Projeto e Análise de Algoritmos

Algoritmos e conceitos fundamentais de grafos

Cid Carvalho de Souza, Cândida Nunes da Silva et al.

Primeiro Semestre de 2017

A maior parte deste conjunto de slides foi inicialmente preparada por Cid Carvalho de Souza e Cândida Nunes da Silva para cursos de Análise de Algoritmos. Além desse material, diversos conteúdos foram adicionados ou incorporados por outros professores, em especial por Orlando Lee e por Flávio Keidi Miyazawa. Os slides usados nessa disciplina são uma junção dos materiais didáticos gentilmente cedidos por esses professores e contêm algumas modificações, que podem ter introduzido erros.

O conjunto de slides de cada unidade do curso será disponibilizado como guia de estudos e deve ser usado unicamente para revisar as aulas. Para estudar e praticar, leia o livro-texto indicado e resolva os exercícios sugeridos.

Lehilton

Agradecimentos (Cid e Cândida)

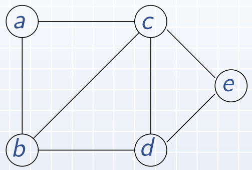
- Várias pessoas contribuíram direta ou indiretamente com a preparação deste material.
- Algumas destas pessoas cederam gentilmente seus arquivos digitais enquanto outras cederam gentilmente o seu tempo fazendo correções e dando sugestões.
- Uma lista destes "colaboradores" (em ordem alfabética) é dada abaixo:
  - Célia Picinin de Mello
  - Flávio Keidi Miyazawa
  - José Coelho de Pina
  - Orlando Lee
  - Paulo Feofiloff
  - Pedro Rezende
  - Ricardo Dahab
  - Zanoni Dias

Conceitos de grafos

Definição de Grafo

Um *grafo* é um par $G = (V, E)$ onde

- V é um conjunto finito de elementos chamados *vértices* e
- E é um conjunto finito de pares não ordenados de vértices chamados *arestas*.
- **Exemplo:**
  $V = \{a, b, c, d, e\}$
  $E = \{(a, b), (a, c), (b, c), (b, d), (c, d), (c, e), (d, e)\}$



Definição de Grafo

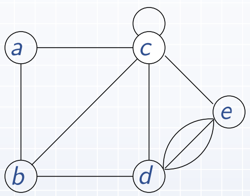
- Dada uma aresta $e = (a, b)$, dizemos que os vértices a e b são os *extremos* da aresta e e que a e b são vértices *adjacentes*.
- Dizemos também que a aresta e é *incidente* aos vértices a e b e que os vértices a e b são incidentes à aresta e.

- Note que para pares não ordenados, temos $(a, b) = (b, a)$.

Multigrafo

Um multigrafo é um generalização de grafos que pode conter:

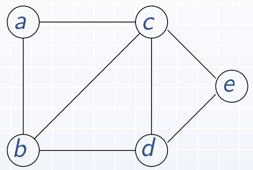
- *laço*: uma aresta com extremos idênticos
- *arestas múltiplas*: duas ou mais arestas com o mesmo par de extremos



Dizemos que um grafo é *simples* quando ele não possui laços ou arestas múltiplas.

Tamanho do Grafo

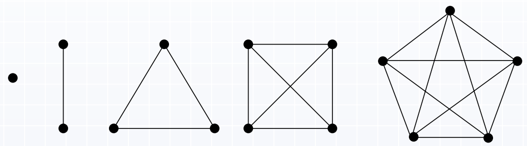
- Denotamos por $|V|$ e $|E|$ a cardinalidade dos conjuntos de vértices e arestas de um grafo $G = (V, E)$, respectivamente.
- No exemplo abaixo temos $|V| = 5$ e $|E| = 7$.



O *tamanho* do grafo G é dado por $|V| + |E|$.

Grafos completos

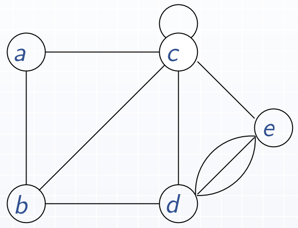
- *Grafo completo:* para todo par de vértices u, v, a aresta (u, v) pertence ao grafo.



- O número de arestas de um grafo completo com n vértices é $\binom{n}{2}$.
- O número de arestas de um grafo simples com n vértices é no máximo $\binom{n}{2}$.

Grau de um vértice

- O *grau* de um vértice v, denotado por $d(v)$ é o número de arestas incidentes a v, com laços contados duas vezes.



$d(a) = 2$
$d(b) = 3$
$d(c) = 6$
$d(d) = 5$
$d(e) = 4$

Teorema (*Handshaking lemma*)

Para todo grafo $G = (V, E)$ temos:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

Grafo complementar

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples. O *complemento* de G é o grafo $\bar{G}$ com conjunto de vértices V tal que $(u, v) \in E(\bar{G})$ se e somente se $(u, v) \notin E(G)$.

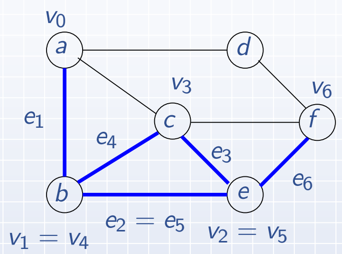
Note que $d_{\bar{G}}(v) = |V| - 1 - d_G(v)$.

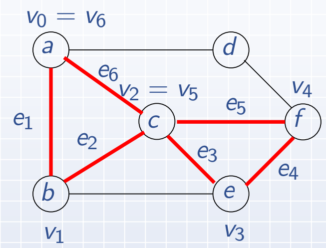
Exercício. Mostre que em uma festa com pelo menos $n \geq 6$ pessoas, existem três pessoas que se conhecem mutuamente ou três pessoas que não se conhecem mutuamente.

Exercício. Suponha que em um grupo S de n pessoas, com $n \geq 4$, vale o seguinte: em qualquer grupo $X \subseteq S$ de 4 pessoas, existe uma que conhece as demais pessoas de X.
Mostre que existe uma pessoa em S que conhece todas as demais pessoas de S.

Passeios em Grafos

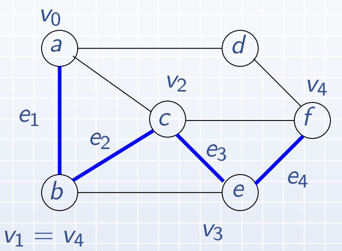
- Um *passeio* P de um vértice v_0 a um vértice v_k em um grafo G é uma sequência finita e não vazia $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_n, v_k)$ cujos elementos são alternadamente vértices e arestas e tal que, para todo $1 \leq i \leq k$, v_{i-1} e v_i são os extremos de e_i.
- Dizemos que P é um passeio de v_0 a v_k e que v_k é *alcançável* a partir de v_0 através de P.
- Dizemos que P é *fechado* se $v_0 = v_k$.

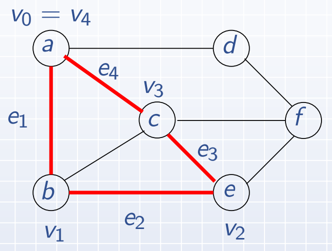




Caminhos e Ciclos

- O *comprimento* do passeio P é igual ao seu número de arestas, ou seja, k.
- Um *caminho* é um passeio em que todos seus vértices são distintos.
- Um *ciclo* é um passeio fechado que possui pelo menos uma aresta e tal que $v_2, \ldots, v_k$ são distintos e todas as arestas são distintas.





Exercícios

(1) Sejam G um grafo e u, v vértices de G. Mostre que se existe um passeio de u a v em G, então existe um caminho de u a v em G.
Por que isto é um resultado interessante?

(2) Sejam G um grafo e u, v, w vértices de G. Mostre que se em G existem um caminho de u a v e um caminho de v a w então existe um caminho de u a w em G.

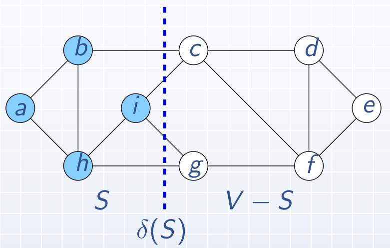
(3) É verdade que todo passeio fechado contém um ciclo?

Cortes

Seja $G = (V, E)$ um grafo e seja $S \subset V$.

Denote por $\delta_G(S)$ o conjunto de arestas de G com um extremo em S e outro em $V - S$. Dizemos que $\delta_G(S)$ é um *corte*.

Se $s \in S$ e $t \in V - S$ dizemos que $\delta_G(S)$ *separa* s de t.



Caminhos versus Cortes

Lema. *Seja G um grafo e sejam s, t vértices distintos de G. Então exatamente um dos seguintes ocorre:*

(a) *existe um caminho de s a t em G, ou*

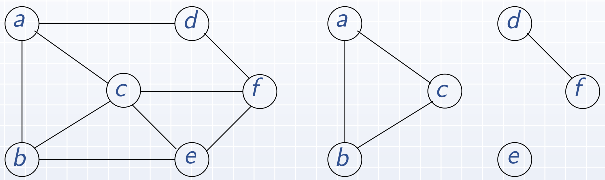
(b) *existe um corte $\delta_G(S)$ que separa s de t tal que $\delta_G(S) = \emptyset$.*

Prova: Claramente (a) e (b) não podem valer simultaneamente (Por quê?).

Suponha que (a) não vale. Seja S o conjuntos dos vértices que são alcançáveis por s em G. Obviamente, $t \in V - S$ e $\delta_G(S) = \emptyset$. ■

Conexidade

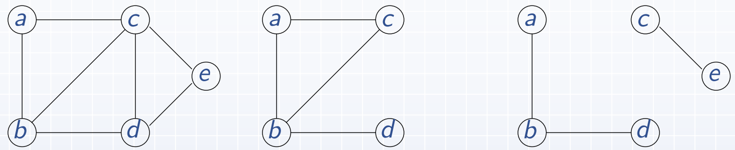
- Dizemos que um grafo é *conexo* se, para qualquer par de vértices u e v de G, existe um caminho de u a v em G. Caso contrário, dizemos que é *desconexo*.
- Quando o grafo G não é conexo, podemos particioná-lo em *componentes*. Dois vértices u e v de G estão no mesmo componente de G se existe um caminho de u a v em G.



G $\qquad$ G'

Subgrafo e Subgrafo Gerador

- Um *subgrafo* $H = (V', E')$ de um grafo $G = (V, E)$ é um grafo tal que $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$.
- Um *subgrafo gerador* de G é um subgrafo H com $V' = V$.



G $\qquad$ H $\qquad$ H

Grafos obtidos a partir de outros grafos

Seja $G = (V, E)$, e uma aresta de G e v um vértice de G. Então

- $G - e$ é o grafo obtido de G removendo-se e. Formalmente,

$$G - e = (V, E - \{e\}).$$

- $G - v$ é o grafo obtido de G removendo-se v e todas as arestas que incidem em v. Formalmente,

$$G - v = (V - \{v\}, E - \delta(\{v\})).$$

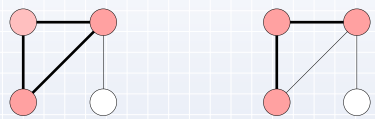
Subgrafo induzido

Seja $G = (V, E)$ e s um subconjunto de vértices.

Então $G[S]$ é o subgrafo de G induzido por S, que é formado por S e todas as arestas entre vértices S. Formalmente,

$$G[S] = (S, \{(uv) \in E | u, v \in S\}).$$

Exemplo de um subgrafo que é induzido e de outro subgrafo que não é induzido em um grafo G:

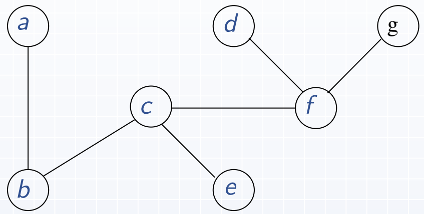


INDUZIDO $\qquad$ NÃO INDUZIDO

Fatos básicos de grafos

Árvores

- Um grafo $G = (V, E)$ é uma *árvore* se é conexo e não possui ciclos (acíclico).



- Uma *folha* de uma árvore G é um vértice de grau 1.
- *Toda árvore com pelo menos dois vértices possui uma folha.*(Por quê?)

Árvores

Teorema. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

- *G é uma árvore.*
- *G é conexo e possui exatamente $|V| - 1$ arestas.*
- *G é conexo e a remoção de qualquer aresta desconecta o grafo (conexo minimal).*
- *Para todo par de vértices u, v de G, existe um único caminho de u a v em G (e G não tem laços).*

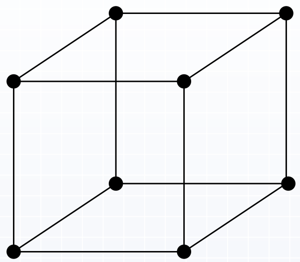
Grafos bipartidos

Uma *bipartição* de um conjunto V é um par (A, B) tal que:

- $A \cap B = \emptyset$ e
- $A \cup B = V$.

Um grafo $G = (V, E)$ é *bipartido* se existe uma partição (A, B) de V tal que toda aresta de G tem um extremo em A e outro em B.

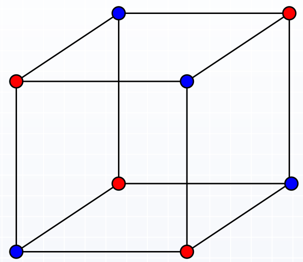
Grafos bipartidos



É bipartido?

Vamos indicar cada parte com uma cor: vermelho ou azul.

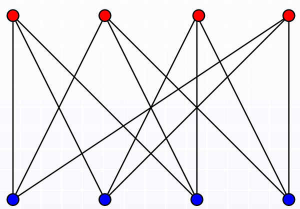
Grafos bipartidos



É bipartido!

Um grafo $G = (V, E)$ é *bipartido* se é possível colorir os vértices de G com **duas cores** de modo que vértices adjacentes tenham cores distintas.

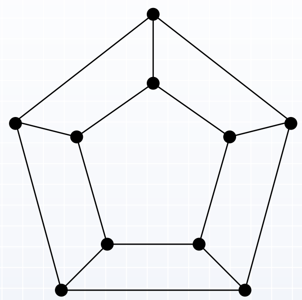
Grafos bipartidos



Isto pode ser visto melhor com outro desenho.

Um grafo $G = (V, E)$ é *bipartido* se é possível colorir os vértices de G com **duas cores** de modo que vértices adjacentes tenham cores distintas.

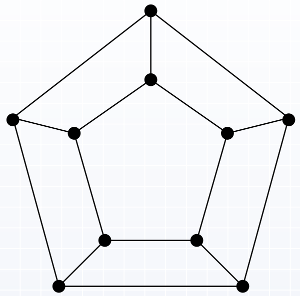
Grafos bipartidos



Este grafo **não** é bipartido.

Você consegue apresentar uma justificativa simples deste fato?

Grafos bipartidos



Um grafo bipartido **não** pode conter *ciclos ímpares* (de comprimento ímpar). Claramente, esta é uma condição necessária.

Ela é suficiente? Ou seja, é verdade que se G não contém ciclos ímpares então G é bipartido? SIM!

Grafos bipartidos

Queremos demonstrar o seguinte.

Teorema. *Seja G um grafo. Então G é bipartido se e somente se G não contém um ciclo ímpar.*

Já vimos que se G contém um ciclo ímpar então G não é bipartido provando a implicação "$\Rightarrow$".

Falta provar a recíproca "$\Leftarrow$". Para provar isto precisaremos de alguns fatos.

Podemos supor que G é conexo. (Por quê?)

Árvore geradora

Fato 1. *Todo grafo conexo contém uma árvore geradora.*

Isto segue facilmente do próximo resultado.

Lema. *Seja G um grafo conexo e seja C um ciclo de G. Se e é uma aresta de C então $G - e$ é conexo.* (Exercício!)

A recíproca também vale.

Lema. *Seja G um grafo conexo e seja e uma aresta de G. Se $G - e$ é conexo então e pertence a algum ciclo de G.* (Exercício!)

Árvores e grafos bipartidos

Fato 2. *Toda árvore $T = (V, E)$ é um grafo bipartido.*

A prova é por indução em $|V|$ e do fato de que toda árvore com pelo menos dois vértices contém uma folha. (Exercício!)

Árvore geradora

Fato 3. *Seja $T = (V, E')$ uma árvore geradora de um grafo $G = (V, E)$. Então para toda aresta $e \in E - E'$ existe um único ciclo em $T + e := (V, E' \cup \{e\})$.*

Prova: Sejam u, v os extremos de e. Como T é uma árvore, existe um único caminho P de u a v em T. Logo, $P + e$ é o único ciclo em $T + e$. ■

É comum chamar o único ciclo de $T + e$ de ciclo fundamental de $T + e$.

Grafos bipartidos

Agora estamos prontos para demonstrar o seguinte.

Teorema. *Seja G um grafo. Então G é bipartido se e somente se G não contém um ciclo ímpar.*

Prova: Já vimos que se G contém um ciclo ímpar então G não é bipartido provando a implicação "$\Rightarrow$".

Agora provaremos a recíproca "$\Leftarrow$". Suponha que G não contém um ciclo ímpar. Construiremos uma bipartição (A, B) de V tal que toda aresta de G tem um extremo em A e outro em B.

Podemos supor que G é conexo.

Grafos bipartidos

Pelo Fato 1, G contém uma árvore geradora $T = (V, E')$.

Pelo Fato 2, T possui uma uma bipartição (A, B) de V tal que toda aresta de T tem um extremo em A e outro em B.

Mostraremos que toda aresta de $E - E'$ tem um extremo em A e outro em B, o que implica que G é bipartido.

Grafos bipartidos

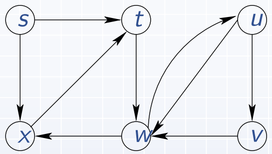
Seja e uma aresta de $E - E'$. Pelo Fato 3, existe um único ciclo C em $T + e$ (que contém e).

- Se e tem extremos em partes distintas, então nada há a fazer.
- Se os extremos de e pertencem a mesma parte (A ou B), então C é um ciclo ímpar (contradição)!

O resultado segue. ■

Grafo direcionado

- As definições que vimos até agora são para grafos *não direcionados*.
- Um *grafo direcionado* é definido de forma semelhante, com a diferença que as arestas (às vezes chamadas de *arcos*) consistem de pares ordenados de vértices.



- Às vezes, para enfatizar, dizemos *grafo não direcionado* em vez de simplesmente *grafo*.

Grafo direcionado

- Se $e = (u, v)$ é uma aresta de um grafo direcionado G, então dizemos que e *sai* de u e *entra* em v, u é a *cauda* de e e v é *cabeça* de e.
- O *grau de saída* $g^+(v)$ de um vértice v é o número de arestas que saem de v. O *grau de entrada* $g^-(v)$ de v é o número de arestas que entram em v.

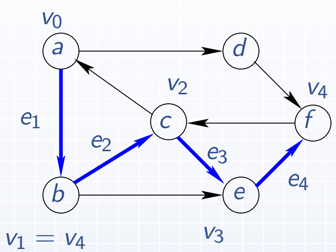
Teorema.

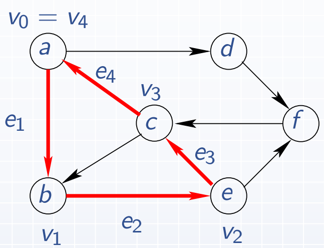
Para todo grafo direcionado $G = (V, E)$ temos:

$$\sum_{v \in V} g^+(v) = \sum_{v \in V} g^-(v) = |E|.$$

Passeios em grafos direcionados.

- Supõe-se que passeios, caminhos e ciclos de grafos direcionados são direcionados (todas as arestas "seguem o mesmo sentido").





- Podemos definir subgrafo (gerador) de um grafo direcionado de modo análogo ao caso não direcionado. Há também um conceito de conexidade para grafos direcionados que veremos mais tarde.

Exercícios

(1) Sejam G um grafo direcionado e u, v vértices de G. Mostre que se existe um passeio de u a v em G, então existe um caminho de u a v em G.

(2) Sejam G um grafo direcionado e u, v, w vértices de G. Mostre que se em G existem um caminho de u a v e um caminho de v a w então existe um caminho de u a w em G.

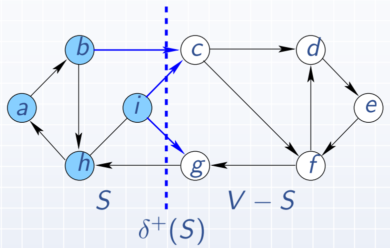
(3) É verdade que todo passeio fechado em um grafo direcionado contém um ciclo (direcionado)?

Cortes em grafos direcionados

Seja $G = (V, E)$ um grafo direcionado e seja $S \subset V$.

Denote por $\delta^+_G(S)$ o conjunto de arestas de G com cauda em S e cabeça em $V - S$. Dizemos que $\delta^+_G(S)$ é um *corte direcionado*.

Se $s \in S$ e $t \in V - S$ dizemos que $\delta^+_G(S)$ *separa* s de t.



Note que (g, h) não pertence a $\delta^+_G(S)$.

Caminhos versus Cortes

Lema. *Seja G um grafo direcionado e sejam s, t vértices distintos de G. Então exatamente um dos seguintes ocorre:*

(a) *existe um caminho de s a t em G, ou*

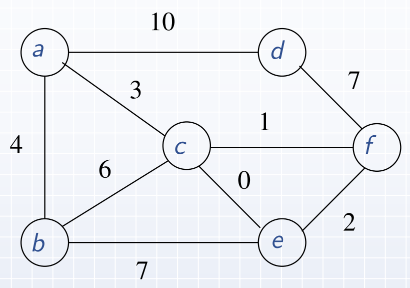
(b) *existe um corte direcionado $\delta^+_G(S)$ que separa s de t tal que $\delta^+_G(S) = \emptyset$.*

Prova: Claramente (a) e (b) não podem valer simultaneamente (Por quê?).

Suponha que (a) não vale. Seja S o conjuntos dos vértices que são alcançáveis por s em G. Obviamente, $t \in V - S$ e $\delta^+_G(S) = \emptyset$. ■

Grafo Ponderado

- Um grafo (direcionado ou não) é *ponderado* se a cada aresta e do grafo está associado um valor real $c(e)$, o qual denominamos *custo (ou peso)* da aresta.



Representação de grafos

Algoritmos em Grafos - Motivação prática

- Grafos são estruturas abstratas que podem modelar diversos problemas do mundo real.
- Por exemplo, um grafo pode representar conexões entre cidades por estradas ou uma rede de computadores.
- O interesse em estudar algoritmos para problemas em grafos é que conhecer um algoritmo para um determinado problema em grafos pode significar conhecer algoritmos para diversos problemas reais.

Aplicações

- *Problema do Caminho Mínimo:* dado um conjunto de cidades, as distâncias entre elas e duas cidades A e B, determinar um caminho (trajeto) mais curto de A até B.
- *Problema da Árvore Geradora de Peso Mínimo:* dado um conjunto de computadores, onde cada par de computadores pode ser ligado usando uma quantidade de fibra ótica, encontrar uma rede interconectando todos os computadores que use a menor quantidade de fibra ótica possível.
- *Problema do Emparelhamento Máximo:* dado um conjunto de pessoas e um conjunto de vagas para diferentes empregos, onde cada pessoa é qualificada para certos empregos e cada vaga deve ser ocupada por exatamente uma pessoa, encontrar um conjunto de associações pessoa-emprego que tenha o maior número possível de pessoas.

Aplicações

- *Problema do Caixeiro Viajante:* dado um conjunto de cidades, encontrar um ciclo que passa por todas as cidades tal que a distância total percorrida seja menor possível.
- *Problema Chinês do Correio:* dado o conjunto das ruas de um bairro, encontrar um passeio fechado que passa por todas as ruas tal que a distância total percorrida seja menor possível.

Representação Interna de Grafos

- A complexidade dos algoritmos para solução de problemas modelados por grafos depende fortemente da sua representação interna.
- Existem duas representações canônicas: *matriz de adjacência* e *listas de adjacência*.
- O uso de uma ou outra num determinado algoritmo depende da natureza das operações que ditam a complexidade do algoritmo.

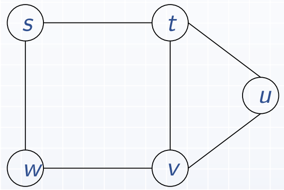
Matriz de adjacência

- Seja $G = (V, E)$ um grafo simples (direcionado ou não).
- A *matriz de adjacência* de G é uma matriz quadrada A de ordem $|V|$, cujas linhas e colunas são indexadas pelos vértices em V, e tal que:

$$A[i,j] = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \in E, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

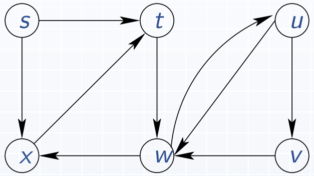
- Note que se G é não direcionado, então a matriz A correspondente é simétrica.

Matriz de adjacência



	s	t	w	v	u
s	0	1	1	0	0
t	1	0	0	1	1
w	1	0	0	1	0
v	0	1	1	0	1
u	0	1	0	1	0

Matriz de adjacência

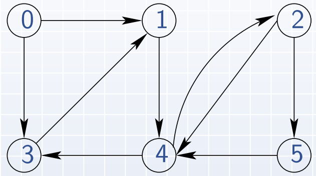


	s	t	u	x	w	v
s	0	1	0	1	0	0
t	0	0	0	0	1	0
u	0	0	0	0	1	1
x	0	1	0	0	0	0
w	0	0	1	1	0	0
v	0	0	0	0	1	0

Matriz de adjacência em C

Em C para representar os vértices de um grafo G com n vértices usamos $0, 1, 2, \ldots, n-2, n-1$.
A declaração de uma matriz poderia ser:

```
#define NMAX 100
unsigned char A[NMAX]; /* matriz estática */
ou
unsigned char **A; /* matriz dinâmica */
```



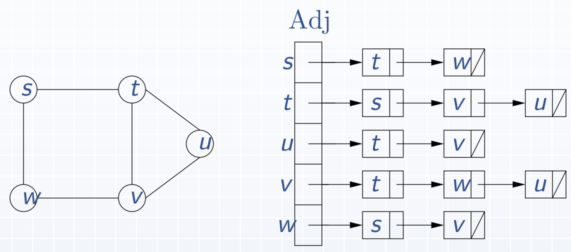
	0	1	2	3	4	5
0	0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0
2	0	0	0	0	1	1
3	0	1	0	0	0	0
4	0	0	1	1	0	0
5	0	0	0	0	1	0

Listas de adjacência

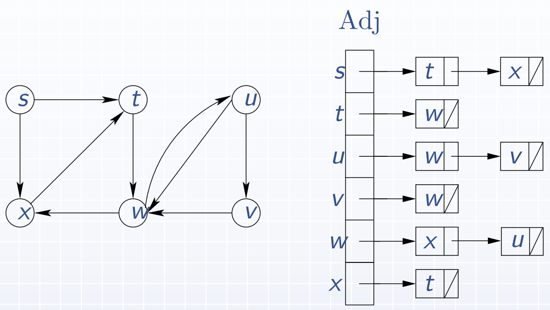
- Seja $G = (V, E)$ um grafo simples (direcionado ou não).
- A representação de G por uma *lista de adjacências* consiste no seguinte.

  Para cada vértice v, temos uma lista ligada $\mathrm{Adj}[v]$ dos vértices *adjacentes* a v, ou seja, w aparece em $\mathrm{Adj}[v]$ se (v, w) é uma aresta de G. Os vértices podem estar em qualquer ordem em uma lista.

Listas de adjacência

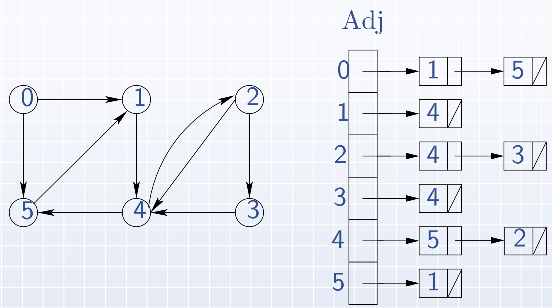


Lista de adjacências



Listas de adjacências em C

```
#define NMAX 100
typedef struct SVertex SVertex;
struct SVertex {
 int vert;
 SVertex *next;
}
SVertex *Adj[NMAX]; /* Vetor estático */
```



Notação para complexidade de algoritmos

Quando analisarmos a complexidade de um algoritmo envolvendo um grafo $G = (V, E)$ usaremos V e E na notação assintótica, em vez de $|V|$ e $|E|$.

Por exemplo, escrevemos $O(E^2 \lg V)$ em vez de $O(|E|^2 \lg |V|)$.

Matriz × Lista de adjacência

O que é melhor? **Depende**.

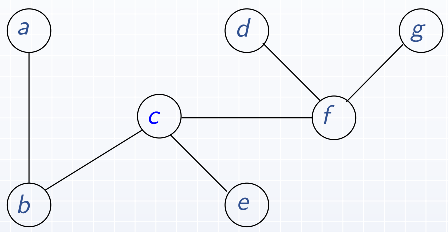
- Matriz de adjacência: é fácil verificar se (i, j) é uma aresta de G.
- Lista de adjacência: é fácil descobrir os vértices adjacentes a um dado vértice v (ou seja, listar $\mathrm{Adj}[v]$).
- Matriz de adjacência: espaço $\Theta(V^2)$.
  Adequada a grafos densos ($|E| = \Theta(V^2)$).
- Lista de adjacência: espaço $\Theta(V + E)$.
  Adequada a grafos esparsos ($|E| = \Theta(V)$).

Extensões

- Há outras alternativas para representar grafos, mas matrizes e listas de adjacência são as mais usadas.
- Elas podem ser adaptadas para representar grafos ponderados, grafos com laços e arestas múltiplas, grafos com pesos nos vértices etc.
- Para determinados problemas é essencial ter estruturas de dados adicionais para melhorar a eficiência dos algoritmos.

Representação de árvores

Uma *árvore enraizada* é uma árvore com um vértice especial chamado *raiz*.

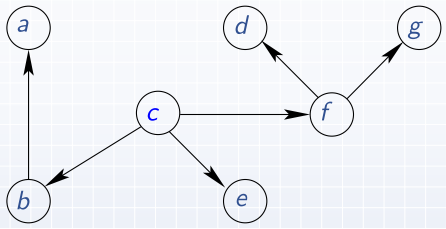


raiz c

Representação de árvores

Uma *árvore direcionada com raiz r* é um grafo direcionado **acíclico** $T = (V, E)$ tal que:

1. $g^{-}(r) = 0$,
2. $g^{-}(v) = 1$ para $v \in V - \{r\}$.



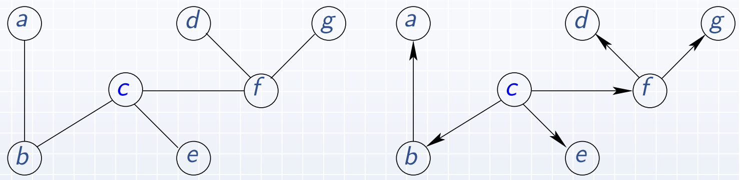
raiz c

Representação de árvores

Vetor de predecessores π (ou outro nome):

v	a	b	c	d	e	f	g
$\pi[v]$	b	c	N	f	c	c	f

N é um símbolo usado para indicar não existência.



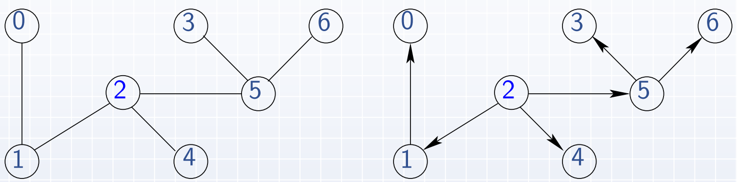
raiz c

Representação de árvores em C

Vetor de predecessores π:

v	0	1	2	3	4	5	6
$\pi[v]$	1	2	N	5	2	2	5

N é um símbolo usado para indicar não existência. Por exemplo -1, NULL etc.



raiz 2

Alguns detalhes de implementação

- Nos algoritmos que veremos durante o semestre, usa-se a representação de um grafo (direcionado ou não) por listas de adjacências.
- Em uma implementação de verdade de um algoritmo, o mais provável é que esta representação **não** seja dada a priori.
- Em geral é necessário construir tal representação a partir da entrada dada. Como fazer isto depende do formato da entrada.

Alguns detalhes de implementação

Suponha que a entrada (arquivo texto ou teclado) tenha a seguinte forma:

5 7 0 /* respectivamente, $|V|$, $|E|$, $0/1$ (direcionado ou não) */
0 1
0 2
1 2
1 3
2 3
2 4
3 4

Alguns detalhes de implementação

leia n, m e b
enquanto houver arestas **faça**
  leia a próxima aresta (u, v)
  insira v na lista $\mathrm{Adj}[u]$
  se $b = FALSE$ **então**
    insira u na lista $\mathrm{Adj}[v]$

Exercício. (extremamente fácil) Suponha que a entrada tenha esta mesma forma. Escreva um pseudocódigo para construir a matriz de adjacências a partir dela.

Calculando o quadrado

O *quadrado* de um grafo direcionado $G = (V, E)$ é o grafo $G^2 = (V, E^2)$ onde $(u, v) \in E^2$ se existe um caminho de comprimento no máximo 2 de u a v em G.

(1) Dado $G = (V, E)$ representado por uma matriz de adjacência, mostre como calcular G^2 (i.e. sua matriz de adjacência).

(2) Dado $G = (V, E)$ representado por listas de adjacência, mostre como calcular G^2 (i.e. suas listas de adjacência).

Calculando G^2 a partir da matriz de adjacência

Suponha que M é a matriz de adjacência de $G = (V, E)$.

QUADRADO(M)
$N \leftarrow M$
para cada $u \in V$ **faça**
  para cada $v \in V$ **faça**
    para cada $w \in V$ **faça**
      se $N[u, v] = 0$ **então**
        $N[u, v] \leftarrow M[u, w] \cdot M[w, v]$
devolva N

Complexidade: $\Theta(V^3)$

Calculando G^2 a partir da lista de adjacências

Suponha que Adj guarda as listas de adjacências de $G = (V, E)$.

Quadrado(Adj)
Crie uma cópia Adj' de Adj
para cada $v \in V$ **faça**
  para cada $u \in \mathrm{Adj}[v]$ **faça**
    concatene uma cópia de $\mathrm{Adj}[u]$ a $\mathrm{Adj}'[v]$
para cada $v \in V$ **faça**
  ordene $\mathrm{Adj}'[v]$ em tempo linear (Counting-Sort)
  elimine as repetições de $\mathrm{Adj}'[v]$ em tempo linear
devolva Adj'

Complexidade: $\Theta(VE)$