Recorrências

Questão 1. (CLRS) Exercícios (3ª edição): 4.3-1, 4.3-2, 4.3-3, 4.3-7, 4.3-9, 4.4-1, 4.4-6, 4.4-8, 4.4-9, 4.5-1, 4.5-4,

Questão 2. (CLRS) 4.3-1 Show that the solution of $T(n) = T(n-1) + n$ is $O(n^2)$.

Questão 3. (CLRS) 4.3-2 Show that the solution of $T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ IS $O(\lg n)$.

Questão 4. (CLRS) 4.3-3 We saw that the solution of $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + n$ is $O(n \lg n)$. Show that the solution of this recurrence is also $\Omega(n \lg n)$. Conclude that the solution is $\Theta(n \lg n)$.

Questão 5. (CLRS) 4.3-7 Using the master method in Section 4.5, you can show that the solution to the recurrence $T(n) = 4T(\lfloor n/3 \rfloor) + n$ is $T(n) = O(n \log_3 4)$. Show that a substitution proof with the assumption $T(n) \leq cn^{\log_3 4}$ fails. Then show how to subtract off a lower-order term to make a substitution proof work.

Questão 6. (CLRS) 4.3-9 Solve the recurrence $T(n) = 3T(\sqrt{n}) + \log n$ by making a change of variables. Your solution should be asymptotically tight. Do not worry about whether values are integral

Questão 7. (CLRS) 4.4-1 Use a recursion tree to determine a good asymptotic upper bound on the recurrence $T(n) = 3T(\lfloor n/2 \rfloor) + n$. Use the substitution method to verify your answer.

Questão 8. (CLRS) 4.4-6 Argue that the solution to the recurrence $T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + cn$, where c is a constant, is $\Omega(n \ln n)$ by appealing to a recursion tree.

Questão 9. (CLRS) 4.4-8 Use a recursion tree to give an asymptotically tight solution to the recurrence $T(n) = T(n-a) + T(a) + cn$, where a $a \geq 1$ and $c > 0$ are constants.

Questão 10. (CLRS) 4.4-9 Use a recursion tree to give an asymptotically tight solution to the recurrence $T(n) = T(\alpha n) + T((1-\alpha)n) + cn$, where α is a constant in the range $0 < \alpha < 1$ and $c > 0$ is also a constant.

Questão 11. (CLRS) 4.5-1 Use the master method to give tight asymptotic bounds for the following recurrences.

(a) $T(n) = 2T(n/4) + 1$.
(b) $T(n) = 2T(n/4) + \sqrt{4}$.
(c) $T(n) = 2T(n/4) + n$.
(d) $T(n) = 2T(n/4) + n^2$.

Questão 12. (CLRS) 4.5-4 Can the master method be applied to the recurrence $T(n) = 4T(n/2) + n^2 \lg n$? Why or why not? Give an asymptotic upper bound for this recurrence.

Questão 13. (CLRS) Problemas: 3ª edição: 4-6

Questão 14. (CLRS) Problemas: 2ª edição: 4-7

Questão 15. Encontre a solução da seguinte relação de recorrência. É suficiente encontrar o comportamento assintótico de $T(n)$. Você deve dar argumentos convincentes de que a função $f(n)$ que você encontrou satisfaz $f(n) = \Theta(T(n))$.

$$T(n) = 2T\left(\left\lfloor \frac{n}{\log n} \right\rfloor\right) + 3n, \quad (n > 2), \quad T(1) = 1, \quad T(2) = 2.$$

(Dica: compare essa recorrência com alguma outra recorrência mais fácil de resolver)

[1]Esta lista deve ser feita logo após as aulas do conteúdo correspondente e serve para fixar o conteúdo, confirmar ou identificar as dúvidas. Anote suas dúvidas e procure atendimento! Os exercícios são referências ou transcrições de exercícios dos livros-textos (CLRS/Manber), ou foram gentilmente cedidos por outros professores, particularmente por Flávio Keidi Miyazawa (FKM), Cid Carvalho de Souza e Orlando Lee (CID/OL).

Questão 16. Os números de Fibonacci $F(n)$ podem ser extendidos para valores negativos de n usando a mesma definição: $F(n+2) = F(n+1) + F(n)$, e $F(1) = 1$ e $F(0) = 0$. Assim, temos $F(-1) = 1$, $F(-2) = -1$ e assim por diante. Seja $G(n)$ definido como $F(-n)$. Escreva uma relação de recorrência para $G(n)$ e sugira como resolvê-la. Prove que $G(n) = (-1)^{n+1}F(n)$.

(Solução: Note que $G(n) = (-1) \cdot G(n-1) + G(n-2)$ e $G(0) = 0$ e $G(1) = 1$. Resolvendo pela equação característica, obtemos a equação $a^2 + a - 1 = 0$ que tem solução $a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.)

Projeto de algoritmos por indução

Questão 17. (Manber) O quebra-cabeça das torres de Hanoi é um exemplo de um problem não trival que tem uma solução simples recursiva. Há n discos colocado em uma estaca em ordem decrescente de tamanho. Há duas estacas livres. O objetivo do quebra-cabeças é mover todos os discos, um por vez, da primeira estaca até outra estaca da seguinte maneira. Discos são movidos do topo de uma estaca para o topo de outra. Um disco só pode ser movido se for menor do que todos os outros discos na estaca de destino. Em outras palavas, a ordenação dos discos em ordem decrescente deve ser mantida em todos os momentos. O objetivo é mover todos os discos com o menor número de movimentos.

(a) Projete um algoritmo (por indução) para encontra uma sequência mínima de movimentos que resolve as torres de Hanoi para o problema com n discos.

(b) Quantos movimentos são realizados pelo seu algoritmo? Construa uma relação de recorrência para o número de movimentos e resolva-a (exatamente).

(c) Mostre que o número de movimentos da parte (b) é ótimo, i.e., mostre que não pode existir outro algoritmo que realiza menos movimentos.

Questão 18. (Manber) O seguinte é uma variação do problema das torres de Hanoi. Não assumimos mais que os discos estão em uma única estaca. Eles podem estar distribuídos entre as três estacas, desde que estejam ordenados em cada uma. O propósito dessa variante continua sendo mover todos os discos para uma estaca especificada, com as mesmas restrições do problema original, com tão poucos movimentos quanto possível. Projete um algoritmo para encontra uma menor sequência de movimentos para essa versão das torres de Hanoi para n discos.

Questão 19. Considere o problema da subsequência consecutiva par máxima em que, dado um vetor, queremos encontrar uma subsequência (de números consecutivos) cuja soma seja um número par com o maior valor. Projete um algoritmo usando indução para esse problema. Analise o seu tempo de execução usando uma recorrência.

Divisão e conquista

Questão 20. Considere o problema de encontrar o máximo em um vetor de n números. Projete um algoritmo de divisão e conquista para o problema. Experimente duas abordagens: usar um subproblema de tamanho $n-1$ e dividir o subproblema em dois subproblemas de tamanho aproximadamente $n/2$. Qual a melhor abordagem?

Questão 21. (Kleinberg e Tardos, Solved Exercise 2) Suponha que você está prestando consultoria em uma empresa de investimentos e gostaria de saber os melhores dias de comprar uma ação e vendê-la posteriormente, isso é, em que dia se deve comprar e em que dia se deve vendê-la para maximizar o lucro? Suponha que você tenha a estimativa dos preços de n dias. Escreva um algoritmo que execute em tempo $O(n \log n)$ baseando-se no princípio da divisão e conquista.

Questão 22. Leia a seção sobre o algoritmo de Strassen de CLRS (seção 4.2 na 3ª Edição e seção 28.2 na 2ª Edição).