grafo G (direcionado ou não) denotamos por $V[G]$ seu conjunto de vértices e por $E[G]$ seu conjunto de arestas.
- Para denotar complexidades nas expressões com O ou Θ usaremos V e E em vez de $|V[G]|$ ou $|E[G]|$. Por exemplo, $\Theta(V + E)$ ou $O(V^2)$.

Representação de árvores

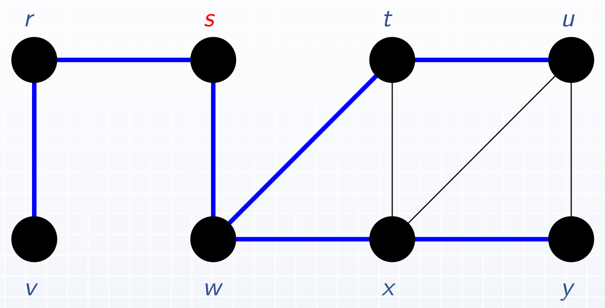
- Os algoritmos de busca que veremos constroem uma árvore (ou floresta) que é um subgrafo do grafo de entrada.
- Usualmente supomos que há um vértice s que será a raiz da árvore.
- É conveniente ter uma representação desta árvore que facilite certas operações. Por exemplo, determinar o caminho que vai da raiz s a um vértice v.

Representação de árvores

- Para representar uma árvore com raiz s usamos um vetor $\pi[\,]$.
- Convencionamos que $\pi[s] = NIL$.
- Cada vértice $v (\neq s)$ possui um pai $\pi[v]$.
- O caminho de s a v na Árvore é dado por:

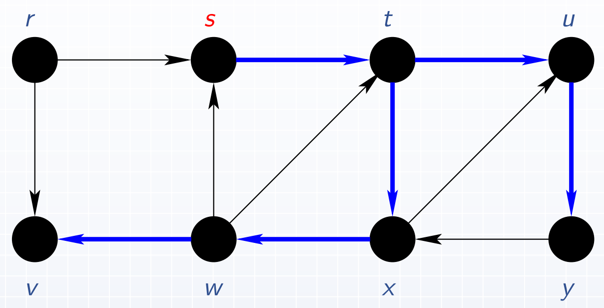
$$v, \pi[v], \pi[\pi[v]], \pi[\pi[\pi[v]]], \dots, s.$$

Exemplo 1



v	r	s	t	u	v	w	x	y
$\pi[v]$	s	N	w	t	r	s	w	x

Exemplo 2



v	r	s	t	u	v	w	x	y
$\pi[v]$	N	N	s	t	w	x	t	u

Como obter os caminhos na árvore

Imprime o caminho de s a v na árvore com raiz s representada por $\pi[\ ]$.

```
Print-Path(G, s, v)
  se v = s então
     imprima s
  senão
     se π[v] = NIL então
        imprima Não existe caminho de s a v.
     senão
        Print-Path(G, s, π[v])
        imprima v.
```

Complexidade: $O(\text{comprimento do caminho}) = O(V)$.

Busca em largura

- Dizemos que um vértice v é **alcançável** a partir de um vértice s em um grafo G se existe um caminho de s a v em G.
- Definição: a distância de s a v é o comprimento de um caminho mais curto de s a v.
  Denotamos este valor por $\text{dist}(s, v)$.
- Se v **não é alcançável** a partir de s, então $\text{dist}(s, v) = \infty$ (*distância infinita*).

Busca em largura

- Busca em largura recebe um grafo $G = (V, E)$ e um vértice especificado s chamado fonte (*source*).
- Percorre todos os vértices alcançáveis a partir de s em ordem de distância deste. Vértices à mesma distância podem ser percorridos em qualquer ordem.
- Constrói uma Árvore de Busca em Largura com raiz s. Cada caminho de s a um vértice v nesta árvore corresponde a um caminho mais curto de s a v.

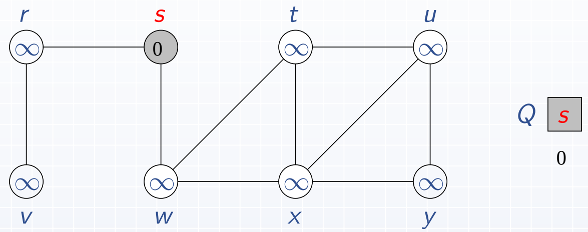
Busca em largura

- Inicialmente a Árvore de Busca em Largura contém apenas o vértice fonte s.
- Para cada vizinho v de s, o vértice v e a aresta (s, v) são acrescentadas à árvore.
- O processo é repetido para os vizinhos dos vizinhos de s e assim por diante, até que todos os vértices atingíveis por s sejam inseridos na árvore.
- Este processo é implementado através de uma fila Q.

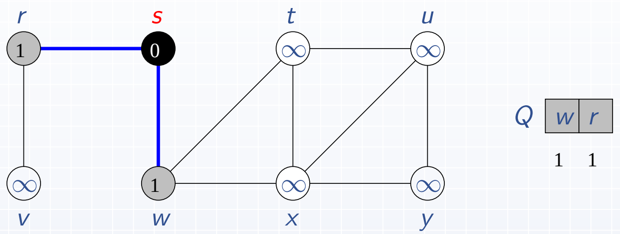
Busca em largura

- Busca em largura atribui cores a cada vértice: branco, cinza e preto.
- Cor branca = “não visitado”.
  Inicialmente todos os vértices são brancos.
- Cor cinza = “visitado pela primeira vez” (na fila).
- Cor Preta = “teve seus vizinhos visitados”.

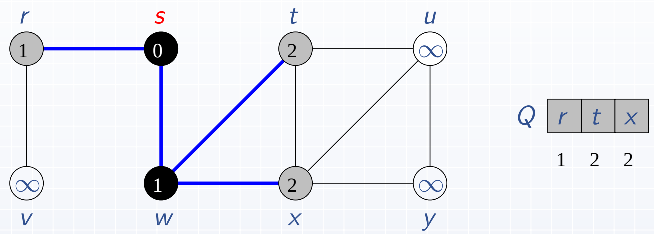
Exemplo (CLRS)



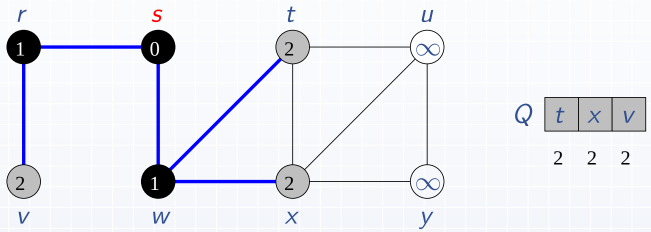
Exemplo (CLRS)



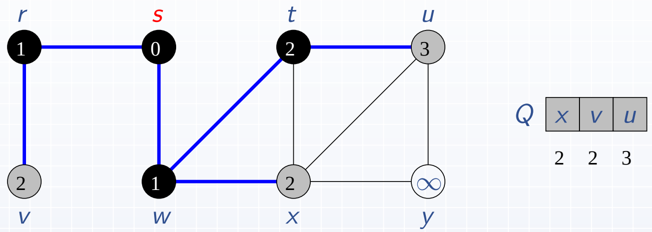
Exemplo (CLRS)



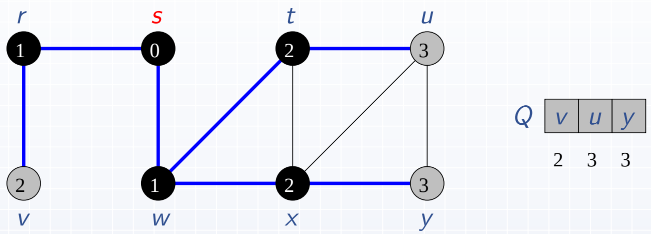
Exemplo (CLRS)



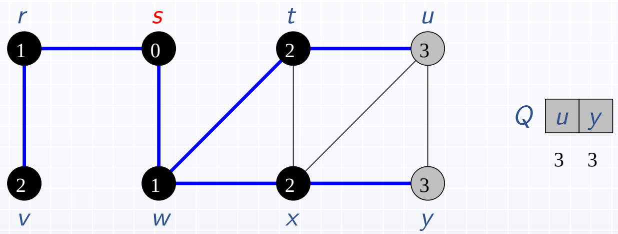
Exemplo (CLRS)



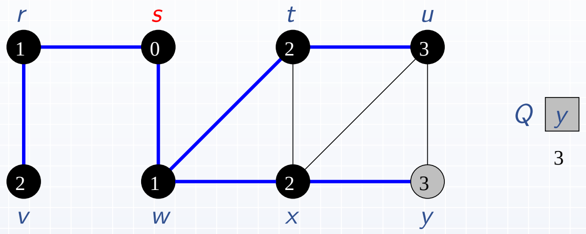
Exemplo (CLRS)



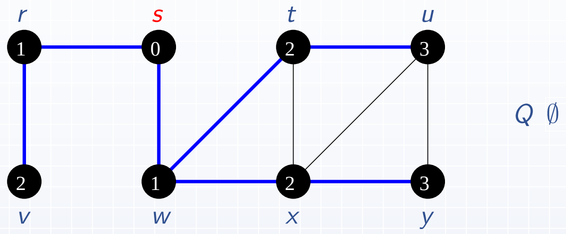
Exemplo (CLRS)



Exemplo (CLRS)



Exemplo (CLRS)



Cores

- Para cada vértice v guarda-se sua cor atual cor$[v]$ que pode ser branco, cinza ou preto.
- Para efeito de implementação, isto não é realmente necessário, mas facilita o entendimento do algoritmo.

Representação da árvore e das distâncias

- A raiz da Árvore de Busca em Largura é s.
- Representamos a árvore através de um vetor $\pi[\;]$.
- Uma variável $d[v]$ é usada para armazenar a distância de s a v (que será determinada durante a busca).

Busca em largura

Recebe um grafo G (na forma de listas de adjacências) e um vértice $s \in V[G]$ e devolve
(i) para cada vértice v, a distância de s a v em G e
(ii) uma Árvore de Busca em Largura.

```
BFS(G, s)
   ▷ Inicialização
   para cada u ∈ V[G] − {s} faça
       cor[u] ← branco
       d[u] ← ∞
       π[u] ← NIL
   cor[s] ← cinza
   d[s] ← 0
   π[s] ← NIL
```


Busca em largura

```
   Q ← ∅
   ENQUEUE(Q, s)
   enquanto Q ≠ ∅ faça
       u ← DEQUEUE(Q)
       para cada v ∈ Adj[u] faça
           se cor[v] = branco então
               cor[v] ← cinza
               d[v] ← d[u] + 1
               π[v] ← u
               ENQUEUE(Q, v)
       cor[u] ← preto
```


Consumo de tempo

Método de análise agregado.

- A inicialização consome tempo $\Theta(V)$.
- Depois que um vértice deixa de ser branco, ele não volta a ser branco novamente. Assim, cada vértice é inserido na fila Q no máximo uma vez. Cada operação sobre a fila consome tempo $\Theta(1)$ resultando em um total de $O(V)$.
- Em uma lista de adjacência, cada vértice é percorrido apenas uma vez. A soma dos comprimentos das listas é $\Theta(E)$. Assim, o tempo gasto para percorrer as listas é $O(E)$.

Complexidade de tempo

Conclusão:

A complexidade de tempo de BFS é $O(V + E)$.

Agora falta mostrar que BFS funciona.

Corretude

Lembre-se que $\text{dist}(s, v)$ a distância de s a v.

Precisamos mostrar que:

- $d[v] = \text{dist}(s, v)$ para todo $v \in V[G]$.
- A função predecessor $\pi[]$ define uma Árvore de Busca em Largura com raiz s.

Alguns lemas

Note que $d[v]$ e $\pi[v]$ nunca mudam após v ser inserido na fila.

Lema 1. Se $d[v] < \infty$ então v pertence à árvore T induzida por $\pi[]$ e o caminho de s a v em T tem comprimento $d[v]$.

Prova:

Indução no número de operações Enqueue.

Alguns lemas

Base: quando s é inserido na fila temos $d[s] = 0$ e s é a raiz da árvore T.

Passo de indução: v é descoberto enquanto a busca é feita em u (percorrendo $\text{Adj}[u]$). Então por HI existe um caminho de s a u em T com comprimento $d[u]$.

Como tomamos $d[v] = d[u] + 1$ e $\pi[v] = u$, o resultado segue. ∎

Alguns lemas

$d[v]$ é uma estimativa superior de $\text{dist}(s, v)$.

Corolário 1. Durante a execução do algoritmo vale o seguinte invariante

$$d[v] \geq \text{dist}(s, v) \text{ para todo } v \in V[G].$$

∎

Alguns lemas

Lema 2. Suponha que $\langle v_1, v_2, \ldots, v_r \rangle$ seja a disposição da fila Q na linha 10 em uma iteração qualquer.

Então

$$d[v_r] \leq d[v_1] + 1$$

e

$$d[v_i] \leq d[v_{i+1}] \text{ para } i = 1, 2, \ldots, r-1.$$

Em outras palavras, os vértices são inseridos na fila em ordem crescente e há no máximo dois valores de $d[v]$ para vértices na fila.

Prova do Lema 2

Prova: Indução no número de operações ENQUEUE e DEQUEUE.

Base: $Q = \{s\}$. O lema vale trivialmente.

Passo de indução:

Caso 1: v_1 é removido de Q.

Agora v_2 é o primeiro vértice de Q. Então

$$d[v_r] \leq d[v_1] + 1 \leq d[v_2] + 1.$$

As outras desigualdades se mantêm.

Prova do Lema 2

Passo de indução:

Caso 2: $v = v_{r+1}$ é inserido em Q.

Suponha que a busca é feita em u neste momento. Logo $d[v_1] \geq d[u]$. Então

$$d[v_{r+1}] = d[v] = d[u] + 1 \leq d[v_1] + 1.$$

Pela HI segue que $d[v_r] \leq d[u] + 1$. Logo

$$d[v_r] \leq d[u] + 1 = d[v] = d[v_{r+1}].$$

As outras desigualdades se mantêm. ■

Árvore

Teorema. Seja G um grafo e $s \in V[G]$.

Então após a execução de BFS,

$$d[v] = \mathrm{dist}(s, v) \text{ para todo } v \in V[G]$$

e

$\pi[\,]$ define uma Árvore de Busca em Largura.

Prova: Basta provar que $d[v] = \mathrm{dist}(s, v)$ para todo $v \in V[G]$.

Note que se $\mathrm{dist}(s, v) = \infty$ então $d[v] = \infty$ pelo Corolário 1.

Então vamos considerar o caso em que $\mathrm{dist}(s, v) < \infty$.

Corretude

Vamos provar por indução em $\mathrm{dist}(s, v)$ que $d[v] = \mathrm{dist}(s, v)$.

Base: Se $\mathrm{dist}(s, v) = 0$ então $v = s$ e $d[s] = 0$.

Hipótese de indução: Suponha então que $d[u] = \mathrm{dist}(s, u)$ para todo vértice u com $\mathrm{dist}(s, u) < k$.

Seja v um vértice com $\mathrm{dist}(s, v) = k$. Considere um caminho mínimo de s a v em G e chame de u o vértice que antecede v neste caminho. Note que $\mathrm{dist}(s, u) = k - 1$.

Considere o instante em que u foi removido da fila Q (linha 11 de BFS). Neste instante, v é branco, cinza ou preto.

Corretude

- se v é branco, então a linha 15 faz com $d[v] = d[u] + 1 = (k - 1) + 1 = k$.
- se v é cinza, então v foi visitado antes por algum vértice w (logo, $v \in \mathrm{Adj}[w]$) e $d[v] = d[w] + 1$. Pelo Lema 2, $d[w] \leq d[u] = k - 1$ e segue que $d[v] = k$.
- se v é preto, então v já passou pela fila Q e pelo Lema 2, $d[v] \leq d[u] = k - 1$. Mas por outro lado, pelo Corolário 1, $d[v] \geq \mathrm{dist}(s, v) = k$, o que é uma contradição. Este caso não ocorre.

Portanto, temos que $d[v] = \mathrm{dist}(s, v)$. ■

Busca em Profundidade

Busca em profundidade

Depth First Search = busca em profundidade

- A estratégia consiste em pesquisar o grafo o mais "profundamente" sempre que possível.
- Aplicável tanto a grafos direcionados quanto não direcionados.
- Possui um número enorme de aplicações:
  - determinar os componentes de um grafo
  - ordenação topológica
  - determinar componentes fortemente conexos
  - subrotina para outros algoritmos

Busca em profundidade

Recebe um grafo $G = (V, E)$ (representado por listas de adjacências). A busca inicia-se em um vértice qualquer. Busca em profundidade é um método recursivo. A idéia básica consiste no seguinte:

- Suponha que a busca atingiu um vértice u.
- Escolhe-se um vizinho não visitado v de u para prosseguir a busca.
- "Recursivamente" a busca em profundidade prossegue a partir de v.
- Quando esta busca termina, tenta-se prosseguir a busca a partir de outro vizinho de u. Se não for possível, ela retorna (*backtracking*) ao nível anterior da recursão.

Busca em profundidade

Outra forma de entender Busca em Profundidade é imaginar que os vértices são armazenados em uma pilha à medida que são visitados. Compare isto com Busca em Largura onde os vértices são colocados em uma fila.

- Suponha que a busca atingiu um vértice u.
- Escolhe-se um vizinho não visitado v de u para prosseguir a busca.
- Empilhe u e repete-se o passo anterior com v.
- Se nenhum vértice não visitado foi encontrado, então desempilhe um vértice da pilhave volte ao primeiro passo.

Floresta de Busca em Profundidade

- A busca em profundidade associa a cada vértice x um pai $\pi[x]$.
- O subgrafo induzido pelas arestas

  $\{(\pi[x], x) : x \in V[G] \text{ e } \pi[x] \neq \text{NIL}\}$

  é a Floresta de Busca em Profundidade.
- Cada componente desta floresta é uma Árvore de Busca em Profundidade.

Cores dos vértices

À medida que o grafo é percorrido, os vértices visitados vão sendo coloridos.

Cada vértice tem uma das seguintes cores:

- Cor branca = "vértice ainda não visitado"'.
- Cor cinza = "vértice visitado mas ainda não finalizado".
- Cor preta = "vértice visitado e finalizado".

Observação: os vértices de cor cinza correspondem a um caminho na floresta (começando da raiz).

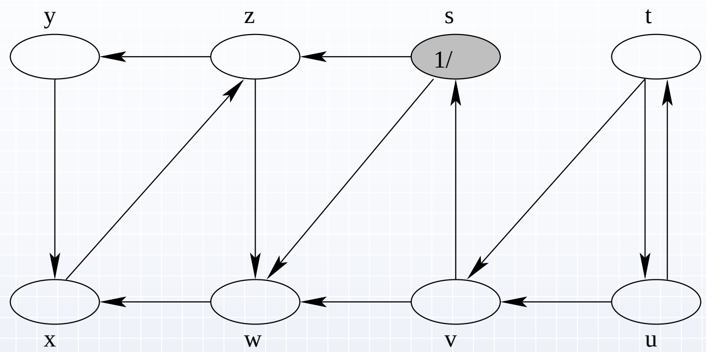
Estampas/rótulos

A busca em profundidade associa a cada vértice x dois rótulos:

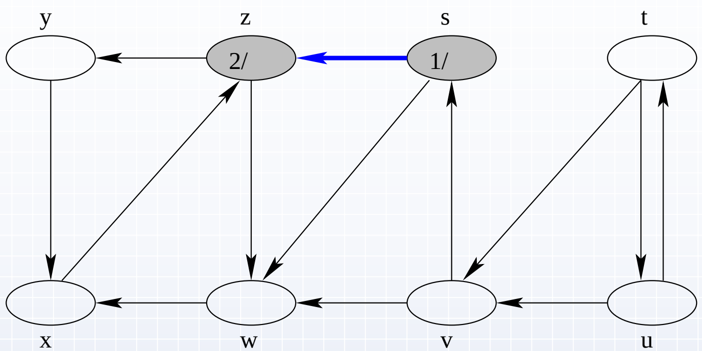
- $d[x]$: instante de descoberta de x.
  Neste instante x torna-se cinza.
- $f[x]$: instante de finalização de x.
  Neste instante x torna-se preto.

Os rótulos são inteiros entre 1 e $2|V|$.

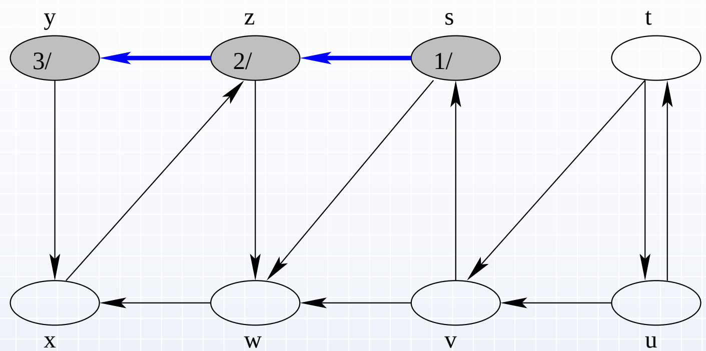
Exemplo DFS



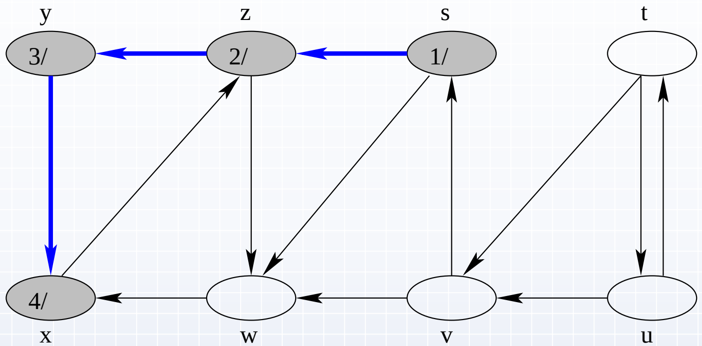
Exemplo DFS



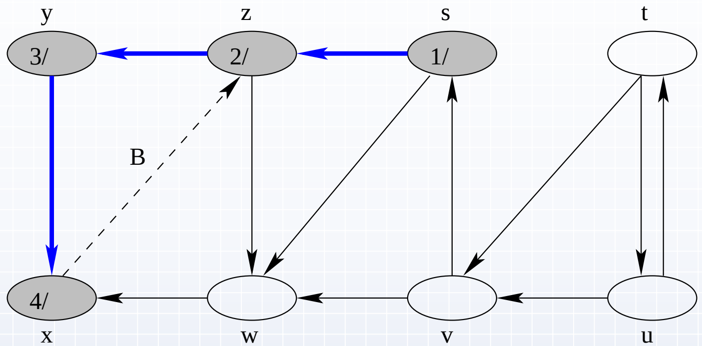
Exemplo DFS



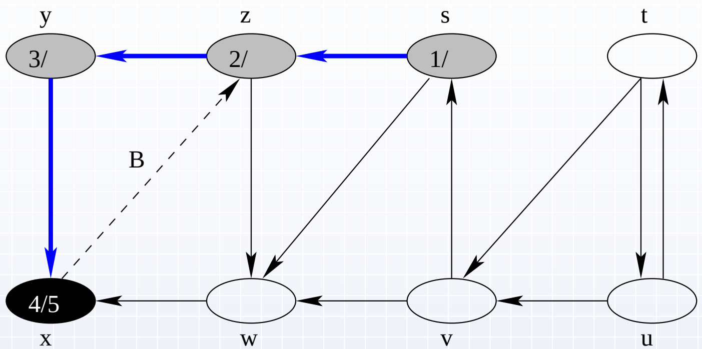
Exemplo DFS



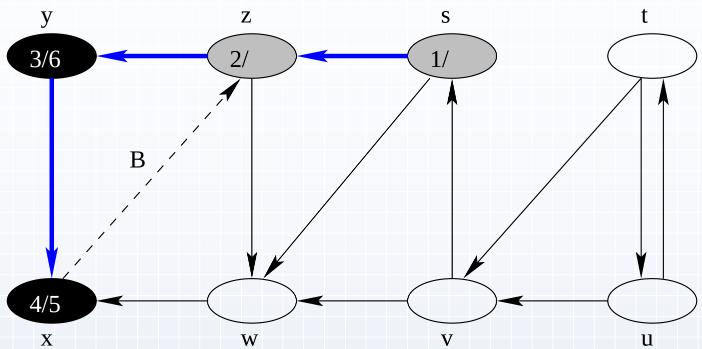
Exemplo DFS



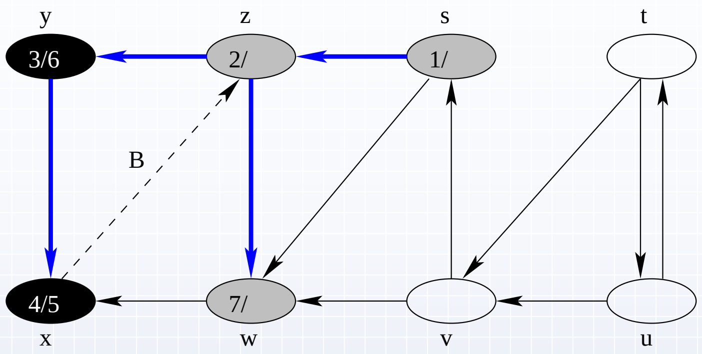
Exemplo DFS



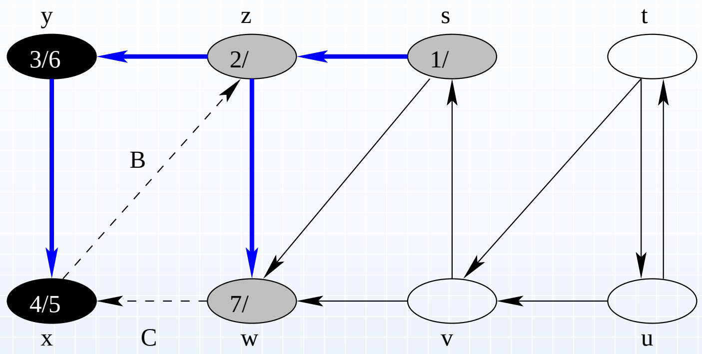
Exemplo DFS



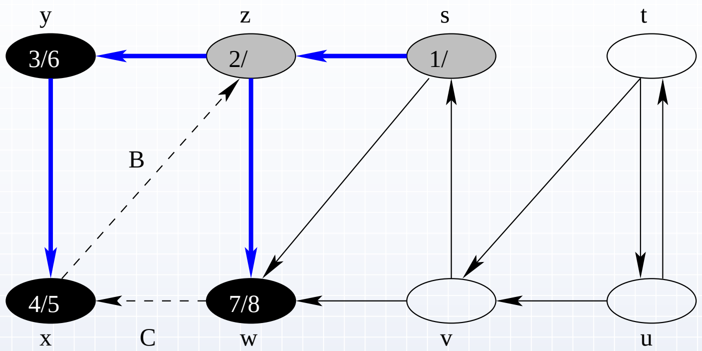
Exemplo DFS



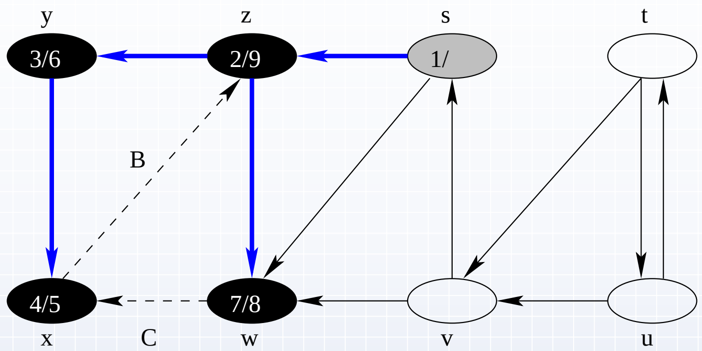
Exemplo DFS



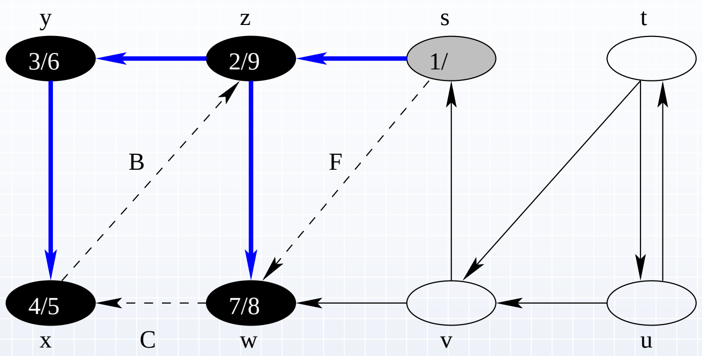
Exemplo DFS



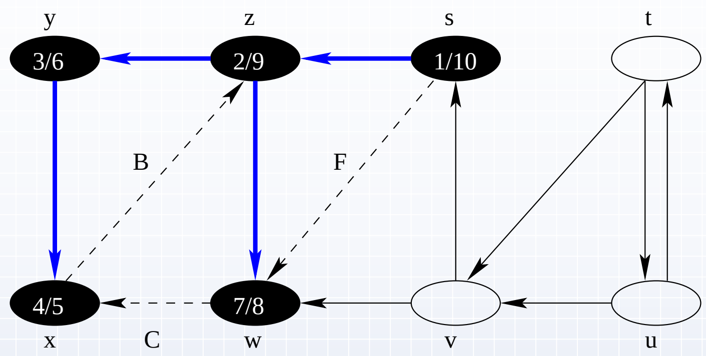
Exemplo DFS



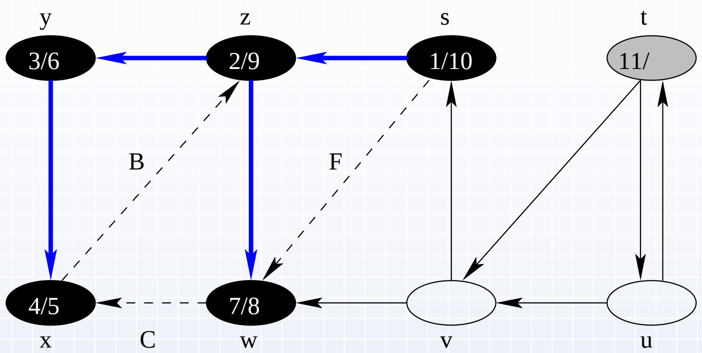
Exemplo DFS



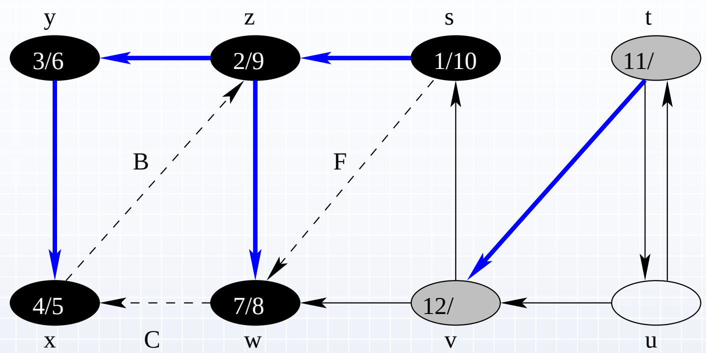
Exemplo DFS



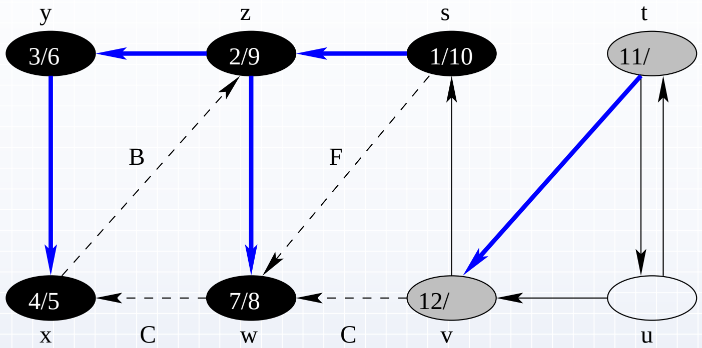
Exemplo DFS



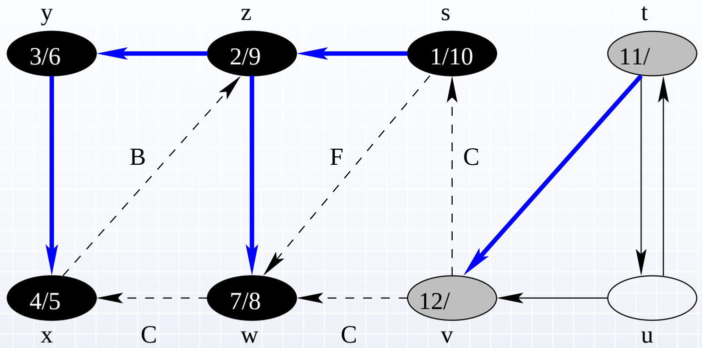
Exemplo DFS



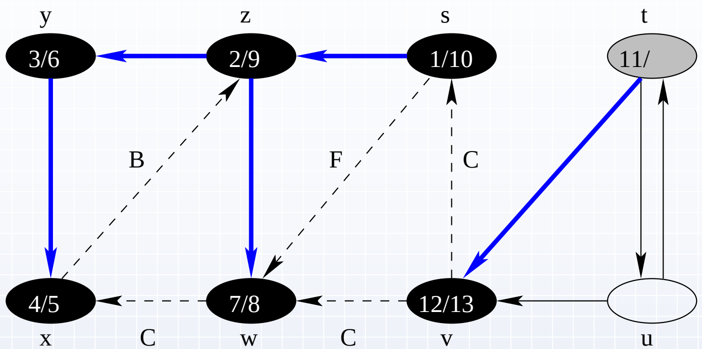
Exemplo DFS



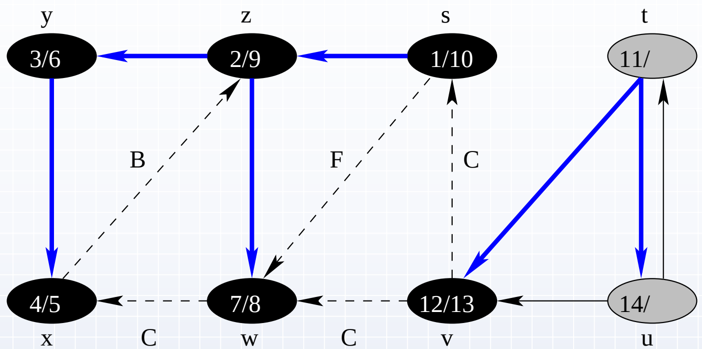
Exemplo DFS



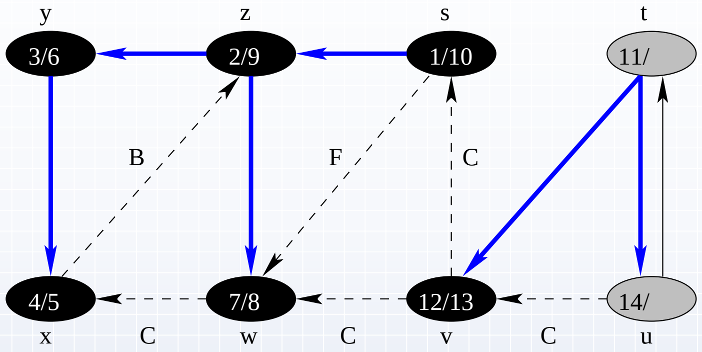
Exemplo DFS



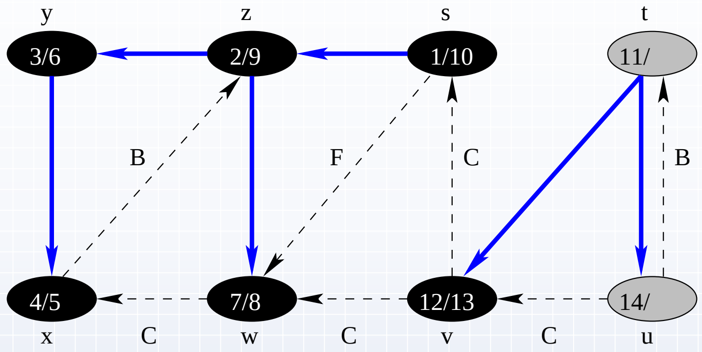
Exemplo DFS



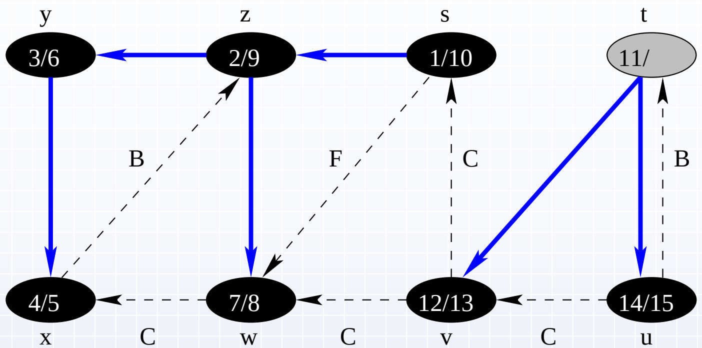
Exemplo DFS



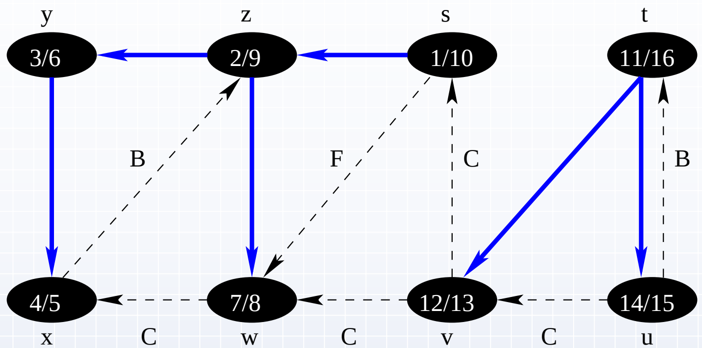
Exemplo DFS



Exemplo DFS



Exemplo DFS



Rótulos versus cores

Para todo $x \in V[G]$ vale que $d[x] < f[x]$.

Além disso

- x é branco antes do instante $d[x]$.
- x é cinza entre os instantes $d[x]$ e $f[x]$.
- x é preto após o instante $f[x]$.

Algoritmo DFS

Recebe um grafo G (na forma de listas de adjacências) e devolve
(i) os instantes $d[v], f[v]$ para cada $v \in V[G]$ e
(ii) uma Floresta de Busca em Profundidade.

$\mathrm{DFS}(G)$
para cada $u \in V[G]$ **faça**
    $\mathrm{cor}[u] \leftarrow \mathrm{branco}$
    $\pi[u] \leftarrow \mathrm{NIL}$
$\mathrm{tempo} \leftarrow 0$
para cada $u \in V[G]$ **faça**
    se $\mathrm{cor}[u] = \mathrm{branco}$
        então $\mathrm{DFS\text{-}VISIT}(u)$

Algoritmo DFS-Visit

Constrói recursivamente uma Árvore de Busca em Profundidade com raiz u.

$\mathrm{DFS\text{-}VISIT}(u)$
$\mathrm{cor}[u] \leftarrow \mathrm{cinza}$
$\mathrm{tempo} \leftarrow \mathrm{tempo} + 1$
$d[u] \leftarrow \mathrm{tempo}$
para cada $v \in \mathrm{Adj}[u]$ **faça**
    se $\mathrm{cor}[v] = \mathrm{branco}$
        então $\pi[v] \leftarrow u$
                $\mathrm{DFS\text{-}VISIT}(v)$
$\mathrm{cor}[u] \leftarrow \mathrm{preto}$
$f[u] \leftarrow \mathrm{tempo} \leftarrow \mathrm{tempo} + 1$

Algoritmo DFS

$\mathrm{DFS}(G)$
para cada $u \in V[G]$ **faça**
    $\mathrm{cor}[u] \leftarrow \mathrm{branco}$
    $\pi[u] \leftarrow \mathrm{NIL}$
$\mathrm{tempo} \leftarrow 0$
para cada $u \in V[G]$ **faça**
    se $\mathrm{cor}[u] = \mathrm{branco}$
        então $\mathrm{DFS\text{-}VISIT}(u)$

Consumo de tempo

$O(V) + V$ chamadas a $\mathrm{DFS\text{-}VISIT}()$.

Algoritmo DFS-Visit

DFS-VISIT(u)
1 $\text{cor}[u] \leftarrow \text{cinza}$
2 $\text{tempo} \leftarrow \text{tempo} + 1$
3 $d[u] \leftarrow \text{tempo}$
4 **para cada** $v \in \text{Adj}[u]$ **faça**
5 **se** $\text{cor}[v] = \text{branco}$
6 **então** $\pi[v] \leftarrow u$
7 DFS-VISIT(v)
8 $\text{cor}[u] \leftarrow \text{preto}$
9 $f[u] \leftarrow \text{tempo} \leftarrow \text{tempo} + 1$

Consumo de tempo
linhas 4-7: executado $|\text{Adj}[u]|$ vezes.

Complexidade de DFS

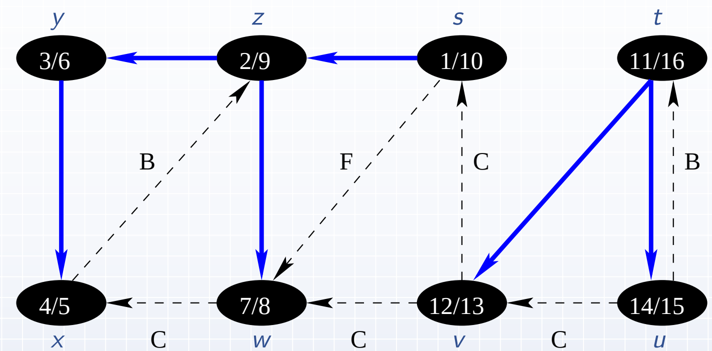
- DFS-VISIT(v) é executado exatamente uma vez para cada $v \in V$.
- Em uma execução de DFS-VISIT(v), o laço das linhas 4-7 é executado $|\text{Adj}[u]|$ vezes.
  Assim, o custo total de todas as chamadas é
  $\sum_{v \in V} |\text{Adj}(v)| = \Theta(E)$.

Conclusão: A complexidade de tempo de DFS é $O(V + E)$.

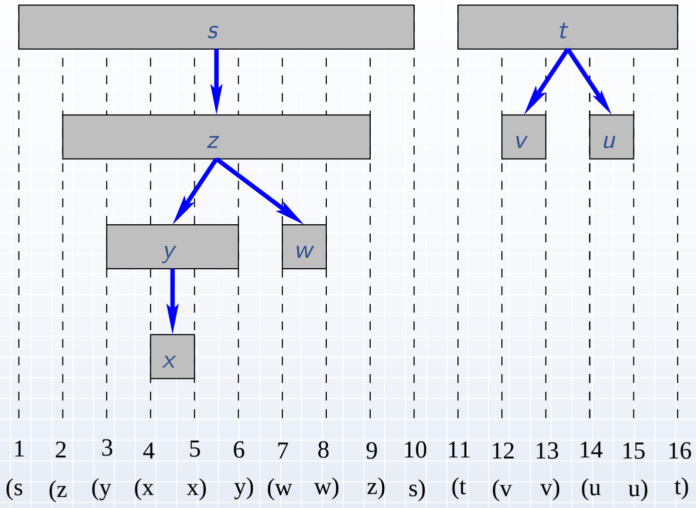
Estrutura de parênteses

- Os rótulos $d[x], f[x]$ têm propriedades muito úteis para serem usadas em outros algoritmos.
- Eles refletem a ordem em que a busca em profundidade foi executada.
- Eles fornecem informação de como é a "cara" (estrutura) do grafo.

Estrutura de parênteses



Estrutura de parênteses



Estrutura de parênteses

Teorema (Teorema dos Parênteses)

Em uma busca em profundidade sobre um grafo $G = (V, E)$, para quaisquer vértices u e v, ocorre exatamente uma das situações abaixo:

- $[d[u], f[u]]$ e $[d[v], f[v]]$ são disjuntos e nenhum é descendente do outro na Floresta de BP.
- $[d[u], f[u]]$ está contido em $[d[v], f[v]]$ e u é descendente de v em uma Árvore de BP.
- $[d[v], f[v]]$ está contido em $[d[u], f[u]]$ e v é descendente de u em uma Árvore de BP.

Estrutura de parênteses

Prova (rascunho). Podemos supor que $d[u] < d[v]$. Temos dois casos:

- $d[v] < f[u]$: v foi descoberto enquanto u era cinza. Logo, v é descendente de u. Além disso, as arestas que saem de v são exploradas e v é finalizado ($\mathrm{cor}[v] = \mathrm{preto}$) antes da busca voltar a u. Logo, o intervalo $[d[v], f[v]]$ está contido em $[d[u], f[u]]$.
- $f[u] < d[v]$: u é finalizado antes de v ser descoberto. Logo,

$$d[u] < f[u] < d[v] < f[v]$$

e os intervalos $[d[u], f[u]]$ e $[d[v], f[v]]$ são disjuntos. Neste caso, nenhum desses vértices foi descoberto enquanto o outro estava cinza, e assim, nenhum é descendente do outro na Floresta de BP.

Estrutura de parênteses

Corolário. (Intervalos encaixantes para descendentes)

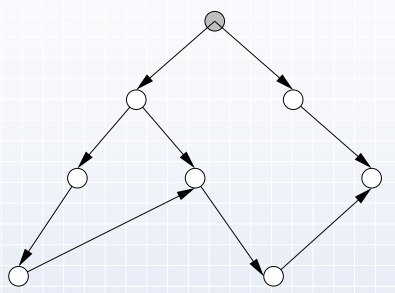
Um vértice v é um descendente próprio de u na Floresta de BP se e somente se $d[u] < d[v] < f[v] < f[u]$.

Equivalentemente, v é um descendente próprio de u se e somente se $[d[v], f[v]]$ está contido em $[d[u], f[u]]$.

Teorema do Caminho Branco

Teorema. (Teorema do Caminho Branco)

Em uma Floresta de BP, um vértice v é descendente de u se e somente se no instante $d[u]$ (quando u foi descoberto), existia um caminho de u a v formado apenas por vértices brancos (com exceção de u).



Teorema do Caminho Branco

Prova (rascunho).
$\Rightarrow$: Se $u = v$ então o resultado é óbvio. Suponha que v é um descendente próprio de u na Floresta de BP. Como $d[u] < d[v]$, v ainda é branco no instante $d[u]$. Neste instante, o caminho de u a v na floresta é branco (com exceção de u).

Teorema do Caminho Branco

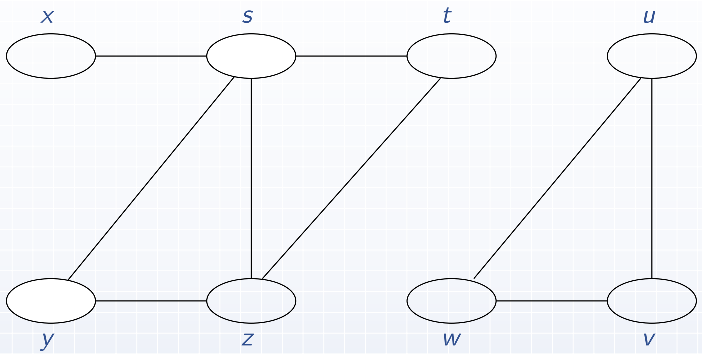
$\Leftarrow$: Suponha que no instante $d[u]$ existe um caminho branco de u a v (com exceção de u). Suponha por contradição que v não se torna descendente de u na Floresta de BP. Podemos supor que todos os vértices que precedem v tornam-se descendentes de u. Seja w o vértice que antecede imediatamente v nesse caminho. Assim, $f[w] \leq f[u]$. Como v é descoberto depois de u, mas antes de w ser finalizado, temos

$$d[u] < d[v] < f[w] < f[u].$$

Logo, o intervalo $[d[v], f[v]]$ está contido em $[d[u], f[u]]$ e v é descendente de u, uma contradição.

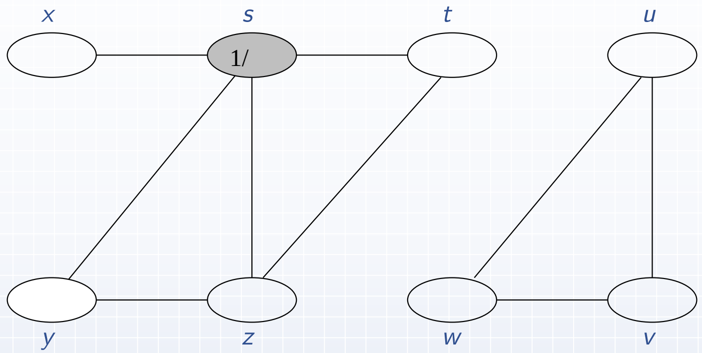
Componentes Conexos

Aplicação: componentes conexos

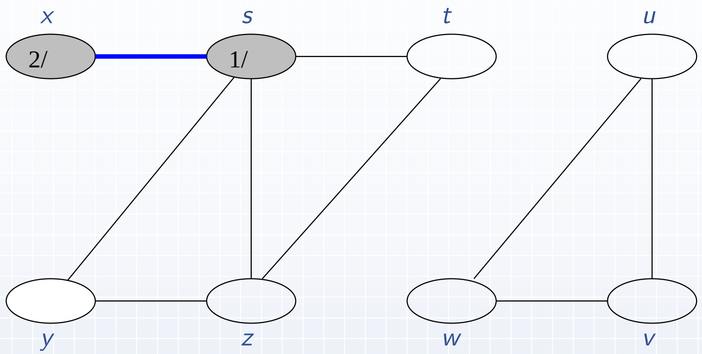


Problema: determinar os componentes conexos de um grafo.

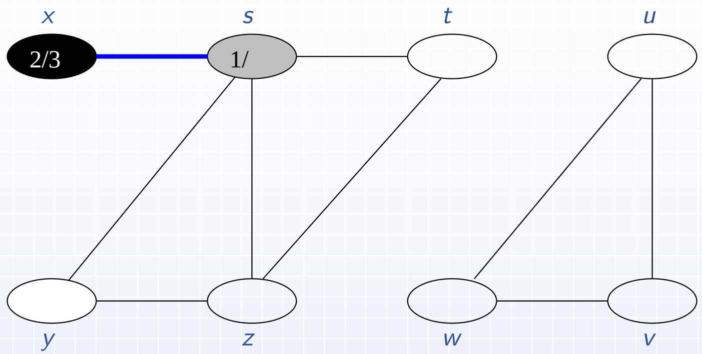
Aplicação: componentes conexos



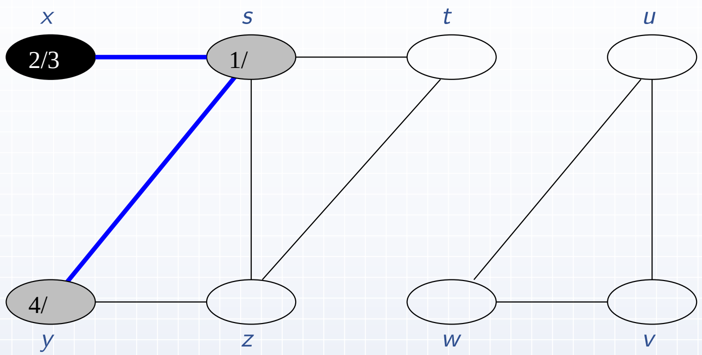
Aplicação: componentes conexos



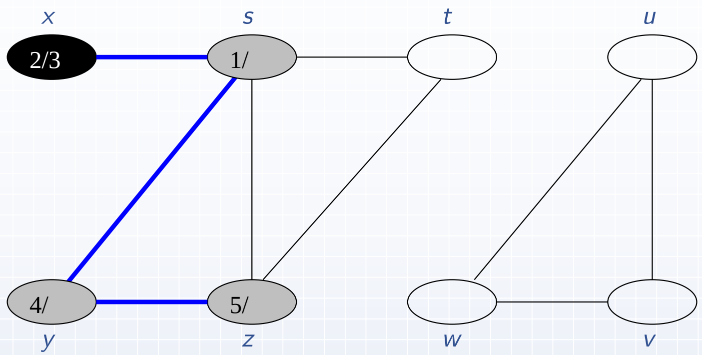
Aplicação: componentes conexos



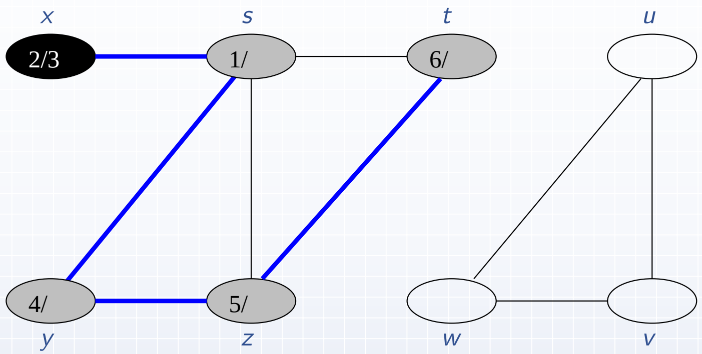
Aplicação: componentes conexos



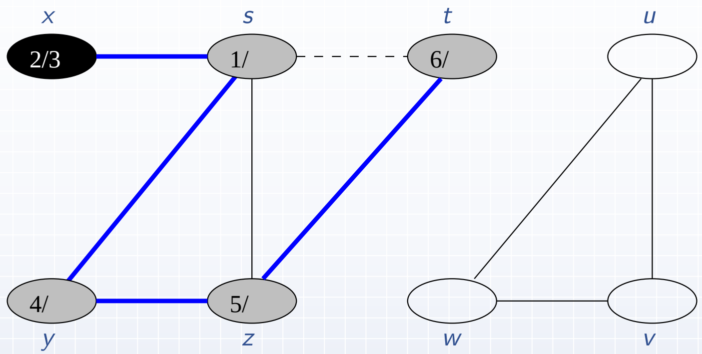
Aplicação: componentes conexos



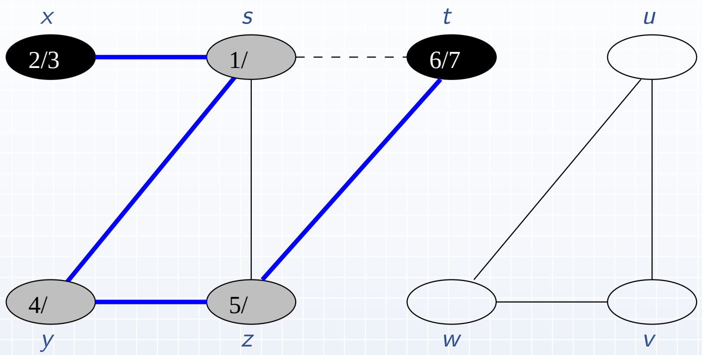
Aplicação: componentes conexos



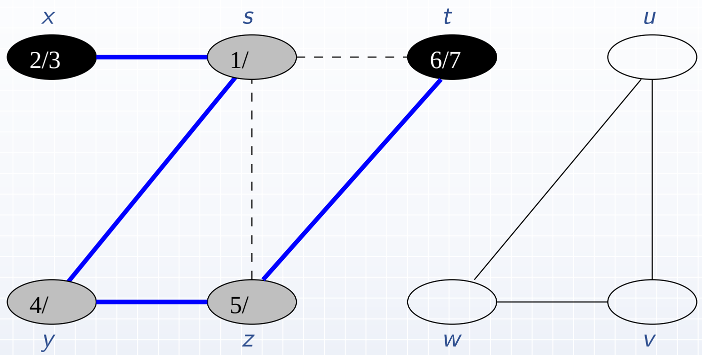
Aplicação: componentes conexos



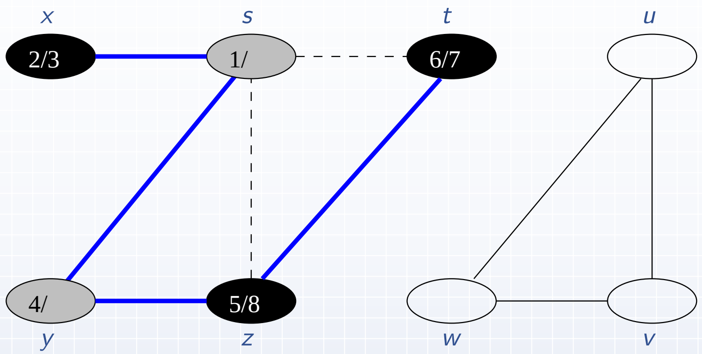
Aplicação: componentes conexos



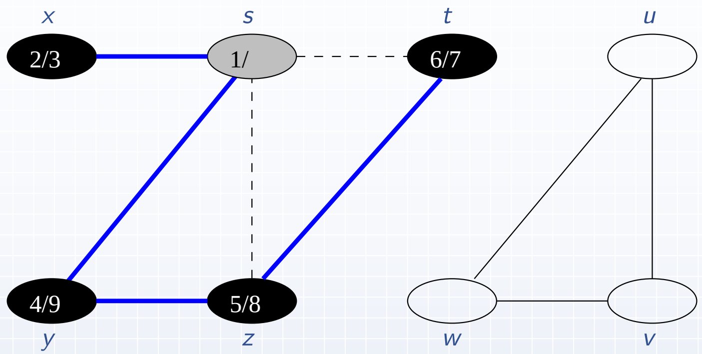
Aplicação: componentes conexos



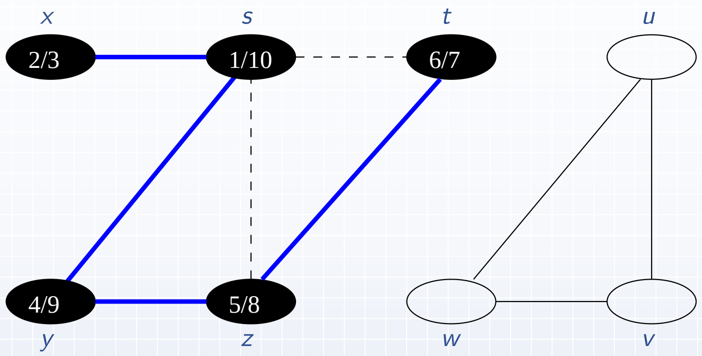
Aplicação: componentes conexos



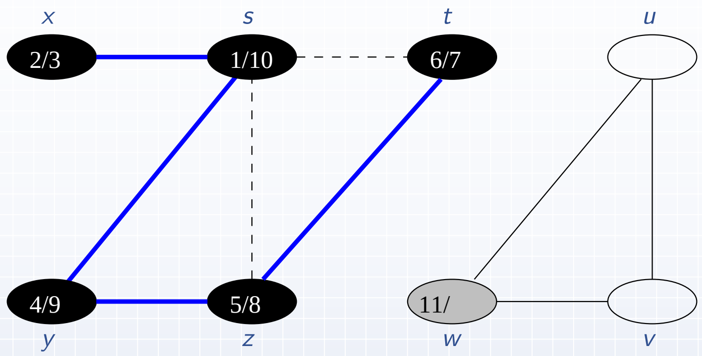
Aplicação: componentes conexos



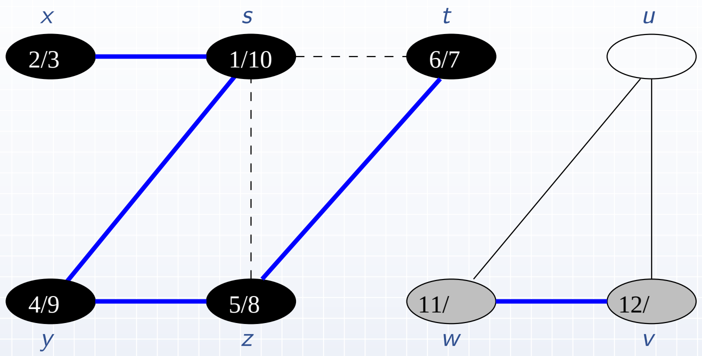
Aplicação: componentes conexos



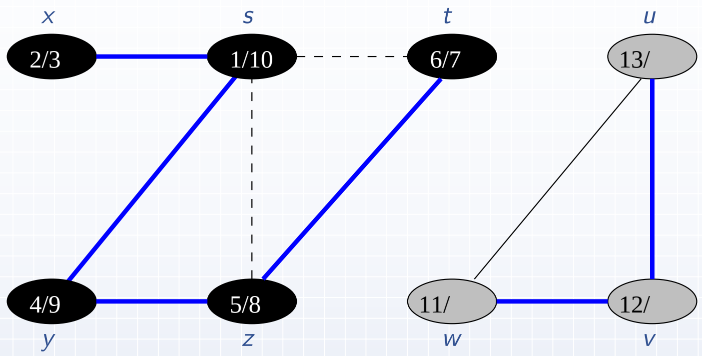
Aplicação: componentes conexos



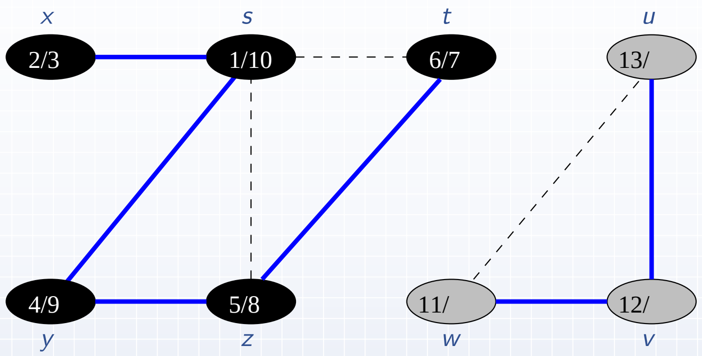
Aplicação: componentes conexos



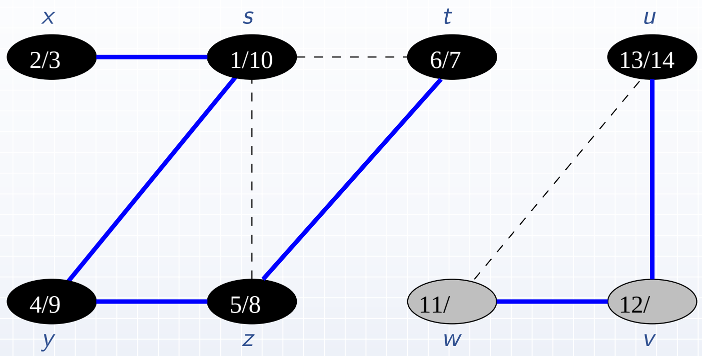
Aplicação: componentes conexos



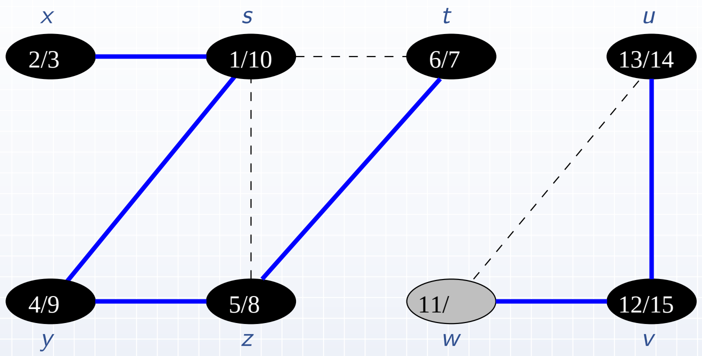
Aplicação: componentes conexos



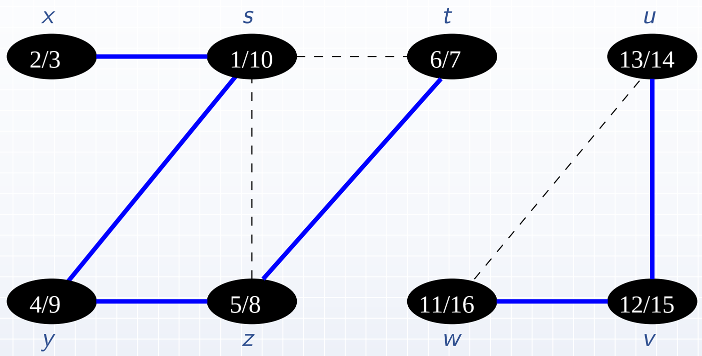
Aplicação: componentes conexos



Aplicação: componentes conexos



Aplicação: componentes conexos



Componentes conexos

O número de componentes é o **número de vezes** que DFS-VISIT(u) é chamado em DFS!

```
DFS(G)
para cada u ∈ V[G] faça
    cor[u] ← branco
    π[u] ← NIL
tempo ← 0
para cada u ∈ V[G] faça
    se cor[u] = branco
        então DFS-VISIT(u)
```


Componentes conexos

Vamos modificar DFS de modo que:

- determine o número de componentes conexos (ncomps) de G e os componentes sejam enumerados por $1, 2, \ldots, \text{ncomps}$, e
- para cada vértice v determinamos a qual componente ele pertence e guardamos em comp[v].

Componentes conexos

```
DFS(G)
para cada u ∈ V[G] faça
    cor[u] ← branco
    π[u] ← NIL
tempo ← 0, ncomps ← 0
para cada u ∈ V[G] faça
    se cor[u] = branco
        então ncomps ← ncomps + 1
        DFS-VISIT(u)
```


Componentes conexos

```
DFS-VISIT(u)
cor[u] ← cinza
tempo ← tempo + 1
d[u] ← tempo
para cada v ∈ Adj[u] faça
    se cor[v] = branco
        então π[v] ← u
              DFS-VISIT(v)
cor[u] ← preto
f[u] ← tempo ← tempo + 1
comp[u] ← ncomps;
```

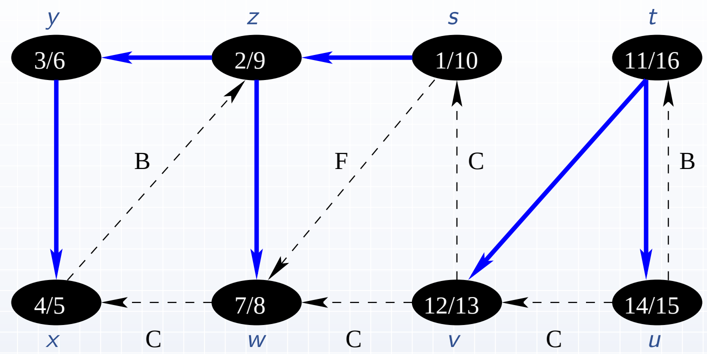
Classificação de arestas

Busca em profundidade pode ser usada para classificar arestas de um grafo $G = (V, E)$.

Ela classifica as arestas em quatro tipos:

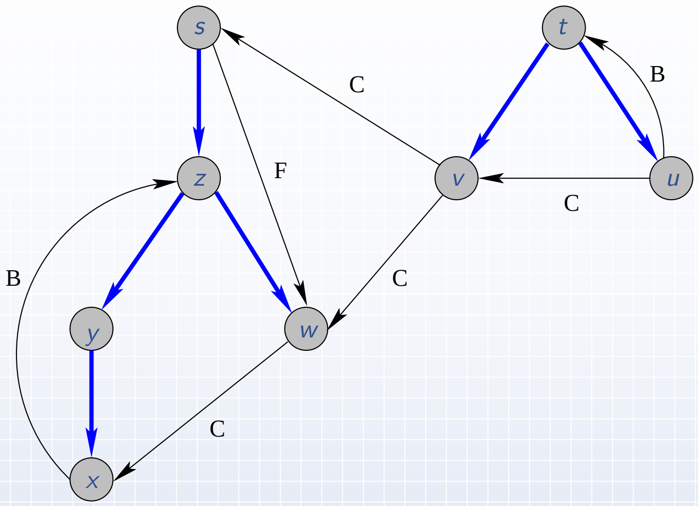
- Arestas da árvore (tree edges): arestas que pertencem à Floresta de BP.
- Arestas de retorno (backward edges): arestas (u, v) ligando um vértice u a um ancestral v na Árvore de BP.
- Arestas de avanço (forward edges): arestas (u, v) ligando um vértice u a um descendente próprio v na Árvore de BP.
- Arestas de cruzamento (cross edges): todas as outras arestas.

Classificação de arestas



É fácil modificar o algoritmo $\mathrm{DFS}(G)$ para que ele também classifique as arestas de G. (Exercício)

Classificação de arestas



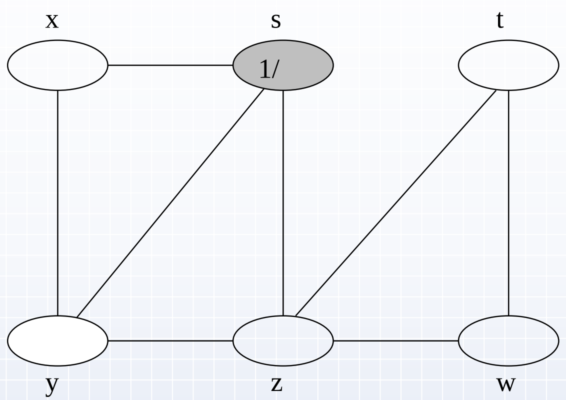
Grafos não direcionados

Em grafos não direcionados (u, v) e (v, u) indicam a mesma aresta. A sua classificação depende de quem foi visitado primeiro: u ou v.

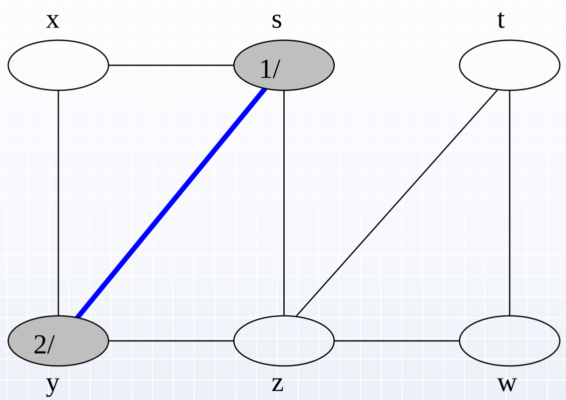
Para grafos não direcionados, existem apenas dois tipos de arestas.

Teorema.
Em uma busca em profundidade sobre um grafo não direcionado G, cada aresta de G ou é aresta da árvore ou é aresta de retorno.

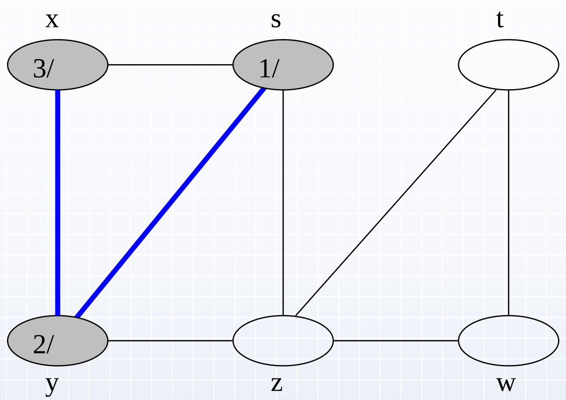
Exemplo



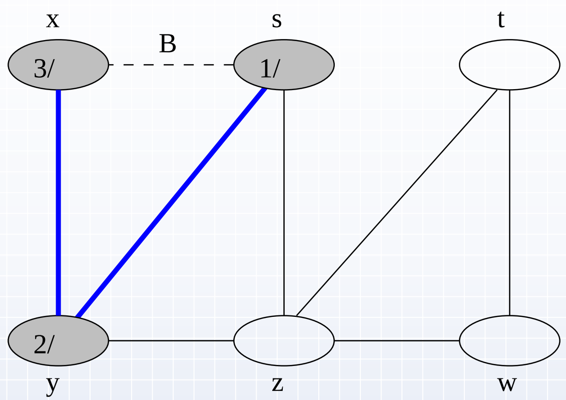
Exemplo



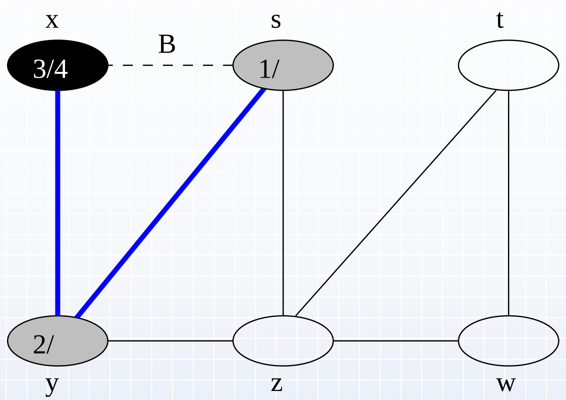
Exemplo



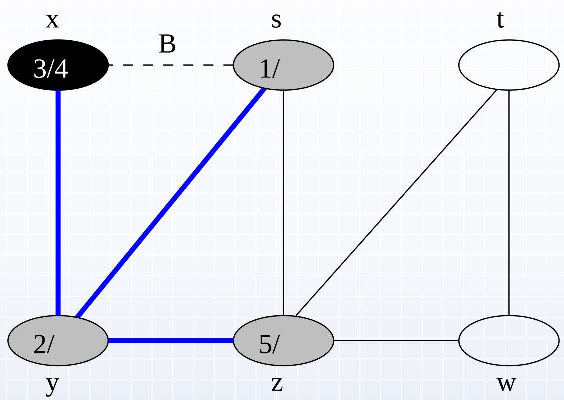
Exemplo



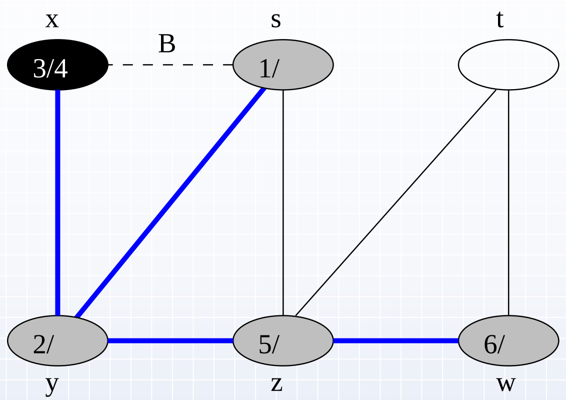
Exemplo



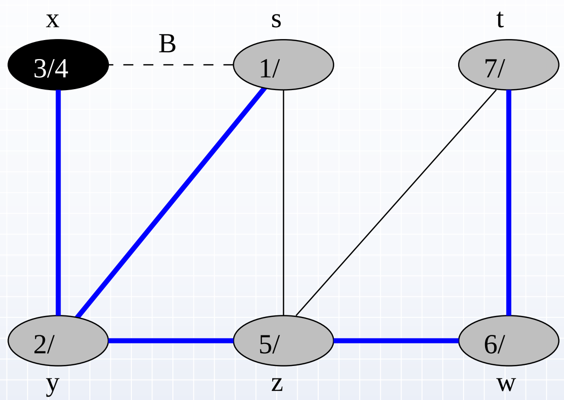
Exemplo



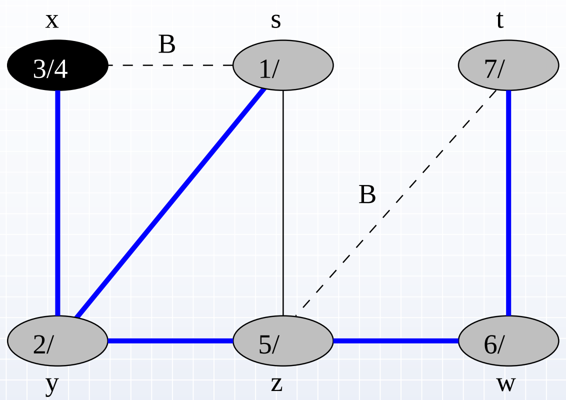
Exemplo



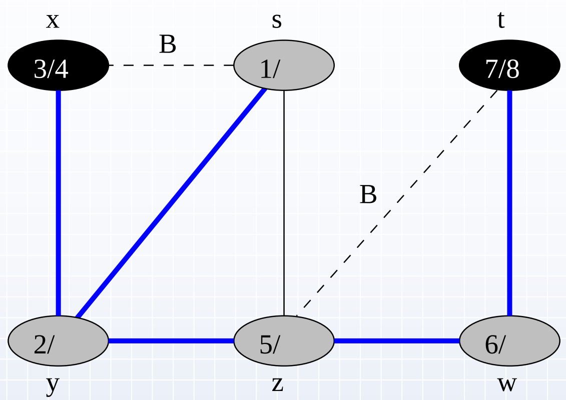
Exemplo



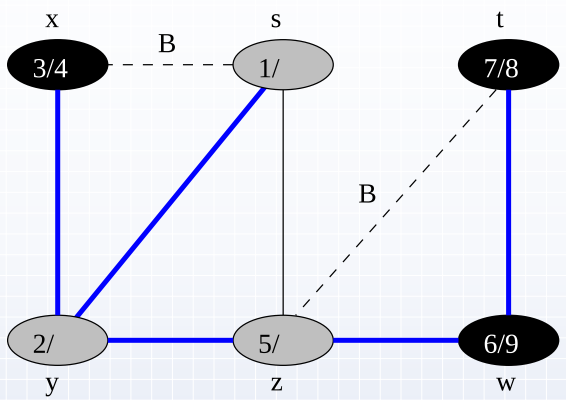
Exemplo



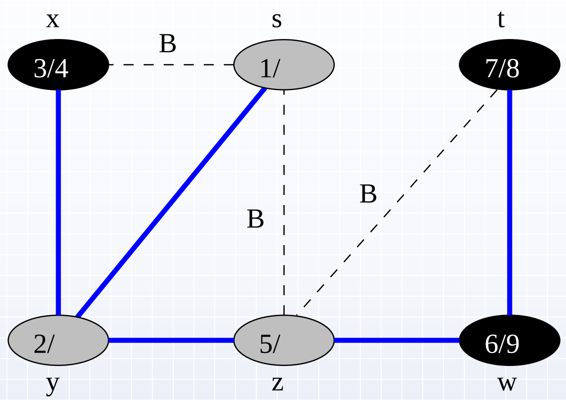
Exemplo



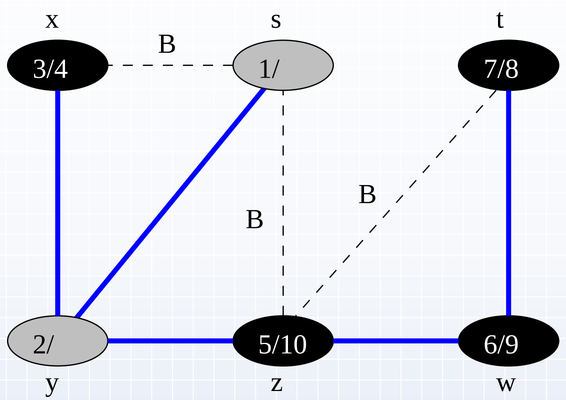
Exemplo



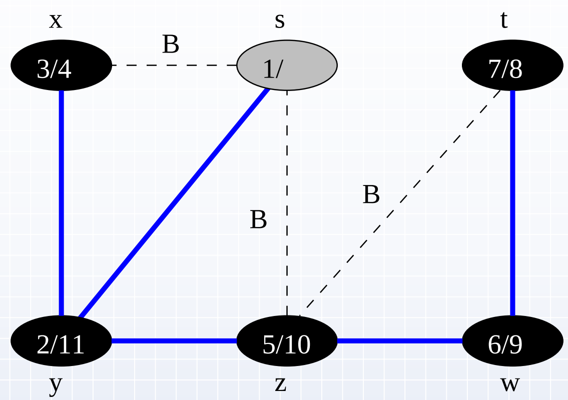
Exemplo



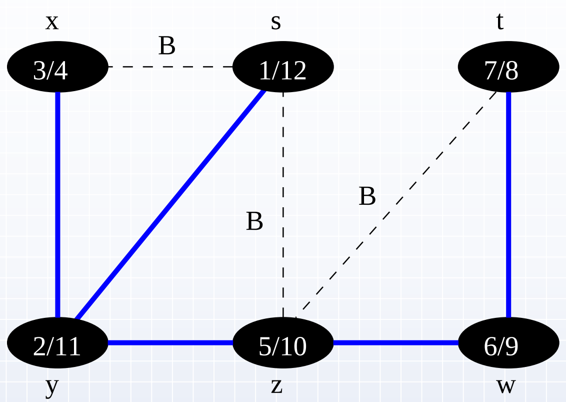
Exemplo



Exemplo



Exemplo

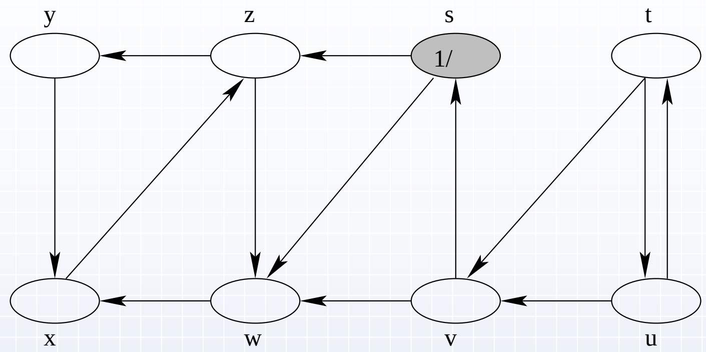


Ordenação Topológica

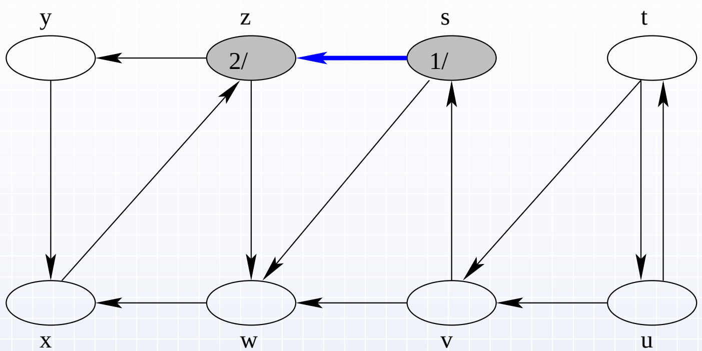
Antes de começar

Vamos rever o nosso exemplo de busca em profundidade em um grafo direcionado.

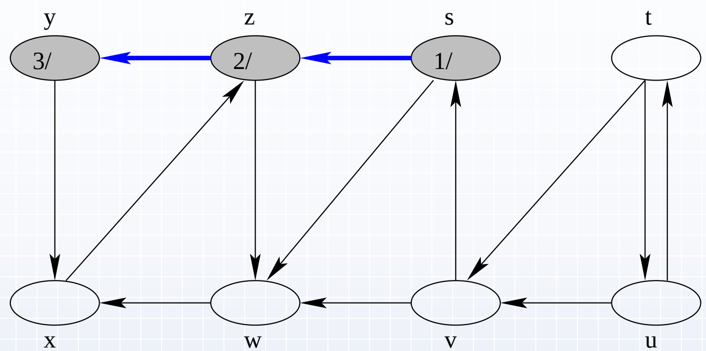
Exemplo DFS



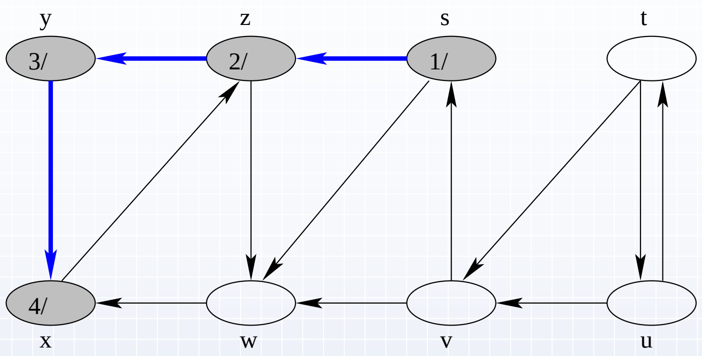
Exemplo DFS



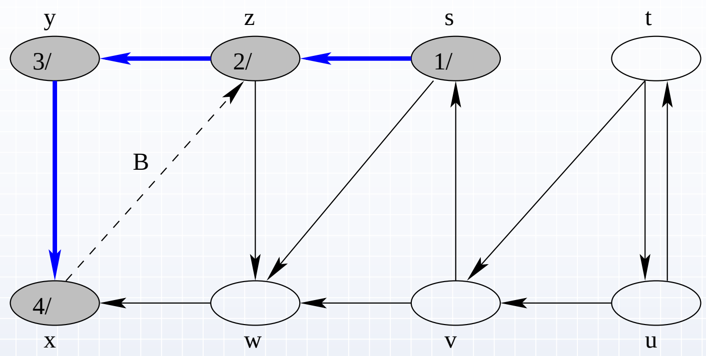
Exemplo DFS



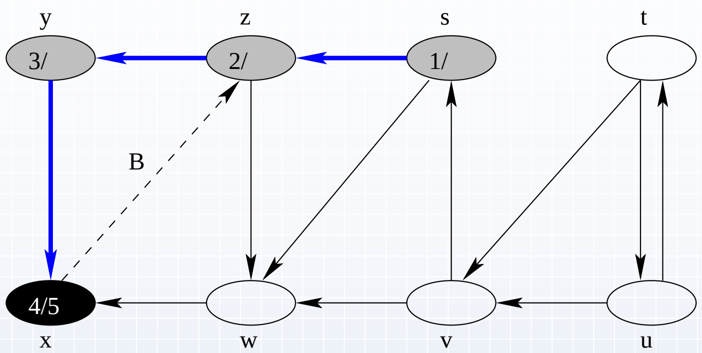
Exemplo DFS



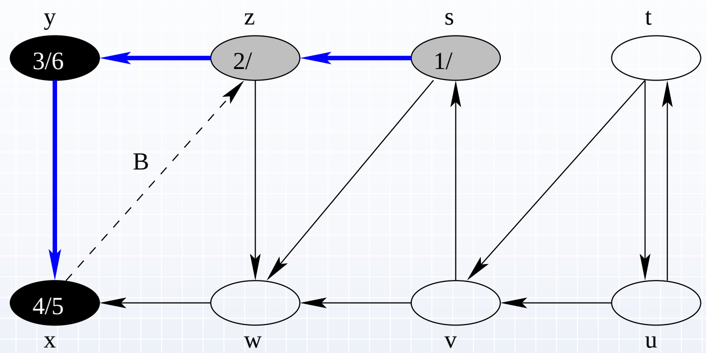
Exemplo DFS



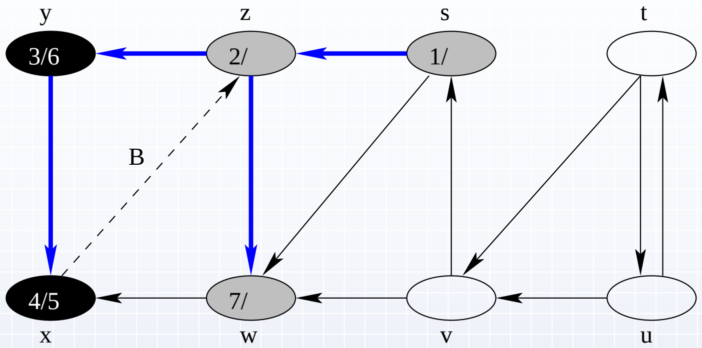
Exemplo DFS



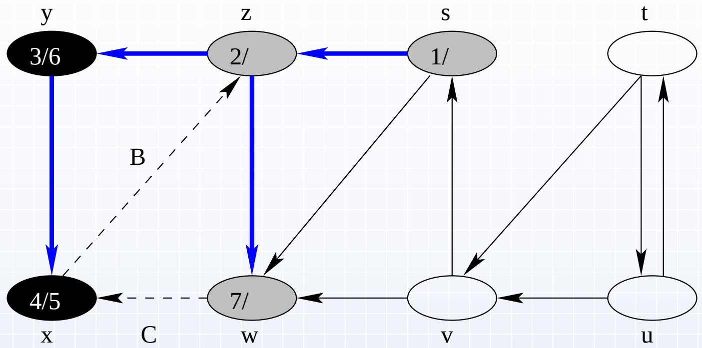
Exemplo DFS



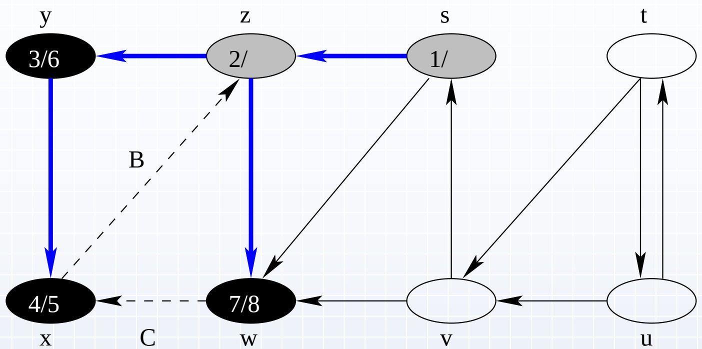
Exemplo DFS



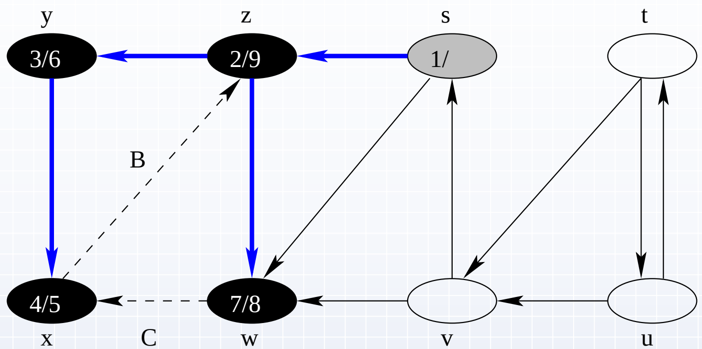
Exemplo DFS



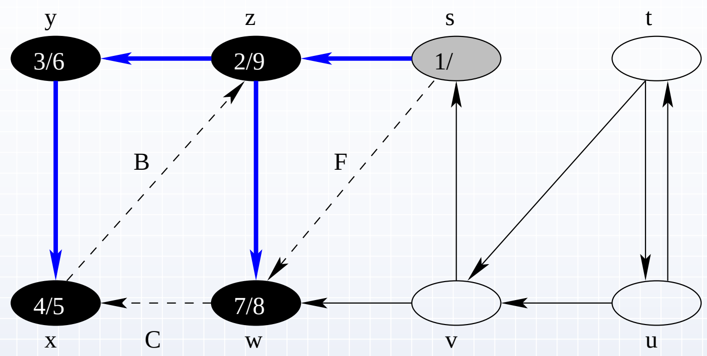
Exemplo DFS



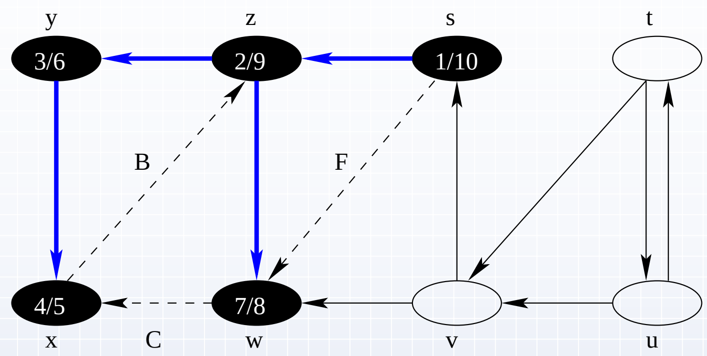
Exemplo DFS



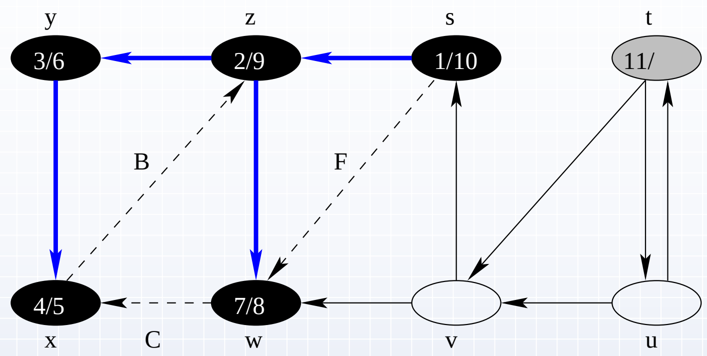
Exemplo DFS



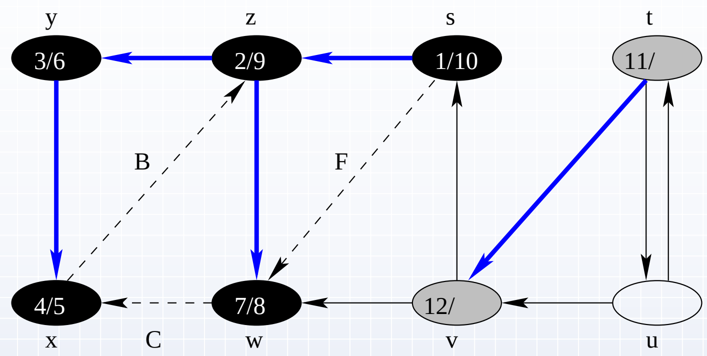
Exemplo DFS



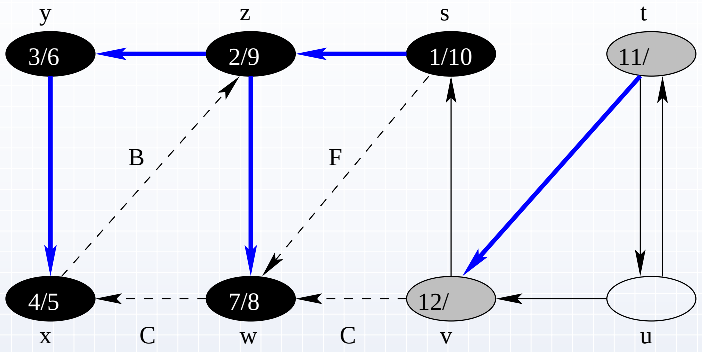
Exemplo DFS



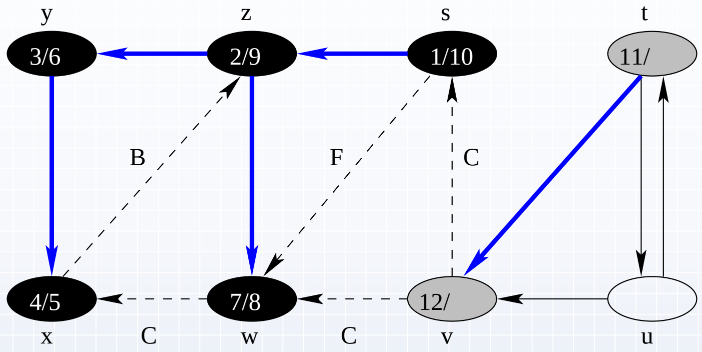
Exemplo DFS



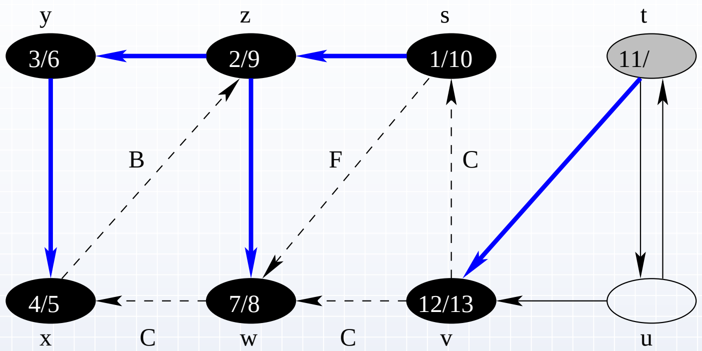
Exemplo DFS



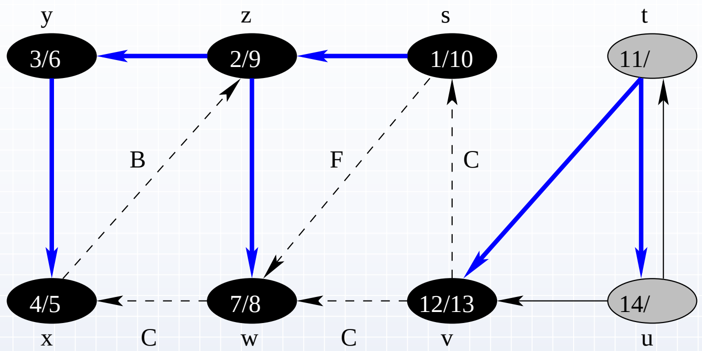
Exemplo DFS



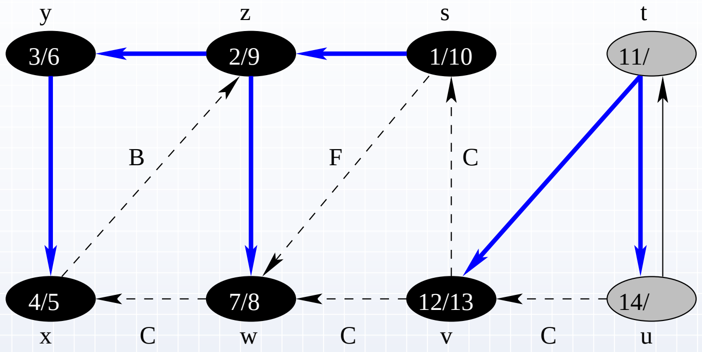
Exemplo DFS



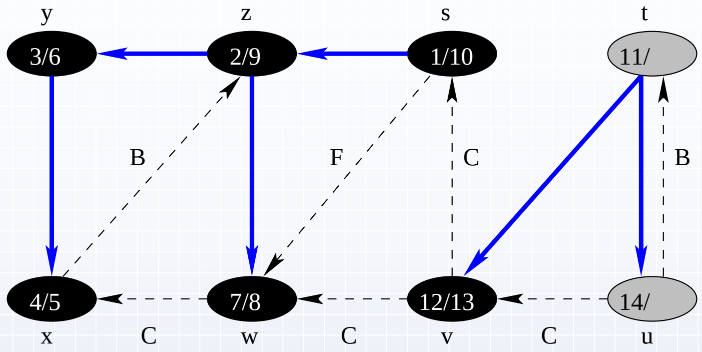
Exemplo DFS



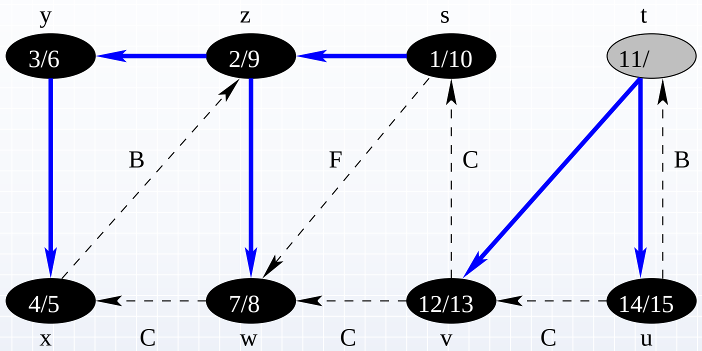
Exemplo DFS



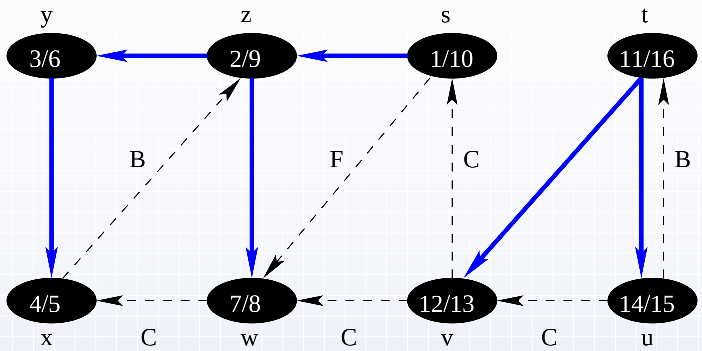
Exemplo DFS



Exemplo DFS



Exemplo DFS

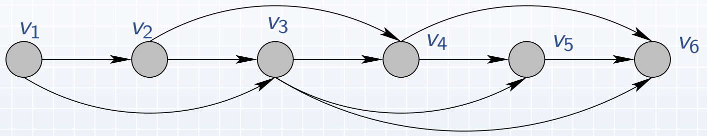


Ordenação Topológica

Uma ordenação topológica de um grafo direcionado $G = (V, E)$ é um arranjo linear dos vértices de G

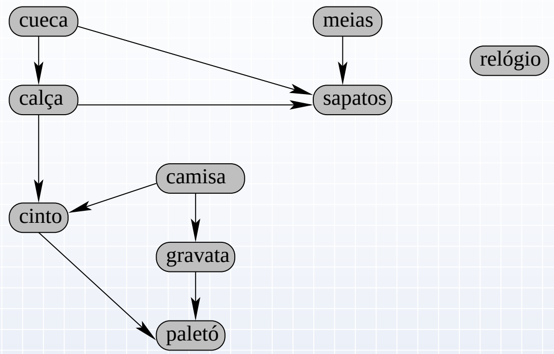
$v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{n-2}, v_{n-1}, v_n$

tal que se (v_i, v_j) é uma aresta de G, então $i < j$.

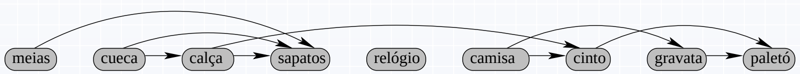


Ordenação Topológica

Ordenação topológica é usada em aplicações onde eventos ou tarefas têm precedência sobre outras.

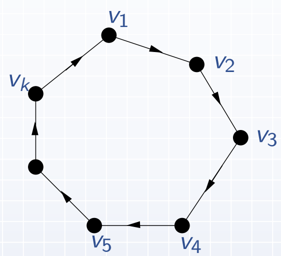


Ordenação Topológica



Ordenação Topológica

- Nem todo grafo direcionado possui uma ordenação topológica. Por exemplo, um ciclo direcionado não possui uma ordenação topológica.



- Um grafo direcionado $G = (V, E)$ é acíclico se **não** contém um ciclo direcionado.

Grafo Direcionado Acíclico

Teorema. Um grafo direcionado G é acíclico se e somente se possui uma ordenação topológica.

Prova.

Obviamente, se G possui uma ordenação topológica então G é acíclico.

Vamos mostrar a recíproca.

Definição

Uma fonte é um vértice com grau de entrada igual a zero.
Um sorvedouro é um vértice com grau de saída igual a zero.

Grafo Direcionado Acíclico

Lema. Todo grafo direcionado acíclico G possui uma fonte e um sorvedouro.

Prova. Seja P um caminho mais longo em G e sejam s o início e t o término de P. Claramente, s é uma fonte e t é um sorvedouro. ■

Agora para terminar a prova do teorema, usamos indução em $n := |V|$ para mostrar que todo grafo acíclico $G = (V, E)$ possui uma ordenação topológica.

Grafo Direcionado Acíclico

Base: se $n = 1$ então a sequência v_1 é uma ordenação topológica de G onde $V = \{v_1\}$.

Hipótese de indução: suponha que todo grafo acíclico com menos de n vértices possui uma ordenação topológica.

Passo de indução: pelo Lema acima, G possui um sorvedouro v_n. O grafo $G - v_n$ é acíclico e pela HI possui uma ordenação topológica $v_1, \ldots, v_{n-1}$.

Logo,

$v_1, v_2, \ldots, v_n$

é uma ordenação topológica de G.

Grafo Direcionado Acíclico

Baseado na prova anterior, pode-se projetar por indução um algoritmo para obter uma ordenação topológica de um grafo direcionado acíclico G.

- Encontre um sorvedouro v_n de G.
- Recursivamente encontre uma ordenação topológica $v_1, \ldots, v_{n-1}$ de $G - v_n$.
- Devolva $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Complexidade: $O(V^2)$ (análise grosseira)
Em cada nível da recursão gasta-se $O(V)$ para encontrar um sorvedouro. Como há $|V|$ níveis, a complexidade do algoritmo é $O(V^2)$.

Pode-se fazer melhor: O(V+E) (CLRS 22.4-5)

Algoritmo baseado em DFS

Vamos projetar um algoritmo linear (i.e. $O(V+E)$) para encontrar uma ordenação topológica de um grafo acíclico $G=(V,E)$.

Ideia: considere o primeiro vértice u que foi **finalizado** (i.e. recebeu cor preta) em uma busca em profundidade de G. Suponha que existe alguma aresta (u,v) saindo de u (ou seja, $v \in \mathrm{Adj}[u]$).

Como u é o primeiro vértice a ser finalizado, então v já foi visitado (tem cor cinza). Pela propriedade da busca em profundidade, todos os vértices cinzas estão numa árvore e portanto v é um ancestral de u. Mas isto significa que existe um ciclo direcionado formado pelo caminho na árvore de v a u e pela aresta (u,v), o que é uma contradição. Logo, v é um sorvedouro.

Algoritmo baseado em DFS

Continuando a busca, toda vez que vértice é finalizado, este só pode ser adjacente a vértices **finalizados** (cor preta) anteriormente.

Logo, se colocarmos os vértices em ordem decrescente de tempo de finalização, obtemos uma ordenação topológica de G.

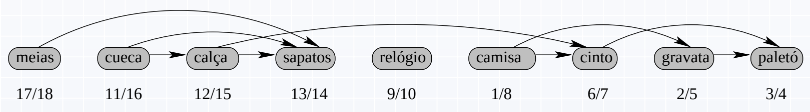
Algoritmo baseado em DFS

Recebe um grafo direcionado acíclico G e devolve uma ordenação topológica de G.

TOPOLOGICAL-SORT(G)
1 Execute DFS(G) para calcular $f[u]$ para cada vértice u
2 À medida que cada vértice for finalizado, coloque-o no início de uma lista ligada
3 Devolva a lista ligada resultante

Outro modo de ver a linha 2 é:
Imprima os vértices em ordem decrescente de $f[v]$.

Exemplo



Complexidade de tempo

TOPOLOGICAL-SORT(G)

Execute DFS(G) para calcular $f[u]$ para cada vértice u
À medida que cada vértice for finalizado, coloque-o no início de uma lista ligada
Devolva a lista ligada resultante

A execução de DFS(G) consome tempo $O(V+E)$. Além disso, uma inserção na lista ligada consome tempo $O(1)$ e há exatamente $|V|$ inserções.

Logo, a complexidade de tempo de TOPOLOGICAL-SORT é $O(V+E)$.

Agora falta mostrar que TOPOLOGICAL-SORT funciona.

Corretude

Lema.
Um grafo direcionado G é acíclico se e somente se em uma busca em profundidade de G não aparecem arestas de retorno.

Prova:

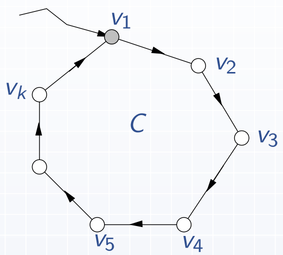
Suponha que (u, v) é uma aresta de retorno.

Então v é um ancestral de u na Floresta de BP.

Portanto, existe um caminho de v a u que juntamente com (u, v) forma um ciclo direcionado. Logo, G não é acíclico.

Corretude

Agora suponha que G contém um ciclo direcionado C.



Suponha que v_1 é o primeiro vértice de C a ser descoberto. Então no instante $d[v_1]$ existe um caminho branco de v_1 a v_k.
Pelo Teorema do Caminho Branco, v_k torna-se um descendente de v_1 e portanto, (v_k, v_1) torna-se uma aresta de retorno.

Corretude

Lembre que TOPOLOGICAL-SORT imprime os vértices em ordem decrescente de $f[\,]$.

Para mostrar que o algoritmo funciona, basta mostrar que se (u, v) é uma aresta de G, então $f[u] > f[v]$.

Considere o instante em que (u, v) é examinada.

Neste instante, v não pode ser cinza pois senão (u, v) seria uma aresta de retorno.

Logo, v é branco ou preto.

Corretude

- Se v é branco, então v é descendente de u e portanto $f[v] < f[u]$.
- Se v é preto, então v já foi finalizado e $f[v]$ foi definido. Por outro lado u ainda não foi finalizado. Logo, $f[v] < f[u]$.

Portanto, TOPOLOGICAL-SORT funciona corretamente.

Contagem de caminhos

Contagem de caminhos

Exercício (CLRS 22.4-2). Descreva um algoritmo linear que recebe um grafo direcionado acíclico G e vértices s, t e devolve o **número** de caminhos de s a t em G.

Note que só é preciso contar os caminhos, não exibi-los.

Para simplificar a apresentação, suporemos que o grafo **não possui arestas múltiplas**. Este caso pode ser tratado de modo similar e fica como exercício.

Contagem de caminhos

Ideia: combinar ordenação topológica e programação dinâmica

Seja G um grafo direcionado acíclico. Seja

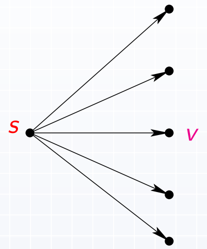
$$p(v) = \text{número de caminhos de } v \text{ a } t.$$

Queremos determinar $p(s)$.

Para isto queremos descobrir uma recorrência para $p(s)$ e de modo, mais geral uma recorrência para $p(v)$.

Contagem de caminhos

Considere $p(v)$ para cada $v \in \mathrm{Adj}[s]$.

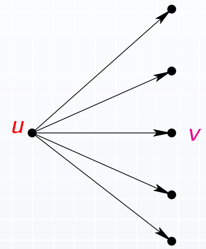


Qual é a relação entre $p(s)$ e estes valores?

$$p(s) = \sum_{v \in \mathrm{Adj}[s]} p(v).$$

Contagem de caminhos

O mesmo vale para qualquer vértice u (em vez de s).



$$p(u) = \sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} p(v).$$

Pergunta: esta *recorrência* vale se G contiver ciclos?

Contagem de caminhos

$$p(u) = \begin{cases} 0 & \text{se } u \text{ é um sorvedouro,} \\ \sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} p(v) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Se fixarmos uma ordenação topológica de G, então o valor $p(u)$ depende apenas de valores $p(v)$ onde v sucede u.

$$p(u) = \begin{cases} 1 & \text{se } u = t \\ 0 & \text{se } u \text{ sucede } t \text{ ou é sorvedouro} \\ \sum_{v \in \mathrm{Adj}[u]} p(v) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Contagem de caminhos

CONTA-CAMINHOS(G, s, t) ▷ G é acíclico
1. **para cada** $u \in V[G] - \{s\}$ **faça**
2. $\quad p[u] \leftarrow 0$
3. $p[t] \leftarrow 1$
4. obtenha uma ordenação topológica $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de G
5. **para** $i \leftarrow n-1$ **até** 1 **faça** ▷ em ordem inversa
6. $\quad$ **para cada** $v \in \mathrm{Adj}[v_i]$ **faça**
7. $\quad\quad p[v_i] \leftarrow p[v_i] + p[v]$
8. **devolva** p

Complexidade: $O(V+E)$

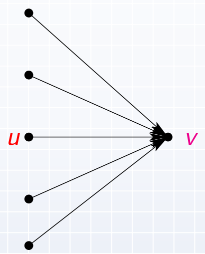
Para ver a corretude basta provar que no início da linha 5 vale o seguinte invariante: $p[v_i] = p(v_i)$.

Exercício: outra forma de contar os caminhos

Seja G um grafo direcionado acíclico. Seja

$$q(v) = \text{número de caminhos de } s \text{ a } v.$$

Queremos determinar $q(t)$.



Descubra uma recorrência para $q(v)$ que envolve os valores $q(u)$ para u tal que $v \in \mathrm{Adj}[u]$.

Exercício: outra forma de contar os caminhos

Verifique que o algoritmo abaixo produz uma resposta correta.

Conta-Caminhos(G, s, t) ▷ G é acíclico
1. **para cada** $v \in V[G] - \{s\}$ **faça**
2. $\quad q[v] \leftarrow 0$
3. $q[s] \leftarrow 1$
4. obtenha uma ordenação topológica $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de G
5. **para** $i \leftarrow 1$ **até** $n - 1$ **faça**
6. $\quad$ **para cada** $v \in \mathrm{Adj}[v_i]$ **faça**
7. $\quad\quad q[v] \leftarrow q[v] + q[v_i]$
8. **devolva** q

Note atentamente a diferença com o algoritmo anterior no modo como os valores $q[v]$ são preenchidos.

Componentes fortemente conexos

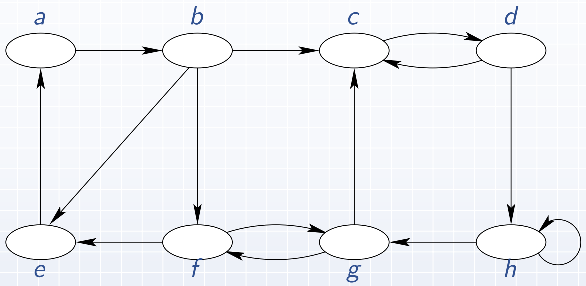
Componentes fortemente conexos (CFC)

- Uma aplicação clássica de busca em profundidade:

  decompor um grafo direcionado em seus componentes fortemente conexos.
- Muitos algoritmos em grafos começam com tal decomposição.
- O algoritmo opera separadamente em cada componente fortemente conexo.
- As soluções são combinadas de alguma forma.

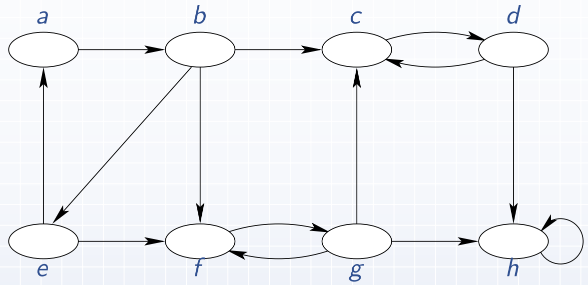
Grafo fortemente conexo

Um grafo direcionado $G = (V, E)$ é fortemente conexo se para todo par de vértices u, v de G, existe um caminho direcionado de u a v.



Grafo fortemente conexo

Nem todo grafo direcionado é fortemente conexo.

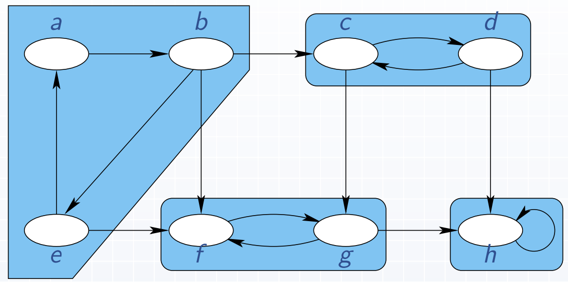


Componentes fortemente conexos

Um componente fortemente conexo de um grafo direcionado $G = (V, E)$ é um subconjunto de vértices $C \subseteq V$ tal que:

1. O subgrafo induzido por C é fortemente conexo.
2. C é maximal com respeito à propriedade (1).

Componentes fortemente conexos

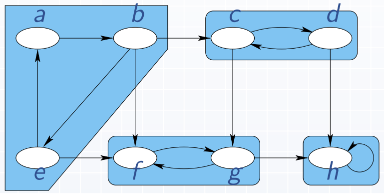


Um grafo direcionado e seus componentes fortemente conexos.

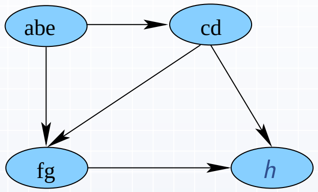
Problema: dado um grafo G, determinar seus componentes fortemente conexos.

Grafo Componente

Para entender melhor o algoritmo que veremos, considere o grafo componente G^{CFC} obtido a partir de G **contraindo-se** seus componentes fortemente conexos.



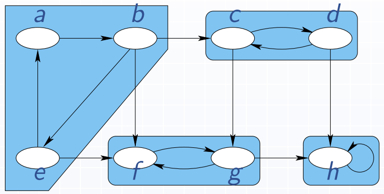
G



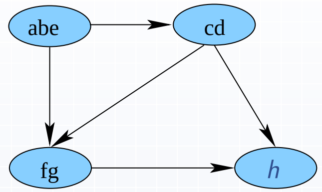
G^{CFC}

Mais precisamente, cada vértice de G^{CFC} corresponde a um componente fortemente conexo de G e existe uma aresta (C, C') em G^{CFC} se existem $u \in C$ e $v \in C'$ tais que $(u, v) \in E[G]$.
Note que G^{CFC} é **acíclico**. (Por quê?)

Grafo Componente



G



G^{CFC}

Considere uma busca em profundidade sobre G e seja u o **último** vértice a ser **finalizado**. O vértice u tem que pertencer a um componente fortemente conexo de G que corresponde a uma fonte de G^{CFC}. (Por quê?)

Como podemos usar esta informação?

Grafo transposto

Seja $G = (V, E)$ um grafo direcionado.

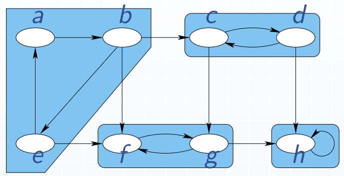
O grafo transposto de G é o grafo $G^T = (V^T, E^T)$ tal que

- $V^T = V$ e
- $E^T = \{(u, v) : (v, u) \in E\}$.

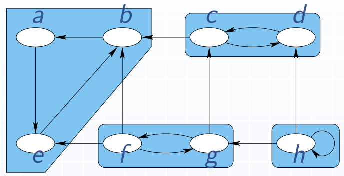
Ou seja, G^T é obtido a partir de G invertendo as orientações das arestas.

Dada uma representação de listas de adjacências de G é possível obter a representação de listas de adjacências de G^T em tempo $\Theta(V + E)$.

Grafo transposto



G



G^T

Um grafo direcionado e o grafo transposto. Note que eles têm os **mesmos componentes fortemente conexos**.

Note que agora se começarmos uma nova busca em profundidade, mas agora começando no vértice u que foi **finalizado** mais tarde (na primeira busca), ela encontraria o componente fortemente conexo que contém u (os vértices da primeira árvore encontrada.)

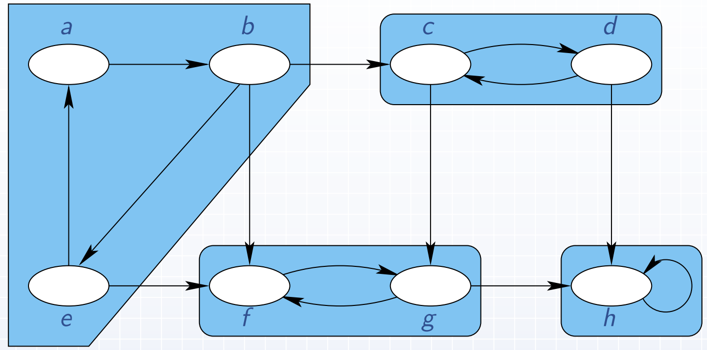
Algoritmo

COMPONENTES-FORTEMENTE-CONEXOS(G)

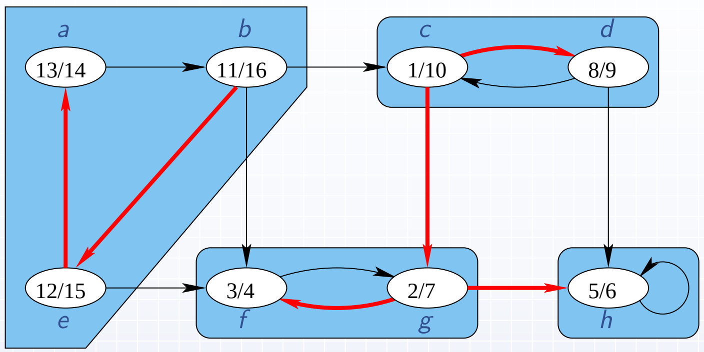
1 Execute DFS(G) para obter $f[v]$ para $v \in V$.
2 Execute DFS(G^T) considerando os vértices em ordem decrescente de $f[v]$.
3 Devolva os conjuntos de vértices de cada árvore da Floresta de Busca em Profundidade obtida.

Veremos que os conjuntos devolvidos são exatamente os componentes fortemente conexos de G.

Exemplo CLRS

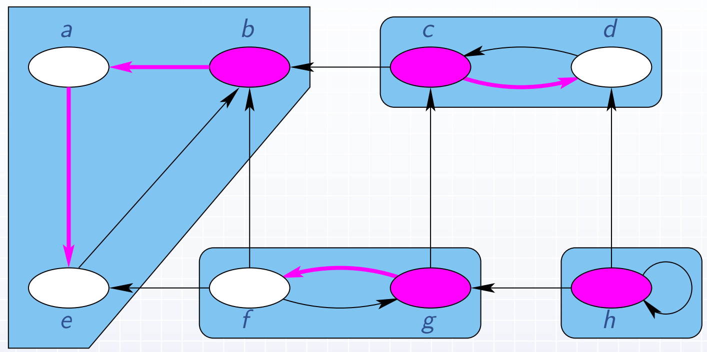


Exemplo CLRS



1 Execute DFS(G) para obter $f[v]$ para $v \in V$.

Exemplo CLRS

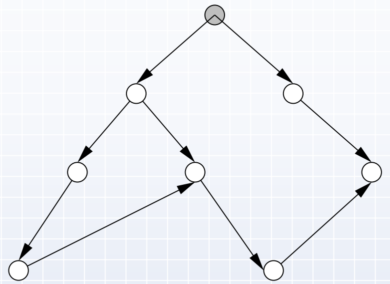


2 Depois execute DFS(G^T) considerando os vértices em ordem decrescente de $f[v]$.
3 Os componentes fortemente conexos correspondem aos vértices de cada árvore da Floresta de Busca em Profundidade.

Relembrando

Teorema. (Teorema do Caminho Branco)

Em uma Floresta de BP, um vértice v é descendente de u se e somente se no instante $d[u]$ (quando u foi descoberto), existia um caminho de u a v formado apenas por vértices brancos.



Corretude

Lema 22.13 (CLRS)

Sejam C e C' dois componentes fortemente conexos de G.
Sejam $u, v \in C$ e $u', v' \in C'$.
Suponha que existe um caminho $u \rightsquigarrow u'$ em G.
Então **não existe** um caminho $v' \rightsquigarrow v$ em G.

O lema acima mostra que G^{CFC} é acíclico.

Agora mostraremos que o algoritmo Componentes-Fortemente-Conexos funciona.

Corretude

Daqui pra frente d, f referem-se à busca em profundidade em G feita no Passo 1 do algoritmo.

Definição:

Para todo subconjunto U de vértices sejam

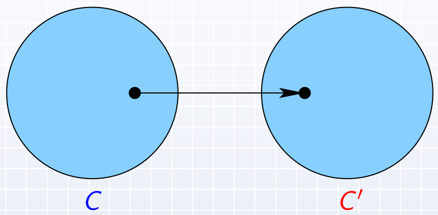
$$d(U) := \min_{u \in U}\{d[u]\} \quad \text{e} \quad f(U) := \max_{u \in U}\{f[u]\}.$$

Ou seja,
$d(U)$ é o instante em que o primeiro vértice de U foi descoberto e
$f(U)$ é o instante em que o último vértice de U foi finalizado.

Corretude

Lema 22.14 (CLRS):

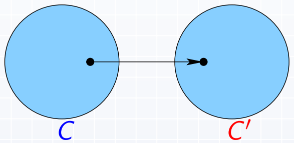
Sejam C e C' dois componentes f.c. de G.
Suponha que existe (u, v) em E onde $u \in C$ e $v \in C'$.
Então $f(C) > f(C')$.



Corretude

Lema 22.14 (CLRS):

Sejam C e C' dois componentes f.c. de G.
Suponha que existe (u, v) em E onde $u \in C$ e $v \in C'$.
Então $f(C) > f(C')$.

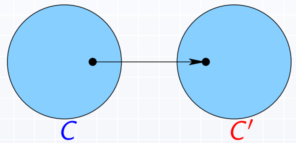


Prova:
Caso 1: $d(C) < d(C')$. Seja x o primeiro vértice de C que foi descoberto. Logo $d[x] = d(C)$. No instante $d[x]$, existe um caminho branco de de x a todo vértice de $C \cup C'$. Então todos os vértices de $C \cup C'$ são descendentes de x e portanto, $f(C') < f[x] \leq f(C)$.

Corretude

Lema 22.14 (CLRS):

Sejam C e C' dois componentes f.c. de G.
Suponha que existe (u, v) em E onde $u \in C$ e $v \in C'$.
Então $f(C) > f(C')$.



Caso 2: $d(C) > d(C')$. O primeiro vértice de $C \cup C'$ a ser descoberto pertence a C'. Logo, todos os vértices de C' serão finalizados antes de qualquer vértice de C ser descoberto. Isso mostra que $f(C) > f(C')$. ■

Corretude

Lema 22.14 (CLRS):

Sejam C e C' dois componentes f.c. de G.
Suponha que existe (u, v) em E onde $u \in C$ e $v \in C'$.
Então $f(C) > f(C')$.

Corolário 22.15 (CLRS):

Sejam C e C' dois componentes f.c. de $\mathbf{G^T}$.
Suponha que existe (v, u) em $\mathbf{E^T}$ onde $u \in C$ e $v \in C'$.
Então $f(C) > f(C')$.

Segue do fato de que G e G^T terem os mesmos componentes fortemente conexos e do Lema 22.14.

Corretude

COMPONENTES-FORTEMENTE-CONEXOS(G)

1. Execute DFS(G) para obter $f[v]$ para $v \in V$.
2. Execute DFS(G^T) considerando os vértices em ordem decrescente de $f[v]$.
3. Devolva os conjuntos de vértices de cada árvore da Floresta de Busca em Profundidade obtida.

Teorema 22.16 (CLRS):

O algoritmo COMPONENTES-FORTEMENTE-CONEXOS determina os componentes fortemente conexos de G em tempo $O(V + E)$.

Corretude

Prova: (CLRS)

Vamos provar por **indução** no número de árvores produzidas na linha 3 que os vértices de cada árvore são componentes fortemente conexos.

Base: $k = 0$ (trivial)

Hipótese de indução: as primeiras k árvores produzidas na linha 3 são componentes fortemente conexos.

Corretude

Passo de indução: considere a $(k+1)$-ésima árvore produzida pelo algoritmo. Vamos mostrar que seu conjunto de vértices é um componente fortemente conexo.

Seja u a raiz desta árvore e seja C o componente fortemente conexo ao qual u pertence.

Pela escolha do algoritmo, $f(C) > f(C')$ para qualquer outro componente fortemente conexo C' que consiste de vértices ainda não visitados em DFS(G^T).

Corretude

Pela hipótese de indução, no instante $d[u]$ todos os vértices de C são brancos. Assim, todos os vértices de C tornam-se descendentes de u na árvore de busca de G^T.

Pela hipótese de indução e pelo Corolário 22.15, qualquer aresta que sai de C só pode entrar em uma das k componentes já visitadas.

Logo, apenas os vértices de C estão na árvore de busca em profundidade de G^T com raiz u. $\blacksquare$