Projeto e Análise de Algoritmos

Indução

Cid Carvalho de Souza, Cândida Nunes da Silva et al.

Primeiro Semestre de 2017

Técnicas de demonstração

Demonstração Direta

A *demonstração direta* de uma implicação $p \Rightarrow q$ é uma sequência de passos lógicos (implicações):

$$p \Rightarrow p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow p_n \Rightarrow q,$$

que resultam, por transitividade, na implicação desejada.
Cada passo da demonstração é um axioma ou um teorema demonstrado previamente.

Exemplo:

Provar que $\sum_{i=1}^{k}(2i-1) = k^2$.

Demonstração pela Contrapositiva

A *contrapositiva* de $p \Rightarrow q$ é $\neg q \Rightarrow \neg p$.
A contrapositiva é equivalente à implicação original. A veracidade de $\neg q \Rightarrow \neg p$ implica a veracidade de $p \Rightarrow q$, e vice-versa.
A técnica é útil quando é mais fácil demonstrar a contrapositiva que a implicação original.
Para demonstrarmos a contrapositiva de uma implicação, podemos utilizar qualquer técnica de demonstração.

Exemplo:

Provar que se $2 \mid 3m$, então $2 \mid m$.

Demonstração por Contradição

A *Demonstração por contradição* envolve supor absurdamente que a afirmação a ser demonstrada é falsa e obter, através de implicações válidas, uma conclusão contraditória.
A contradição obtida implica que a hipótese absurda é falsa e, portanto, a afirmação é de fato verdadeira.
No caso de uma implicação $p \Rightarrow q$, equivalente a $\neg p \vee q$, a negação é $p \wedge \neg q$.

Exemplo:

$\sqrt{2}$ é irracional.

Demonstração por Casos

Na *Demonstração por Casos*, particionamos o universo de possibilidades em um conjunto finito de casos e demonstramos a veracidade da implicação para cada caso.
Para demonstrar cada caso individual, qualquer técnica de demonstração pode ser utilizada.

Exemplo:

Provar que a soma de dois inteiros x e y de mesma paridade é sempre par.

Princípio da Indução

Demonstração por Indução

Na *Demonstração por Indução*, queremos demonstrar a validade de $P(n)$, uma propriedade P com um parâmetro natural n associado, para todo valor de n.
Há um número infinito de casos a serem considerados, um para cada valor de n. Demonstramos os infinitos casos de uma só vez:

- **Base da Indução:** Demonstramos $P(1)$.
- **Hipótese de Indução:** Supomos que $P(n)$ é verdadeiro.
- **Passo de Indução:** Provamos que $P(n+1)$ é verdadeiro, a partir da hipótese de indução.

Exemplo:

Prove que a soma dos n primeiros naturais ímpares é n^2.

Demonstração por Indução

Outra forma equivalente:

- **Base da Indução:** Demonstramos $P(1)$.
- **Hipótese de Indução:** Supomos que $P(n-1)$ é verdadeiro.
- **Passo de Indução:** Provamos que $P(n)$ é verdadeiro, a partir da hipótese de indução.

Exemplo:

Prove que a soma dos n primeiros naturais ímpares é n^2.

Demonstração por Indução

Às vezes queremos provar que uma proposição $P(n)$ vale para $n \geq n_0$ para algum n_0.

- **Base da Indução:** Demonstramos $P(n_0)$.
- **Hipótese de Indução:** Supomos que $P(n-1)$ é verdadeiro.
- **Passo de Indução:** Provamos que $P(n)$ é verdadeiro, a partir da hipótese de indução.

Exemplo:

Prove que todo inteiro $n \geq 2$ pode ser fatorado como um produto de primos.

Indução Fraca × Indução Forte

A *indução forte* difere da *indução fraca* (ou *simples*) apenas na suposição da hipótese.
No caso da indução forte, devemos supor que a propriedade vale para todos os casos anteriores, não somente para o anterior, ou seja:

- **Base da Indução:** Demonstramos $P(1)$.
- **Hipótese de Indução Forte:** Supomos que $P(k)$ é verdadeiro, para todo $1 \leq k < n$.
- **Passo de Indução:** Provamos que $P(n)$ é verdadeiro, a partir da hipótese de indução.

Exemplo:

Prove que todo inteiro $n \geq 2$ pode ser fatorado como um produto de um ou mais primos.

Exemplo 1

Demonstre que, para inteiros $x \geq 1$ e $n \geq 1$, $x^n - 1$ é divisível por $x - 1$.

Demonstração:

- A **base da indução** é, naturalmente, o caso $n = 1$. Temos que $x^n - 1 = x - 1$, que é obviamente divisível por $x - 1$. Isso encerra a demonstração da base da indução.

Exemplo 1 (cont.)

- A **hipótese de indução** é: *Suponha que $x^n - 1$ seja divisível por $x - 1$ para todo natural x.*
- O **passo de indução** é: *Supondo a h.i., vamos mostrar $x^{n+1} - 1$ é divisível por $x - 1$, para todo natural x.* Primeiro reescrevemos $x^{n+1} - 1$ como

$$x^{n+1} - 1 = x(x^n - 1) + (x - 1).$$

Pela h.i., $x^n - 1$ é divisível por $x - 1$. Portanto, o lado direito da equação acima é, de fato, divisível por $x - 1$.

A demonstração por indução está completa. ■

Exemplo 2

Demonstre que a equação

$$\sum_{i=1}^{n}(3 + 5i) = 2.5n^2 + 5.5n$$

vale para todo inteiro $n \geq 1$.

Demonstração:

- A **base da indução** é, naturalmente, o caso $n = 1$. Temos

$$\sum_{i=1}^{1}(3 + 5i) = 8 = 2.5 \times 1^2 + 5.5 \times 1.$$

Portanto, a somatória tem o valor previsto pela fórmula fechada, demonstrando que a equação vale para $n = 1$.

Exemplo 2 (cont.)

- A **hipótese de indução** é: *Suponha que a equação vale para n.*
- O **passo de indução é:** *Supondo a h.i., vamos mostrar que a equação vale para o valor $n + 1$.* O caminho é simples:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1}(3 + 5i) &= \sum_{i=1}^{n}(3 + 5i) + (3 + 5(n + 1)) \\
&= 2.5n^2 + 5.5n + (3 + 5(n + 1)) \text{ (pela h.i.)} \\
&= 2.5n^2 + 5.5n + 5n + 8 \\
&= 2.5n^2 + 5n + 2.5 + 5.5n + 5.5 \\
&= 2.5(n + 1)^2 + 5.5(n + 1).
\end{aligned}$$

A última linha da dedução mostra que a fórmula vale para $n + 1$.
A demonstração por indução está completa. ■

Exemplo 3

Demonstre que a inequação

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

vale para todo natural n e real x tal que $(1 + x) > 0$.

Demonstração:

- A **base da indução** é, novamente, $n = 1$. Nesse caso, ambos os lados da inequação são iguais a $1 + x$, mostrando a sua validade. Isto encerra a prova do caso base.

Exemplo 3 (cont.)

- A **hipótese de indução** é: *Suponha que a inequação vale para n, isto é, $(1+x)^n \geq 1+nx$ para todo real x tal que $(1+x)>0$.*
- O **passo de indução é:** *Supondo a h.i., vamos mostrar que a inequação vale para o valor $n+1$, isto é, $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$ para todo x tal que $(1+x)>0$.*
  Novamente, a dedução é simples:

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x)\\ &\geq (1+nx)(1+x) \text{ (pela h.i. e } (1+x)>0)\\ &= 1+(n+1)x+nx^2\\ &\geq 1+(n+1)x \text{ (já que } nx^2 \geq 0)\end{aligned}$$

A última linha mostra que a inequação vale para $n+1$, completando a demonstração. ■

Exemplo 4

Demonstre que o número T_n de regiões no plano criadas por n retas em posição geral é igual a

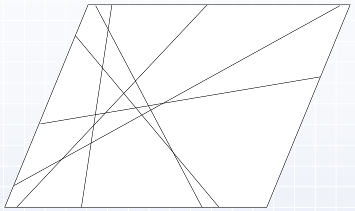
$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}+1.$$

Um conjunto de retas está em posição geral no plano se

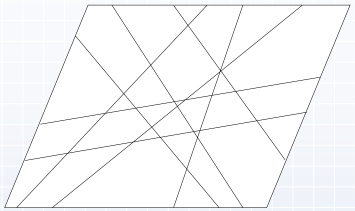
- todas as retas são concorrentes, isto é, não há retas paralelas e
- não há três retas interceptando-se no mesmo ponto.

Exemplo 4 (cont.)

Antes de prosseguirmos com a demonstração vejamos exemplos de um conjunto de retas que está em posição geral e outro que não está.



Em posição geral



Não estão em posição geral

Exemplo 4 (cont.)

Demonstração: A idéia que queremos explorar para o passo de indução é a seguinte: supondo que a fórmula vale para n, adicionar uma nova reta em posição geral e tentar assim obter a validade de $n+1$.

- A **base da indução** é, naturalmente, $n=1$. Uma reta sozinha divide o plano em duas regiões. De fato,

$$T_1 = (1 \times 2)/2+1 = 2.$$

Isto conclui a prova para $n=1$.

Exemplo 4 (cont.)

- A **hipótese de indução** é: *Suponha que* $T_n = (n(n+1)/2) + 1$ *para* n.
- O **passo de indução é:** *Supondo a h.i., vamos mostrar que para* $n+1$ *retas em posição geral vale que*

$$T_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} + 1.$$

Considere um conjunto L de $n+1$ retas em posição geral no plano e seja r uma dessas retas. Então, as retas do conjunto $L' = L \setminus \{r\}$ obedecem à hipótese de indução e, portanto, o número de regiões distintas do plano definidas por elas é $(n(n+1))/2 + 1$.

Exemplo 4 (cont.)

- Além disso, r intersecta as outras n retas em n pontos distintos. O que significa que, saindo de uma ponta de r no infinito e após cruzar as n retas de L', a reta r terá cruzado $n+1$ regiões, dividindo cada uma destas em duas outras.
- Assim, podemos escrever que

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= T_n + n + 1 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + 1 + n + 1 \text{ (pela h.i.)} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} + 1. \end{aligned}$$

Isso conclui a demonstração. ■

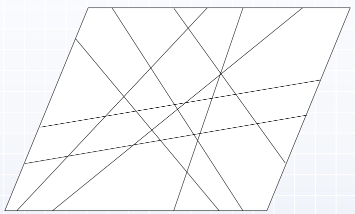
Exemplo 5

Definição:

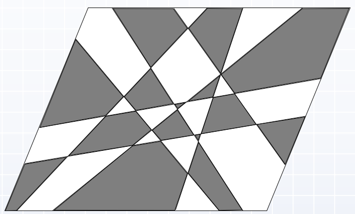
Um conjunto de n retas no plano define regiões convexas cujas bordas são segmentos das n retas. Duas dessas regiões são *adjacentes* se as suas bordas se intersectam em algum segmento de reta não trivial, isto é contendo mais que um ponto.
Uma *k-coloração* dessas regiões é uma atribuição de uma de k cores a cada uma das regiões, de forma que regiões adjacentes recebam cores distintas.

Exemplo 5 (cont.)

Veja exemplos dessas definições:



As regiões convexas



Uma 2-coloração do plano

Exemplo 5 (cont.)

Demonstre que para todo $n \geq 1$, existe uma 2-coloração das regiões formadas por n retas no plano.

Demonstração:

- A **base da indução** é, naturalmente, $n = 1$. Uma reta sozinha divide o plano em duas regiões. Atribuindo-se cores diferentes a essas regiões obtemos o resultado desejado.

  Isto conclui a prova para $n = 1$.

Exemplo 5 (cont.)

- A **hipótese de indução** é: *Suponha que sempre existe uma 2-coloração das regiões formadas por n retas no plano.*
- O **passo de indução é:** *Supondo a h.i., vamos exibir uma 2-coloração para as regiões formadas por $n + 1$ retas no plano.*

  A demonstração do passo consiste em observar que a adição de uma nova reta r divide cada região atravessada por r em duas, e definir a nova 2-coloração da seguinte forma: as regiões em um lado de r mantém a cor herdada da hipótese de indução; as regiões no outro lado de r têm suas cores trocadas.

  Como demonstrar que a 2-coloração obtida nesse processo obedece à definição?

Exemplo 6

Vejamos agora um exemplo onde a indução é aplicada de forma um pouco diferente.

Demonstre que a série S_n definida abaixo satisfaz

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} < 1,$$

para todo inteiro $n \geq 1$.

Demonstração: A base é $n = 1$, para a qual a inequação se reduz a $\frac{1}{2} < 1$, obviamente verdadeira.
Como **hipótese de indução**, supomos que $S_n < 1$ para um valor $n \geq 1$. Vamos mostrar que $S_{n+1} < 1$.

Exemplo 6 (cont.)

Pela definição de S_n, temos $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{2^{n+1}}$.
Pela hipótese de indução, $S_n < 1$. Entretanto, nada podemos dizer acerca de S_{n+1} em consequência da hipótese, já que não há nada que impeça que $S_{n+1} \geq 1$.
A idéia aqui é manipular S_{n+1} um pouco mais:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right] \\ &< \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 1 \text{ (pela h.i.)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

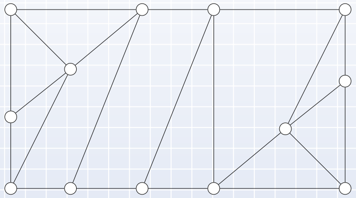
Isto conclui a demonstração. ■

Exemplo 7

Veremos a seguir um exemplo da aplicação de indução em Teoria dos Grafos.

Definição:

Um *grafo planar* é um grafo que pode ser desenhado no plano sem que suas arestas se cruzem. Um *grafo plano* é um desenho de grafo planar no plano, sem cruzamento de arestas (há inúmeros desenhos possíveis). Veja um exemplo de um grafo planar e um desenho possível dele no plano.



Exemplo 7 (cont.)

Definição:

- Um grafo plano define um conjunto F de *faces* no plano, que são as regiões contínuas **maximais** do desenho, livre de segmentos de retas ou pontos.
- Os *componentes* de um grafo são seus subgrafos maximais para os quais existe um caminho entre quaisquer dois de seus vértices.
- Dado um grafo plano G, com v vértices, e arestas, f faces e c componentes, a *Fórmula de Euler* (F.E.) é a equação

$$v - e + f = 1 + c.$$

Queremos demonstrar a Fórmula de Euler por indução.

Exemplo 7 (cont.)

- Há várias possibilidades para se fazer indução neste caso. No livro de U. Manber encontra-se uma indução em duas variáveis, a chamada *indução dupla*, primeiro em v depois em f. Além disso, lá a Fórmula de Euler está descrita diferentemente, sem especificar o número de componentes. Isso torna a indução um pouco mais complicada.
- Nossa formulação é mais geral simplificando a demonstração. Esse um fenômeno comum em matemática: formulações mais poderosas quase sempre resultam em demonstrações mais simples.
- Vamos demonstrar a F.E. por indução em e, o número de arestas do grafo plano G.

Exemplo 7 (cont.)

Demonstração:

- A base da indução é $e = 0$. Temos $f = 1$ e $c = v$ e

$$v - e + f = v + 1 = 1 + c$$

como desejado. Isso demonstra a base.
- A hipótese de indução é: *Suponha que a F.E. vale para todo grafo com $e - 1$ arestas.*
- Seja G um grafo plano com e arestas, v vértices, f faces e c componentes. Seja a uma aresta qualquer de G. A remoção de a de G cria um novo grafo plano G' com $v' = v$ vértices e $e' = e - 1$ arestas, f' faces e c' componentes.
A remoção de a de G pode ou não ter desconectado um componente de G. Caso tenha, $c' = c + 1$ e $f' = f$ (por quê?). Caso contrário, teremos $c' = c$ e $f' = f - 1$ (por quê?).

Exemplo 7 (cont.)

- No caso em que houve a criação de novo componente, temos

$$\begin{aligned} v - e + f &= v' - (e'+1) + f' \\ &= 1 + c' - 1 \text{ (pela h.i.)} \\ &= c' \\ &= 1 + c. \end{aligned}$$

- Caso contrário obtemos

$$\begin{aligned} v - e + f &= v' - (e'+1) + (f'+1) \\ &= v' - e' + f' \\ &= 1 + c' \text{ (pela h.i.)} \\ &= 1 + c. \end{aligned}$$

Em ambos casos obtemos o resultado desejado. ■

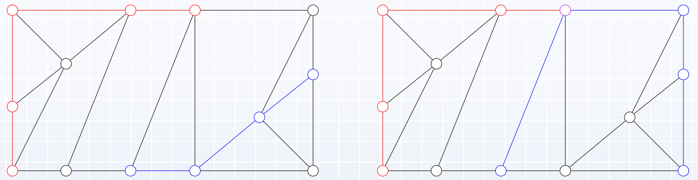
Exemplo 8

Este é um exemplo de indução forte. Antes algumas definições:

- Seja G um grafo não direcionado. O **grau** de um vértice v de G é o número de arestas incidentes a v, onde laços (arestas cujos extremos coincidem) são contados duas vezes.
- Um vértice é **ímpar** (**par**) se o seu grau é ímpar (par).
  O número de vértices ímpares em um grafo é sempre par (por quê?).

Exemplo 8 (cont.)

Dois caminhos em G são **aresta-disjuntos** se não têm arestas em comum. Veja exemplos de caminhos aresta-disjuntos em um grafo:



Exemplo 8 (cont.)

Teorema:

Seja G um grafo (não direcionado) conexo e I o conjunto de vértices ímpares de G. Então é possível encontrar alguma partição de I em $|I|/2$ pares e caminhos aresta-disjuntos cujos extremos são os vértices de cada par.

Demonstração: A demonstração é por indução no número de arestas de G. Seja e esse número.

- A base da indução trata do caso $e = 0$, ou seja, de um grafo sem arestas e com um único vértice (pois G é conexo). Neste caso, $|I| = 0$ e o teorema é trivialmente verdadeiro.

Exemplo 8 (cont.)

- A hipótese de indução (forte) é:
Suponha que para todos os grafos conexos com menos que e arestas vale o resultado do enunciado do teorema.

  Vamos mostrar que o resultado vale para todo grafo conexo com e arestas.
- Seja então G um grafo qualquer com e arestas. Se $I = \emptyset$ não há nada que provar. Caso contrário existe pelo menos um par u, v de vértices de I. Como G é conexo, existe um caminho π em G cujos extremos são u, v.
- Seja G' o grafo obtido removendo-se de G as arestas de π. O grafo G' tem menos que e arestas e dois vértices ímpares a menos.
- Embora seja tentador aplicar a h.i. a G', nada garante que G' seja conexo. Se não for, a h.i. não se aplica.

Exemplo 8 (cont.)

- É possível consertar a situação mudando a hipótese para:
Suponha que para todos os grafos com menos que e arestas vale o seguinte: é possível encontrar alguma partição de I em $|I|/2$ pares, cada par na mesma componente, e os caminhos entre esses pares.

  Veja que removemos a restrição de conexidade, fortalecendo a hipótese.
- Com essa nova hipótese, a demonstração é a mesma. Aqui escolhemos x e y na mesma componente para garantir a existência do caminho π. Agora podemos aplicar a h.i. a G': os caminhos de G' e π são todos aresta-disjuntos e formam o conjunto de caminhos desejados para G. ■

Exercício: Demonstre esse mesmo teorema usando indução fraca

Exemplo 9

Este é um exemplo de **indução reversa**, cujo princípio pode ser enunciado da seguinte forma:

Suponha que
- *a proposição $P(n)$ vale para um subconjunto infinito dos números naturais, e*
- *se $P(n)$ vale para n então $P(n-1)$ também vale.*

Então $P(n)$ vale para todo natural n.

Você consegue ver por que esse é um processo indutivo igualmente legítimo?

Exemplo 9 (cont.)

Teorema:
Se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são todos números reais positivos, então

$$(x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Demonstração: Em dois passos:
1. Vamos mostrar que a inequação vale para todos os valores de n que são potências 2, isto é $n = 2^k$, para k inteiro ≥ 0. Faremos esse passo por indução simples em k. Esse é o conjunto infinito de valores da indução reversa.
2. Mostraremos que se a inequação é verdadeira para n, então é verdadeira para $n-1$.

Exemplo 9 (cont.)

- Se $n = 2^0 = 1$, então o teorema vale trivialmente.
- Se $n = 2^1 = 2$, a inequação também é válida já que

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$$

pode ser verificada tomando-se o quadrado dos dois lados.

$$\begin{array}{rcll} \sqrt{x_1x_2} & \leq & (x_1+x_2)/2 & \Leftrightarrow \\ x_1x_2 & \leq & (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2)/4 & \Leftrightarrow \\ 2x_1x_2 & \leq & x_1^2 + x_2^2 & \Leftrightarrow \\ 0 & \leq & x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 & \Leftrightarrow \\ 0 & \leq & (x_1 - x_2)^2 & \end{array}$$

Exemplo 9 (cont.)

(h.i.) Vamos supor agora que a inequação vale para $n = 2^k$, para k.
Considere $2n = 2^{k+1}$ e reescreva o lado esquerdo da inequação como

$$(x_1x_2 \ldots x_{2n})^{\frac{1}{2n}} = \sqrt{(x_1x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}}(x_{n+1}x_{n+2} \ldots x_{2n})^{\frac{1}{n}}}.$$

Tome $y_1 = (x_1x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}}$ e $y_2 = (x_{n+1}x_{n+2} \ldots x_{2n})^{\frac{1}{n}}$. Portanto

$$(x_1x_2 \ldots x_{2n})^{\frac{1}{2n}} = \sqrt{y_1y_2} \leq \frac{y_1 + y_2}{2}$$

pelo caso $n = 2$ já demonstrado.

Exemplo 9 (cont.)

Além disso, podemos aplicar a h.i. a y_1 e y_2, obtendo

$$y_1 \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},$$

$$y_2 \leq \frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{2n}}{n}.$$

Substituindo esses dois valores na inequação acima obtemos o resultado desejado para $2n$.

$$\begin{array}{rcl} (x_1x_2 \ldots x_{2n})^{\frac{1}{2n}} & = & \sqrt{y_1y_2} \\ & \leq & \dfrac{y_1 + y_2}{2} \\ & = & \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{2n} + \dfrac{x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{2n}}{2n} \end{array}$$

Exemplo 9 (cont.)

Vamos agora utilizar o princípio de indução reversa. Suponha que o resultado vale para n e vamos mostrar que vale para $n - 1$.

Dados $n - 1$ números positivos $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, defina

$$z := \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n - 1}.$$

Por h.i., o teorema aplica-se a $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, z$. Portanto

$$\begin{array}{rcl} (x_1x_2 \ldots x_{n-1}z)^{\frac{1}{n}} & \leq & \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + z}{n} \\ & = & z. \end{array}$$

Exemplo 9 (cont.)

Então
$$(x_1x_2\dots x_{n-1}z)^{\frac{1}{n}} \leq z.$$
Elevando ambos os lados à potência $\frac{n}{n-1}$ obtemos
$$(x_1x_2\dots x_{n-1}z)^{\frac{1}{n-1}} \leq z^{\frac{n}{n-1}}.$$

Finalmente, multiplicando por $z^{-\frac{1}{n-1}}$ ambos os lados, obtemos
$$(x_1x_2\dots x_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \leq z = \frac{x_1+x_2+\dots+x_{n-1}}{n-1},$$
o que prova a asserção para $n-1$, completando a demonstração. ■

Algumas armadilhas - redução × expansão

- A demonstração do passo da indução simples supõe a proposição válida para um $n-1$ e mostra que é válida para n.
- Portanto, devemos sempre partir de um caso geral n e **reduzi-lo** ao caso $n-1$. Às vezes porém, parece mais fácil pensar no caso $n-1$ e **expandi-lo** para o caso geral n.
- O problema do procedimento de expansão é que ele não é suficientemente geral, de forma que obtenhamos a implicação, a partir do caso $n-1$, para um caso **geral** n.

Algumas armadilhas - outros passos mal dados

O que há de errado com a demonstração da seguinte proposição, claramente falsa ?

Proposição:

Considere n retas no plano, concorrentes duas a duas. Então existe um ponto comum a todas as n retas.

Demonstração:

- A base da indução é o caso $n=1$, claramente verdadeiro.
- Para o caso $n=2$, também é fácil ver que a proposição é verdadeira.
- Considere a proposição válida para $n-1$, $n>2$, e considere n retas no plano concorrentes duas a duas.

Algumas armadilhas - outros passos mal dados

Pela h.i., todo subconjunto de $n-1$ das n retas têm um ponto em comum. Sejam S_1, S_2 dois desses subconjuntos, distintos entre si.

A interseção $S_1 \cap S_2$ contém $n-2$ retas. Portanto, o ponto em comum às retas de S_1 tem que ser igual ao ponto em comum às retas de S_2, senão duas retas distintas de $S_1 \cap S_2$ se tocariam em mais que um ponto, o que não é possível.

Portanto, a asserção vale para n, completando a demonstração. *Certo?*

Errado!

O argumento no passo de indução funciona para todo $n>2$, exceto $n=3$. pois nesse caso $S_1 \cap S_2$ contém apenas uma reta. Não é possível concluir a validade para $n=3$. De fato, a afirmação não vale para $n \geq 3$.

Invariantes de laço e demonstração de correção

Ordena-Por-Inserção

ORDENA-POR-INSERÇÃO(A, n)
1 **para** $j \leftarrow 2$ **até** n **faça**
2 $\quad$ $chave \leftarrow A[j]$
3 $\quad$ $\triangleright$ Insere $A[j]$ no subvetor ordenado $A[1..j-1]$
4 $\quad$ $i \leftarrow j - 1$
5 $\quad$ **enquanto** $i \geq 1$ **e** $A[i] > chave$ **faça**
6 $\quad\quad$ $A[i+1] \leftarrow A[i]$
7 $\quad\quad$ $i \leftarrow i - 1$
8 $\quad$ $A[i+1] \leftarrow chave$

Até agora:

- vimos que o algoritmo para
- e analisamos sua complexidade de tempo

O que falta fazer ?

- Verificar se ele produz uma resposta correta.

Invariantes de laço e provas de corretude

- Definição: um invariante de um laço é uma propriedade que é satisfeita pelas variáveis do algoritmo a cada execução completa do laço.
- Ele deve ser escolhido de modo que, ao término do laço, tenha-se uma propriedade útil para mostrar a corretude do algoritmo.
- A prova de corretude de um algoritmo normalmente requer que sejam encontrados e provados invariantes dos vários laços que o compõem.
- Em geral, é mais difícil descobrir um invariante apropriado do que mostrar sua validade se ele for dado de bandeja...

Exemplo de invariante

ORDENA-POR-INSERÇÃO(A, n)
1 **para** $j \leftarrow 2$ **até** n **faça**
2 $\quad$ $chave \leftarrow A[j]$
3 $\quad$ $\triangleright$ Insere $A[j]$ no subvetor ordenado $A[1..j-1]$
4 $\quad$ $i \leftarrow j - 1$
5 $\quad$ **enquanto** $i \geq 1$ **e** $A[i] > chave$ **faça**
6 $\quad\quad$ $A[i+1] \leftarrow A[i]$
7 $\quad\quad$ $i \leftarrow i - 1$
8 $\quad$ $A[i+1] \leftarrow chave$

Invariante principal de ORDENA-POR-INSERÇÃO: (i1)

No começo de cada iteração do laço **para** das linha 1–8, o subvetor $A[1 \ldots j-1]$ está ordenado.

Corretude de algoritmos por invariantes

A estratégia "típica" para mostrar a corretude de um algoritmo iterativo através de invariantes segue os seguintes passos:

1. Mostre que o invariante vale no início da primeira iteração (trivial, em geral)
2. Suponha que o invariante vale no início de uma iteração qualquer e prove que ele vale no ínicio da próxima iteração
3. Conclua que se o algoritmo para e o invariante vale no ínicio da última iteração, então o algoritmo é correto.

   Note que (1) e (2) implicam que o invariante vale no início de qualquer iteração do algoritmo. Isto é similar ao método de indução matemática ou indução finita!

Corretude da ordenação por inserção

Vamos verificar a corretude do algoritmo de ordenação por inserção usando a técnica de **prova por invariantes de laços**.

Invariante principal: (i1)

No começo de cada iteração do laço **para** das linhas 1–8, o subvetor $A[1 \dots j-1]$ está ordenado.

1						j				n
20	25	35	40	44	55	38	99	10	65	50

- Suponha que o invariante vale.
- Então a corretude do algoritmo é "evidente". **Por quê?**
- No ínicio da última iteração temos $j = n+1$. Assim, do invariante segue que o (sub)vetor $A[1 \dots n]$ está ordenado!

Melhorando a argumentação

Ordena-Por-Inserção(A, n)

1 **para** $j \leftarrow 2$ **até** n **faça**
2 $\quad chave \leftarrow A[j]$
3 $\quad \triangleright$ Insere $A[j]$ no subvetor ordenado $A[1 \dots j-1]$
4 $\quad i \leftarrow j-1$
5 $\quad$ **enquanto** $i \geq 1$ **e** $A[i] > chave$ **faça**
6 $\quad\quad A[i+1] \leftarrow A[i]$
7 $\quad\quad i \leftarrow i-1$
8 $\quad A[i+1] \leftarrow chave$

Um invariante mais preciso: (i1')

No começo de cada iteração do laço **para** das linhas 1–8, o subvetor $A[1 \dots j-1]$ é uma permutação ordenada do subvetor original $A[1 \dots j-1]$.

Esboço da demonstração de (i1')

1. Validade na primeira iteração: neste caso, temos $j = 2$ e o invariante simplesmente afirma que $A[1 \dots 1]$ está ordenado, o que é evidente.
2. Validade de uma iteração para a seguinte: segue da discussão anterior. O algoritmo empurra os elementos maiores que a chave para seus lugares corretos e ela é colocada no espaço vazio.

   Uma demonstração mais formal deste fato exige invariantes auxiliares para o laço interno **enquanto**.
3. Corretude do algoritmo: na última iteração, temos $j = n+1$ e logo $A[1 \dots n]$ está ordenado com os elementos originais do vetor. Portanto, o algoritmo é correto.

Invariantes auxiliares

No início da linha 5 valem os seguintes invariantes:

(i2) $A[1 \ldots i]$, *chave* e $A[i+2 \ldots j]$ contém os elementos de $A[1 \ldots j]$ antes de entrar no laço que começa na linha 5.

(i3) $A[1 \ldots i]$ e $A[i+2 \ldots j]$ são crescentes.

(i4) $A[1 \ldots i] \leq A[i+2 \ldots j]$

(i5) $A[i+2 \ldots j] > chave$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Invariantes (i2) a (i5)}\\ +\text{condição de parada na linha 5}\\ +\text{atribuição da linha 7}\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{invariante (i1')}$$

Demonstração? Mesma que antes.

Corretude do Mergesort

```
MERGESORT(A, p, r)
  se p < r
     então q ← ⌊(p + r)/2⌋
           MERGESORT(A, p, q)
           MERGESORT(A, q + 1, r)
           INTERCALA(A, p, q, r)
```

O algoritmo está correto?

A corretude do algoritmo Mergesort apoia-se na corretude do algoritmo Intercala e pode ser demonstrada **por indução** em $n := r - p + 1$.

Corretude de Intercala

Invariante principal de Intercala:

No começo de cada iteração do laço das linhas 7–12, vale que:

1. $A[p \ldots k-1]$ está ordenado,
2. $A[p \ldots k-1]$ contém todos os elementos de $B[p \ldots i-1]$ e de $B[j+1 \ldots r]$,
3. $B[i] \geq A[k-1]$ e $B[j] \geq A[k-1]$.

Exercício. Prove que a afirmação acima é de fato um invariante de INTERCALA.

Exercício. (fácil) Mostre usando o invariante acima que INTERCALA é correto.

Invariantes de laço e indução matemática

Outro exemplo:

Usando *invariante de laços*, provamos a corretude de um algoritmo que converte um número inteiro para a sua representação binária.

Converte_Binário(n)

```
▷ na saída, b contém a representação binária de n
t ← n;
k ← −1;
enquanto t > 0 faça
    k ← k + 1;
    b[k] ← t mod 2;
    t ← t div 2;
retornar b.
```

Invariantes de laço e indução matemática

Invariante:

Ao entrar no laço 4–7, o inteiro m representado pelo subvetor $b[0\dots k]$ é tal que $n = t.2^{k+1} + m$.

Demonstração: seja $j = k + 1$ ($j =\#$ execuções da linha 4)

Deseja-se provar por indução em j que $n = t.2^j + m$.

Base da indução: $j = 0$. Trivial, pois antes de fazer o laço, $m = 0$ (subvetor vazio de b) e $n = t$ pela linha 2.

Hipótese de indução: no início da execução da linha 4 na j^{a} iteração, tem-se que $n = t(j).2^j + m(j)$, sendo $m(j) = \sum_{i=0}^{j-1} 2^i.b[i]$.

Invariantes de laço e indução matemática

Passo de indução: antes da execução da linha 4 na $(j+1)^{\text{a}}$ iteração, deve valer que $n = t(j+1).2^{j+1} + m(j+1)$, com $m(j) = \sum_{i=0}^{j} 2^i.b[i]$.

Pelas linhas 6 e 7, respectivamente, tem-se que:
$t(j+1) = t(j)\ \texttt{div}\ 2$ e $m(j+1) = [t(j) \mod 2].2^j + m(j)$.

Caso $t(j) = 2p$ *(par)*:

$$\begin{aligned} t(j+1).2^{j+1} + m(j+1) &= p.2^{j+1} + m(j) = 2p.2^j + m(j) \\ &= t(j).2^j + m(j) = n \quad \text{(HI)} \end{aligned}$$

Caso $t(j) = 2p + 1$ *(ímpar)*:

$$\begin{aligned} t(j+1).2^{j+1} + m(j+1) &= p.2^{j+1} + m(j) + 2^j = (2p+1).2^j + m(j) \\ &= t(j).2^j + m(j) = n \quad \text{(HI)} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

O algoritmo está correto pois, ao término do laço, $t = 0$ e passa-se da linha 4 direto para a linha 8. Pelo invariante, neste momento $n = m$.