Lista de exercícios de fixação[1] – Programação Linear – IC-UNICAMP – 1º semestre de 2017

Os exercícios marcados com (BJS) foram retirados do M.S. Bazaraa, J.J. Jarvis e H.D. Sherali, *Linear Programming and Network Flows*, segunda edição, Wiley. Há outros exercícios de modelagem no livro.

## Programação Linear

**Questão 1.** Desenhe o politopo para o seguinte PL. Depois descubra a direção normal do vetor da função objetiva e, usando o desenho, descubra o valor do programa:

$$\begin{array}{rl} \min & 7x+3y \\ \text{s.a} & 2x+3y \leq 20 \\ & 3x-6y \leq -12 \\ & y \geq 1 \\ & 2x+3y \geq 10 \end{array}$$

**Questão 2.** (BJS) Um moinho fabrica comida para gado, ovelhas e galinhas. Isto é feito misturando-se os seguintes ingredientes: milho, calcário, soja, e ração de peixe. Estes ingredientes contêm os seguintes nutrientes: vitaminas, proteína, cálcio e gordura. Os ingredientes dos nutrientes em cada quilo estão indicados na tabela abaixo.

| | Nutrientes | | | |
|---|---|---|---|---|
| Ingrediente | Vitaminas | Proteína | Cálcio | Gordura |
| Milho | 8 | 10 | 6 | 8 |
| Calcário | 6 | 5 | 10 | 6 |
| Soja | 10 | 12 | 6 | 6 |
| Ração de peixe | 4 | 8 | 6 | 9 |

O moinho é contratado para produzir 10, 6 e 8 toneladas de comida para gado, ovelhas e galinhas. Ele tem a sua disposição 6 toneladas de milho, 10 toneladas de calcário, 4 toneladas de soja e 5 toneladas de ração de peixe. O preço por quilo desses ingredientes é respectivamente R$20, R$12, R$24 e R$12. As quantidades mínima e máxima permitidas dos nutrientes em um quilo de comida para gado, ovelhas e galinhas estão indicadas abaixo.

| | Nutrientes | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Vitaminas | | Proteína | | Cálcio | | Gordura | |
| Comida p/ | Min | Max | Min | Max | Min | Max | Min | Max |
| Gado | 6 | $\infty$ | 6 | $\infty$ | 7 | $\infty$ | 4 | 8 |
| Ovelhas | 6 | $\infty$ | 6 | $\infty$ | 6 | $\infty$ | 4 | 6 |
| Galinhas | 4 | 6 | 6 | $\infty$ | 6 | $\infty$ | 4 | 6 |

Formule este problema como um programa linear que minimiza o custo total de produção.

**Questão 3.** (BJS) Uma fábrica de aço produz quatro tamanhos de perfil I (*"I-beam"*, consulte a Wikipedia!): pequeno, médio, grande e extragrande. Esses perfis podem ser produzidas por qualquer das máquinas A, B e C. Os comprimentos em metros de perfil I que podem ser produzidas nas máquinas em uma hora estão indicadas abaixo.

| Beam | A | B | C |
|---|---|---|---|
| pequeno | 300 | 600 | 800 |
| médio | 250 | 400 | 700 |
| grande | 200 | 350 | 600 |
| extragrande | 100 | 200 | 300 |

[1]Esta lista deve ser feita logo após as aulas do conteúdo correspondente e serve para fixar o conteúdo, confirmar ou identificar as dúvidas. Anote suas dúvidas e procure atendimento! Os exercícios são referências ou transcrições de exercícios dos livros-textos (CLRS/Manber), ou foram gentilmente cedidos por outros professores, particularmente por Flávio Keidi Miyazawa (FKM), Cid Carvalho de Souza e Orlando Lee (CID/OL).

Suponha que cada máquina pode ser usada até 50 horas por semana e que os custos de operação (por hora) das máquinas são respectivamente R$30, R$50 e R$80. Suponha ainda que 10.000, 8.000, 6.000 e 6.000 metros dos diferentes tipos de I beams são requisitados por semana. Formule o problema de escalonar as máquinas de modo a minimizar o custo total de produção como um programa linear.

**Questão 4.** (BJS) Uma companhia está planejando a manufatura de 3 produtos em quatro máquinas. Cada produto pode ser manufaturado em qualquer das máquinas. Os custo de produção por unidade estão indicados na tabela:

| | Máquinas | | | |
|---|---|---|---|---|
| Produto | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 4 | 4 | 5 | 7 |
| 2 | 6 | 7 | 5 | 6 |
| 3 | 12 | 10 | 8 | 11 |

Os tempos em horas necessário para produzir cada unidade de um produto em cada máquina estão indicados abaixo.

| | Máquinas | | | |
|---|---|---|---|---|
| Produto | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 0,3 | 0,25 | 0,2 | 0,2 |
| 2 | 0,2 | 0,3 | 0,2 | 0,25 |
| 3 | 0,8 | 0,6 | 0,6 | 0,5 |

Suponha que $4000, 5000$ e $3000$ unidades dos produtos são exigidos e que os tempos em horas disponíveis para cada máquina são $1500, 1200, 1500$ e $2000$, respectivamente. Formule o problema como um programa linear visando minimizar o custo total.

**Questão 5.** Mostre que se $A$ é a matriz de incidência de um grafo orientado e $B$ uma matriz obtida a partir de $A$ transformando alguns elementos não nulos em 0, então $B$ é totalmente unimodular.

## Problema de fluxo de custo mínimo

**Questão 6.** (BJS) Uma agência de planejamento governamental quer determinar as fontes de combustível para uso de $n$ galpões entre $m$ empresas que oferecem o serviço. A quantidade máxima oferecida pela empresa $i$ é $a_i$ litros e a demanda do galpão $j$ é de $b_j$ litros. Seja $c_{ij}$ o custo de transporte por unidade da empresa $i$ para o galpão $j$. Formule o problema de minimizar o custo total de compra pela agência como um programa linear.

**Questão 7.** Seja $G = (V, E)$ um grafo orientado com conjunto de nós $N$ e arcos $A$ e dois nós distintos $s$ e $t$. Apresente um poliedro definido por um vetor de variáveis $x \in [0, 1]^{|E|}$ indexado em $E$, com número polinomial de restrições e conjunto de vértices do politopo $\mathscr{V}$, tal que, se $\hat{x} \in \mathscr{V}$, então $\hat{x}$ representa os caminhos de $s$ a $t$, com $\hat{x}_a = 0$ para todo $a \in \delta^-(s) \cup \delta^+(t)$. Isso é, são caminhos sem arcos entrando em $s$ ou saindo de $t$.

**Questão 8.** *Problema do do b-emparelhamento máximo em grafo bipartido:* Considere o problema em que são dados um grafo bipartido $G = (V, E)$ com partes $A$ e $B$, uma função de peso nas arestas $w : E \to \mathbb{Q}$ e uma função $b : V \to Z^+$ e queremos encontrar um conjunto de arestas $M$ tal que o número de arestas de $M$ incidentes a um vértice $v$ é no máximo $b_v$. O objetivo é encontrar uma solução $M$ que maximiza o peso total das arestas.

**Questão 9.** Considere a seguinte formulação para o problema do caminho mínimo:

$$
(P) \quad \begin{array}{ll}
\min & \sum_{e\in E} w_e x_e \\
\text{s.a.} & \left\{\begin{array}{lll}
\sum_{e\in\delta^+(v)} x_e - \sum_{e\in\delta^-(v)} x_e = 0 & \forall v \in V\setminus\{s,t\} \\
\sum_{e\in\delta^+(s)} x_e = 1 & \\
\sum_{e\in\delta^-(t)} x_e = 1 & \\
0 \le x_e \le 1 & \forall e \in E\setminus(\delta^-(s)\cup\delta^+(t)) \\
0 \le x_e \le 0 & \forall e \in \delta^-(s)\cup\delta^+(t)
\end{array}\right.
\end{array}
$$

Mostre que o poliedro associado a esta formulação é inteiro.

**Questão 10.** Determine o dual do seguinte programa linear

$$
\begin{array}{lccc}
\min & cx+ly & & \\
\text{s.a} & Ax+By & \le & b \\
 & Cx+Dy & = & d \\
 & x\ge 0 & &
\end{array} .
$$

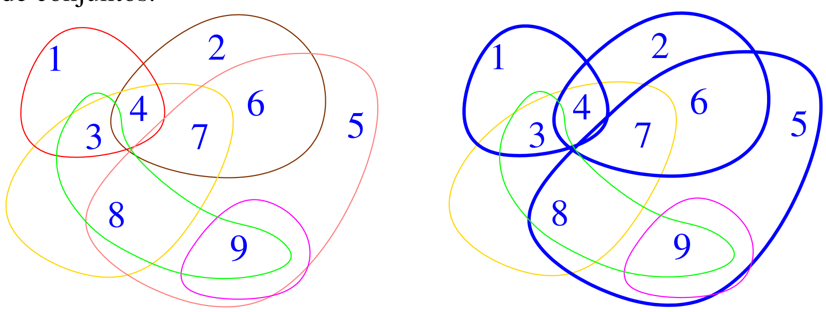
***(a)*** Suponha que $A,B,C,D,c,l,b,d$ são números. Atente-se para as restrições de sinal das variáveis do primal e dual.

***(b)*** Verifique o teorema fraco da dualidade para o par de programas lineares obtido, i.e., mostre que o valor de uma solução viável para o programa primal é maior que o valor de uma solução viável para o programa dual.

***(c)*** Agora suponha que $A,B,C,D$ são matrizes e $c,l,b,d$ são vetores de tamanho apropriado e dê o programa dual correspondente, também em notação de matrizes.

## Programação linear inteira

**Questão 11.** *Problema da Cobertura por Conjuntos* Considere um conjunto de elementos $E$ e uma família de conjuntos $\mathscr{S}$ de $E$. Uma cobertura de $E$ é uma coleção de conjuntos $S \subseteq \mathscr{S}$ cuja a união é $E$, ou seja, $\bigcup_{X\in S} X = E$. Na figura à esquerda há um exemplo de elementos e família de conjuntos e na figura à direita há uma cobertura de conjuntos.




No problema da cobertura por conjuntos mínima, são dados dados $E$, $\mathscr{S}$ e uma função de custo $c : \mathscr{S} \to \mathbb{Q}$ (dizemos que $c(X)$ é o custo do conjunto $X$). O objetivo é encontrar uma cobertura por conjuntos $S$ que minimiza

$$\sum_{X\in S} c(X).$$

**Questão 12.** Suponha que você tenha um problema e deseje escrevê-lo como um programa linear inteiro. Dê estratégias para representar decisões a serem tomadas utilizando variáveis de sua formulação.

***(a)*** Uma variável de decisão é $x$, que um número racional (possivelmente fracionário) que representa a vasão de água em um tubo de distribuição. Para evitar contaminação dá água devida à baixa pressão, a a variável $x$ só pode assumir valor 0 (quando não passa água pelo tubo), ou valores acima de uma constante $K$. Como você poderia restringir essa variável?

***(b)*** Um atacadista tem um sistema de vendas em que quanto mais se compra, maior o taxa de desconto. Entre as regras, existem $m$ níveis $b_1 < b_2 < \cdots < b_m$. Se $x$ representa a taxa de desconto fornecida e foram vendidos $t$ itens, então o desconto permitido é de no máximo $x \leq b_t$; se forem vendidos mais de $m$ itens, o desconto é de no máximo $b_m$. Como você pode restringir as variáveis $t$ e $x$?