Projeto e Análise de Algoritmos

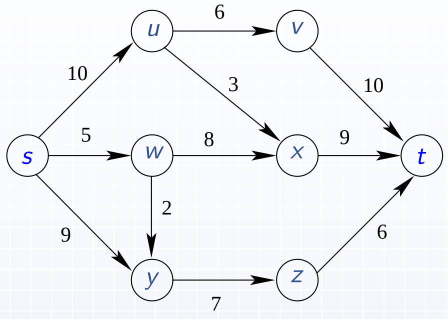
Fluxo em redes

Cid Carvalho de Souza, Cândida Nunes da Silva et al.

Primeiro Semestre de 2017

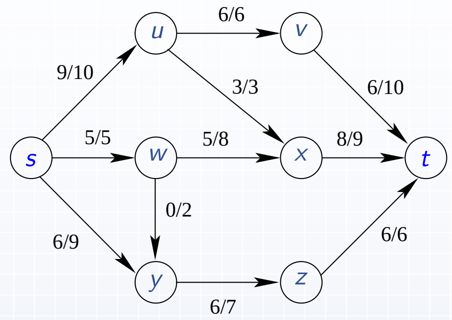
Problemas de fluxo

Problema do Fluxo Máximo



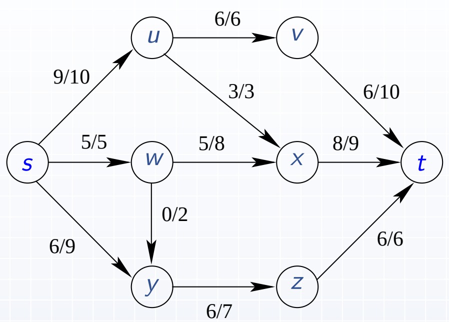
Considere um grafo direcionado que representa uma rede de fluxo. Imagine que um vértice fonte s produz um certo material que escoa através da rede para um vértice terminal t, onde o material é consumido.

Problema do Fluxo Máximo



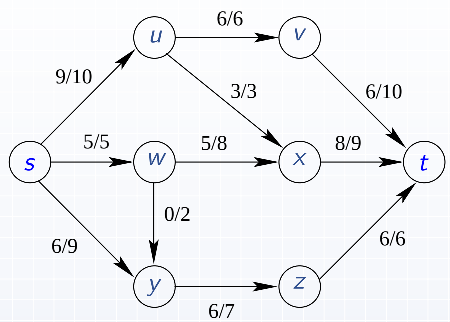
Intuitivamente, o fluxo do material em qualquer ponto da rede é a taxa em que ele se move. Podemos interpretar cada aresta como um conduto para o material, tendo uma capacidade que representa a taxa máxima que o conduto suporta.

Problema do Fluxo Máximo



Vértices podem ser vistos como pontos de junção destes condutos, e com exceção da fonte e do terminal, a quantidade de material que chega em um vértice **é igual à** quantidade de material que sai deste (**conservação de fluxo**).

Problema do Fluxo Máximo



Redes de fluxos servem para modelar várias situações, tais como líquido (água, petróleo) fluindo através de canos, partes de produtos através de linhas de montagem, correntes através de redes elétricas e informação (bits) através de redes de comunicação.

Redes e fluxos

Uma rede (de fluxo) é uma quádrupla (G, c, s, t) onde

- $G = (V, E)$ é um grafo direcionado,
- $c : E \mapsto \mathbb{R}_+$ associa a cada aresta (u, v) em E uma capacidade não negativa $c(u, v)$ e
- s e t são vértices especificados de G chamados de fonte e terminal, respectivamente.

Redes e fluxos

Adotamos as seguintes hipóteses para uma rede (G, c, s, t):

- E não contém laços,
- se $(u, v) \notin E$ então denotamos $c(u, v) = 0$,
- todo vértice pertence a algum caminho de s a t e
- se E contém uma aresta (u, v) então E **não contém** a aresta reversa (v, u).

A última condição é necessária por simplicidade, mas veremos depois que ela pode ser facilmente garantida (ao custo de aumentar o grafo).

Redes e fluxos

Seja (G, c, s, t) uma rede. Um fluxo em (G, c, s, t) é uma função $f : V \times V \mapsto \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

Restrição de capacidade:
para todo $u, v \in V$ temos que

$$0 \leq f(u, v) \leq c(u, v).$$

Conservação de fluxo (lei de Kirchhoff):
para todo $u \in V - \{s, t\}$ temos que

$$\sum_{v \in V} f(v, u) = \sum_{v \in V} f(u, v).$$

Note que se $(u, v) \notin E$ então $f(u, v) = 0 = c(u, v)$.
Chamamos o valor $f(u, v)$ de fluxo que passa por (u, v).

Redes e fluxos

O valor de um fluxo f é definido como:

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v) - \sum_{v \in V} f(v, s),$$

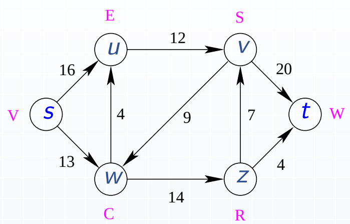
ou seja, é o fluxo que sai da fonte menos o fluxo que entra.

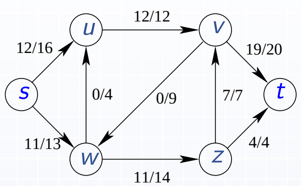
Aqui a notação $|.|$ denota o valor do fluxo e **não** valor absoluto nem cardinalidade.

Estamos interessados no seguinte problema.

Problema do Fluxo Máximo. Dada uma rede (G, c, s, t) encontre um fluxo f nesta rede que maximize $|f|$.

Um exemplo

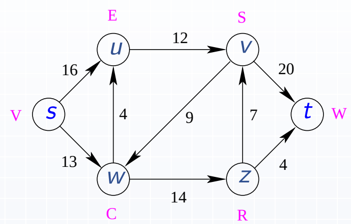


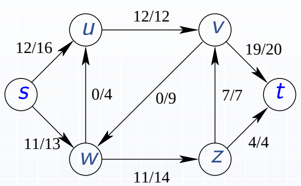


Vancouver, Edmonton, Saskatoon, Calgary, Regina, Winnipeg.

A Companhia Lucky Puck tem uma fábrica (fonte s) em Vancouver que fabrica *pucks* de hóquei no gelo e tem um depósito (terminal t) em Winnipeg para armazená-los. A companhia aluga espaço em caminhões de outra firma para transportar os *pucks* de s a t.

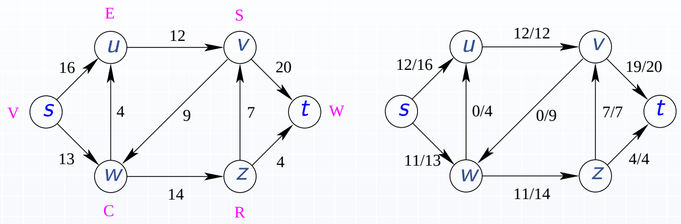
Um exemplo





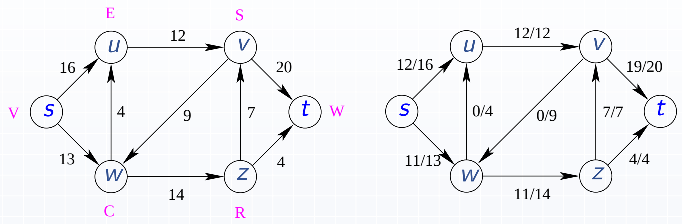
Como os caminhões viajam por rotas (arestas) entre cidades (vértices) e têm capacidade limitada, Lucky Puck pode transportar no máximo $c(u, v)$ caixas por dia entre cada par de cidades u, v. Lucky Puck não pode alterar os trajetos nem as capacidades e, assim, não pode alterar a rede desenhada acima à esquerda.

Um exemplo



A Lucky Puck tem que determinar o maior número p de caixas que pode transportar por dia. Ela não se importa com o tempo de viagem, desde que consiga mandar as p caixas da fábrica para o depósito. Uma solução ótima ($p = 23$) está indicada acima à direita.

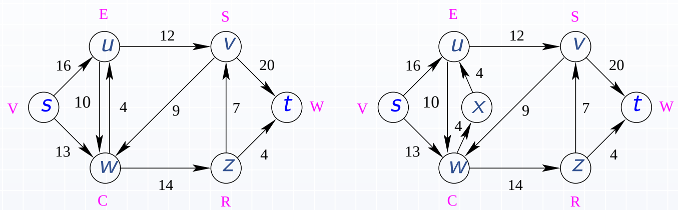
Um exemplo



Um modo de resolver o problema da Companhia Lucky Puck é encontrar um fluxo máximo na rede.

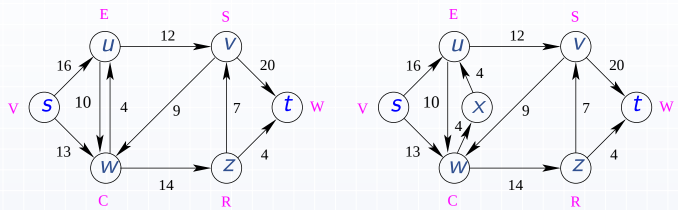
Observação: estritamente falando, a companhia gostaria de um fluxo f que fosse **inteiro** (isto é, cada $f(u, v)$ é inteiro). Veremos que quando as capacidades são inteiros, sempre existe um fluxo máximo que é inteiro.

Modelando problemas com arcos antiparalelos



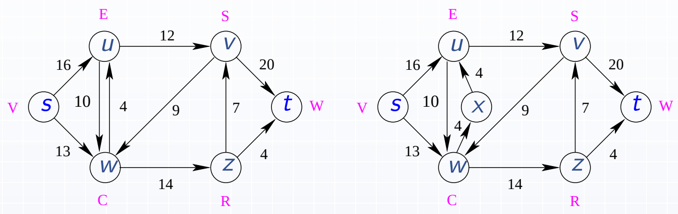
Suponha que a companhia de caminhões ofereceu a Lucky Puck a oportunidade de alugar espaço para 10 caixas em caminhões indo de Edmonton a Calgary. A rede resultante está indicada acima à esquerda.

Modelando problemas com arcos antiparalelos



A rede apresenta um problema para nós: ela possui arestas antiparalelas (u, w) e (w, u). Como veremos, no método para resolver o Problema do Fluxo Máximo é conveniente que não existam arestas deste tipo.

Modelando problemas com arcos antiparalelos



Um modo de contornar este problema é transfomar a rede em uma rede equivalente sem arestas antiparalelas. Escolhemos uma das arestas antiparalelas, no caso, (w, u) e a substituímos pelo par de arestas (w, x) e (x, u), ambas com capacidades iguais à da aresta original.

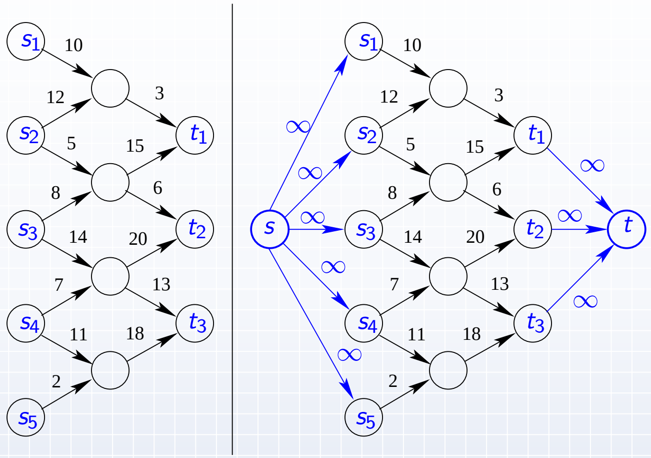
Redes com múltiplas fontes e terminais

Algumas variantes do Problema do Fluxo Máximo podem ter várias fontes e vários terminais. Por exemplo, a Companhia Lucky Puck poderia ter um conjunto de m fábricas $\{s_1, \ldots, s_m\}$ e um conjunto de n depósitos $\{t_1, \ldots, t_n\}$.

Felizmente há um modo de reduzir o problema do fluxo máximo com múltiplas fontes e múltiplos terminais em um Problema de Fluxo Máximo com uma única fonte e um único terminal.

Acrescente uma nova fonte s e uma aresta (s, s_i) com capacidade $c(s, s_i) = \infty$ para $i = 1, \ldots, m$.
Acrescente um novo terminal t e uma aresta (t_i, t) com capacidade $c(t_i, t) = \infty$ para $i = 1, \ldots, n$.

Redes com múltiplas fontes e terminais



Um fluxo na nova rede corresponde a uma solução da rede original.

Método de Ford-Fulkerson

Mostraremos agora o método projetado por Ford e Fulkerson (independentemente) para resolver o Problema do Fluxo Méximo.

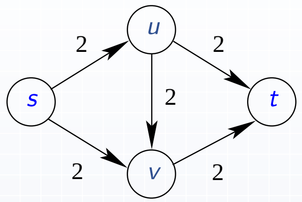
Chamamos de método em vez de algoritmo pois há várias implementações do método.

O método de Ford-Fulkerson depende de três ideias fundamentais que transcedem o método e são relevantes a muitos outro algoritmos e problemas:

- redes residuais
- caminhos aumentadores
- dualidade e cortes

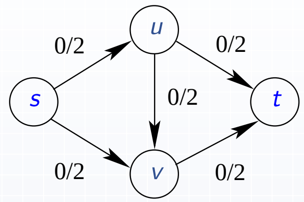
Essas ideias são essenciais para o Teorema do Fluxo Máximo Corte Mínimo.

Intuição do método de Ford-Fulkerson



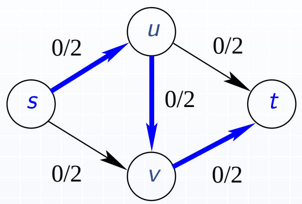
Ilustramos a ideia do método através deste exemplo simples. Claramente, o valor do fluxo máximo é 4, mas para entender melhor o método é melhor esquecer isto!

Intuição do método de Ford-Fulkerson



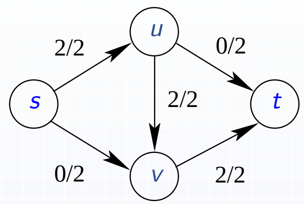
Inicialmente escolhemos o fluxo nulo em todas as arestas. O valor deste fluxo é zero.

Intuição do método de Ford-Fulkerson



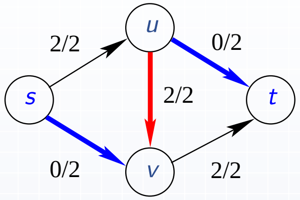
Encontramos um caminho de s a t. Observe que podemos aumentar o fluxo nas arestas do caminho.

Intuição do método de Ford-Fulkerson



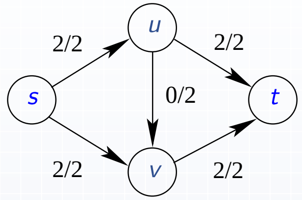
Com isso, obtemos um fluxo de valor 2. Entretanto, agora parece não haver nenhum caminho como antes em que podemos aumentar o fluxo.

Intuição do método de Ford-Fulkerson



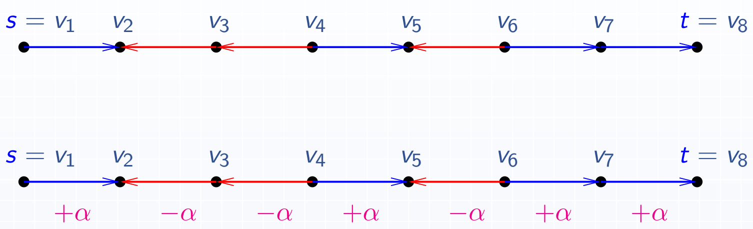
Mas considere agora este (pseudo)caminho.
Podemos aumentar o fluxo nas arestas que avançam e diminuir o fluxo nas arestas que recuam.

Intuição do método de Ford-Fulkerson



Agora obtemos um fluxo com valor 4. Neste exemplo, é fácil ver que ele é máximo pois satura cada aresta que sai de s (isso é, o fluxo atinge a capacidade máxima).

Aumentar fluxo ao longo de um pseudocaminho



Note que a conservação de fluxo se mantém e o novo fluxo tem valor maior que o anterior (se $\alpha > 0$).

É preciso apenas garantir que os fluxos sejam não negativos e respeitem às capacidades. Estas observações motivam a próxima definição.

Redes residuais

Suponha que temos uma rede (G, c, s, t) e um fluxo f qualquer.

A rede residual obtida de (G, c, s, t) a partir de f é a rede (G_f, c_f, s, t) com $G_f = (V, E_f)$ em que:

(a) se $(u, v) \in E$ e $f(u, v) < c(u, v)$ então

$(u, v) \in E_f$ e $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$, e

$f(u, v) < c(u, v)$ $\qquad$ $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$

Interpretação: passar fluxo por (u, v) na rede residual implica em aumentar o fluxo de (u, v) na **rede original**.

Redes residuais

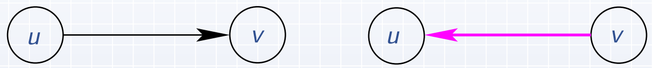
Suponha que temos uma rede (G, c, s, t) e um fluxo f qualquer.

A rede residual obtida de (G, c, s, t)a partir de f é a rede (G_f, c_f, s, t) com $G_f = (V, E_f)$ em que:

(b) se $(u, v) \in E$ e $f(u, v) > 0$ então

$(v, u) \in E_f$ e $c_f(v, u) = f(u, v)$ (aresta reversa).

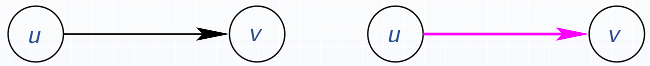
$f(u, v) > 0$ $\qquad$ $c_f(v, u) = f(u, v)$



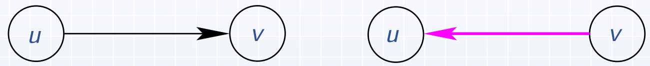
Interpretação: passar fluxo por (v, u) na rede residual implica em diminuir o fluxo de (u, v) na **rede original**.

Redes residuais

$f(u, v) < c(u, v)$ $\qquad$ $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$

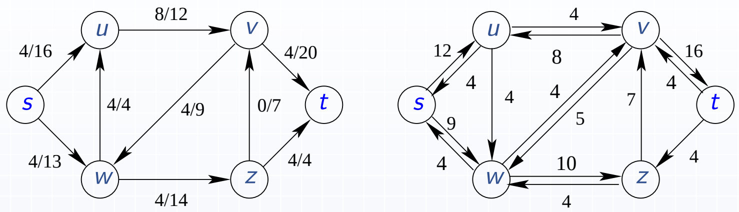


$f(u, v) > 0$ $\qquad$ $c_f(v, u) = f(u, v)$



Note que como não há arestas antiparalelas em G, não há ambiguidade na definição de $c_f(u, v)$ nem de $c_f(v, u)$.

Redes residuais: um exemplo

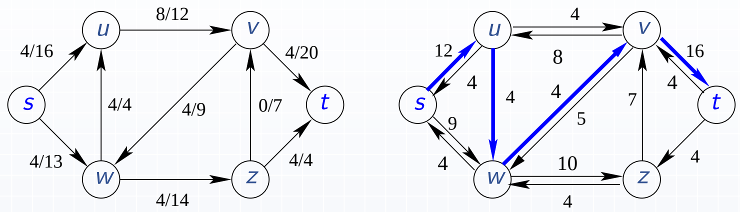


G, f $\qquad$ G_f

Note que $|E_f| \leq 2|E|$.

A rede residual pode conter arestas antiparalelas.

Caminhos aumentadores

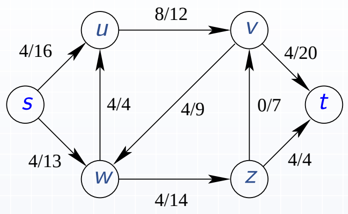


G, f $\qquad$ G_f

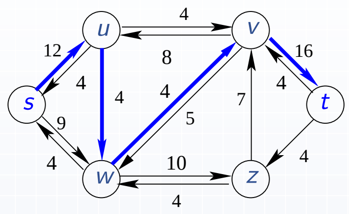
Um caminho aumentador é um caminho de s a t na rede residual G_f. Ele corresponde a um pseudocaminho da **rede original**.

Se tal caminho existir é possível obter um fluxo com valor maior para a **rede original**.

Caminhos aumentadores



G, f



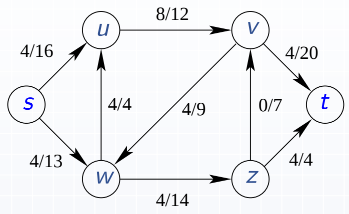
G_f

Seja P um caminho aumentador. A capacidade residual de P é definida como:

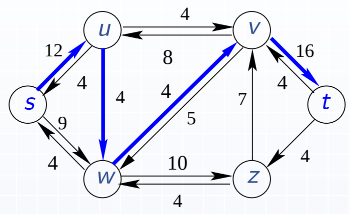
$$c_f(P) = \min\{c_f(u,v) : (u,v) \in P\}.$$

Note que $c_f(P) > 0$.

Caminhos aumentadores



G, f



G_f

Podemos dividir o conjunto de arestas de P em dois conjuntos:

$P^+ := \{(u,v) \in P : (u,v) \in E\}$ e $P^- := \{(u,v) \in P : (v,u) \in E\}$.

Uma aresta de P pertence a P^+ se ela corresponde a uma aresta de E e pertence a P^- se a sua reversa é uma aresta de E.

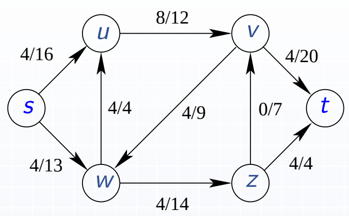
Caminhos aumentadores

Seja $\alpha := c_f(P)$ (capacidade residual de P).
Considere a seguinte função de $V \times V$ em $\mathbb{R}$ definida como:

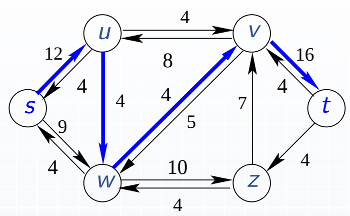
$$f \uparrow P(u,v) = \begin{cases} f(u,v) + \alpha & \text{se } (u,v) \in P^+, \\ f(u,v) - \alpha & \text{se } (v,u) \in P^-, \\ f(u,v) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Lema. Seja (G, c, s, t) uma rede. Seja f um fluxo e seja P um caminho aumentador em G_f. Então $f \uparrow P$ é um fluxo em (G, c, s, t) com valor $|f \uparrow P| = |f| + c_f(P)$. (Exercício!)

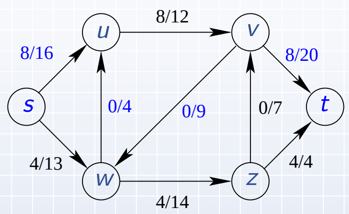
Caminhos aumentadores



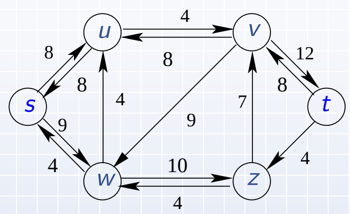
G, f



G_f



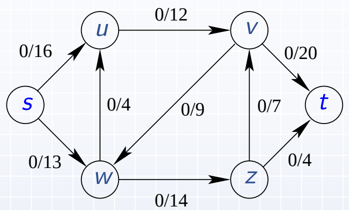
$G, f \uparrow P$



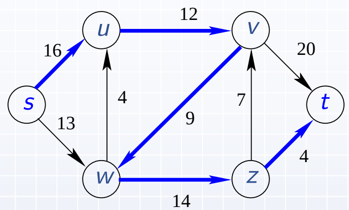
$G_{(f \uparrow P)}$

Método de Ford-Fulkerson

FORD-FULKERSON(G, c, s, t)
1. $f \leftarrow 0$
2. **enquanto** existe um caminho aumentador P em G_f **faça**
3. $\quad f \leftarrow f \uparrow P$ $\quad \triangleright$ G_f é atualizado também
4. **devolva** f



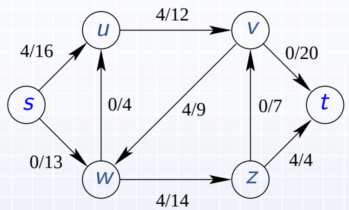
G, f



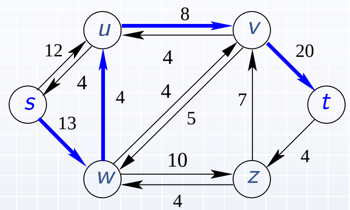
G_f

Método de Ford-Fulkerson

FORD-FULKERSON(G, c, s, t)
1. $f \leftarrow 0$
2. **enquanto** existe um caminho aumentador P em G_f **faça**
3. $\quad f \leftarrow f \uparrow P$ $\quad \triangleright$ G_f é atualizado também
4. **devolva** f



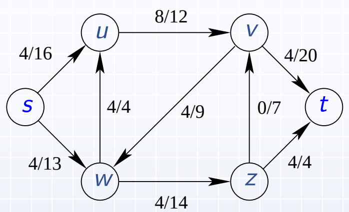
G, f



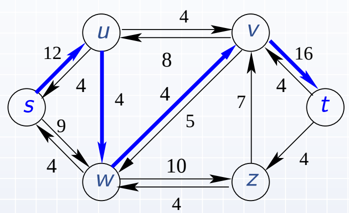
G_f

Método de Ford-Fulkerson

FORD-FULKERSON(G, c, s, t)
1. $f \leftarrow 0$
2. **enquanto** existe um caminho aumentador P em G_f **faça**
3. $\quad f \leftarrow f \uparrow P$ $\quad \triangleright$ G_f é atualizado também
4. **devolva** f



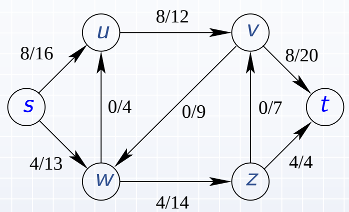
G, f



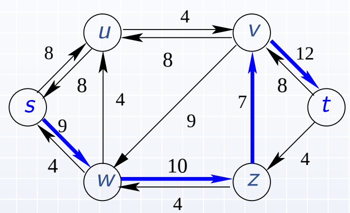
G_f

Método de Ford-Fulkerson

FORD-FULKERSON(G, c, s, t)
1. $f \leftarrow 0$
2. **enquanto** existe um caminho aumentador P em G_f **faça**
3. $\quad f \leftarrow f \uparrow P$ $\quad \triangleright$ G_f é atualizado também
4. **devolva** f



G, f

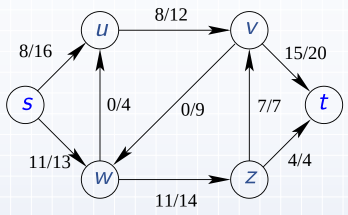


G_f

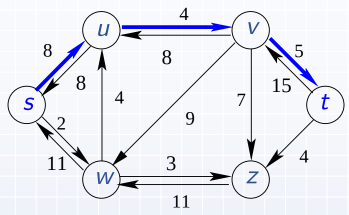
Método de Ford-Fulkerson

FORD-FULKERSON(G, c, s, t)

1. $f \leftarrow 0$
2. **enquanto** existe um caminho aumentador P em G_f **faça**
3. $\quad f \leftarrow f \uparrow P \quad \triangleright$ G_f é atualizado também
4. **devolva** f



G, f

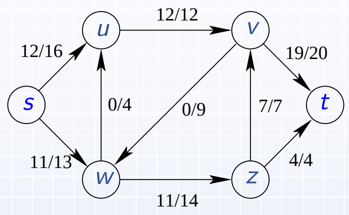


G_f

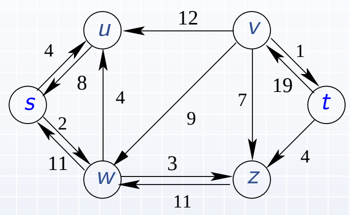
Método de Ford-Fulkerson

FORD-FULKERSON(G, c, s, t)

1. $f \leftarrow 0$
2. **enquanto** existe um caminho aumentador P em G_f **faça**
3. $\quad f \leftarrow f \uparrow P \quad \triangleright$ G_f é atualizado também
4. **devolva** f



G, f



G_f

Método de Ford-Fulkerson

FORD-FULKERSON(G, c, s, t)

1. $f \leftarrow 0$
2. **enquanto** existe um caminho aumentador P em G_f **faça**
3. $\quad f \leftarrow f \uparrow P \quad \triangleright$ G_f é atualizado também
4. **devolva** f

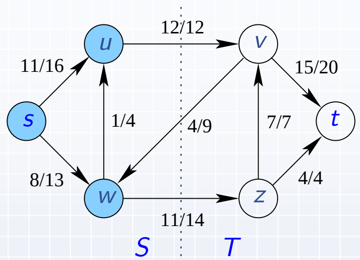
Perguntas:

- Este algoritmo para? Qual é a complexidade?
- Por que o fluxo f que ele devolve é máximo?

Para responder a essas e outras perguntas, precisamos introduzir os conceitos de de corte e capacidade de um corte. Eles são fundamentais para entender porque o método de Ford-Fulkerson funciona e, mais importante, são centrais em todos os algoritmos de fluxo máximo conhecidos.

Cortes

Seja (G, c, s, t) uma rede com $G = (V, E)$. Um corte em (G, c, s, t) é uma partição (S, T) de V em conjuntos S e $T := V - S$ tais que $s \in S$ e $t \in T$.

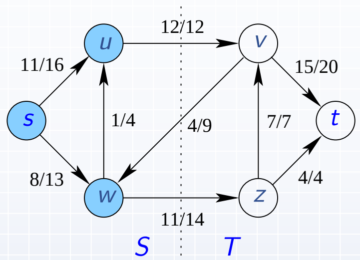


Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

Fluxo líquido ao longo de um corte

O fluxo líquido ao longo de um corte (S, T) é definido como

$$f(S,T) := \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u,v) - \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(v,u).$$

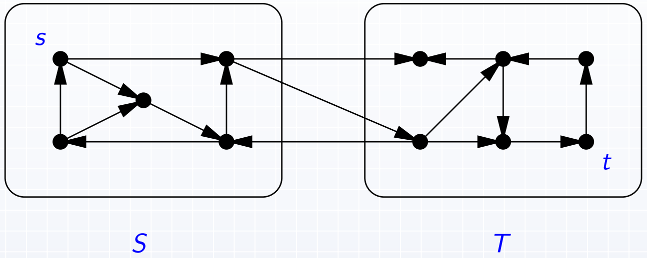


Lembre-se que

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s,v) - \sum_{v \in V} f(v,s) = f(\{s\}, V - \{s\}).$$

Fluxo líquido ao longo de um corte

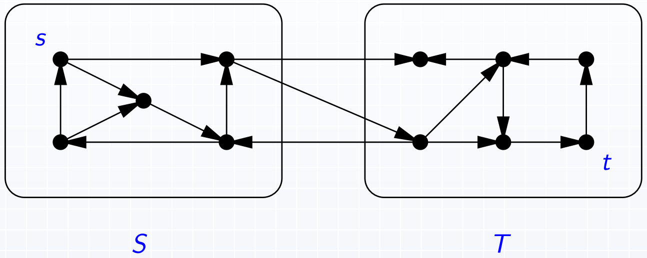
Lema. Sejam f um fluxo e (S, T) um corte qualquer de uma rede (G, c, s, t). Então $f(S,T) = |f|$.



Lembre-se que

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s,v) - \sum_{v \in V} f(v,s) = f(\{s\}, V - \{s\}).$$

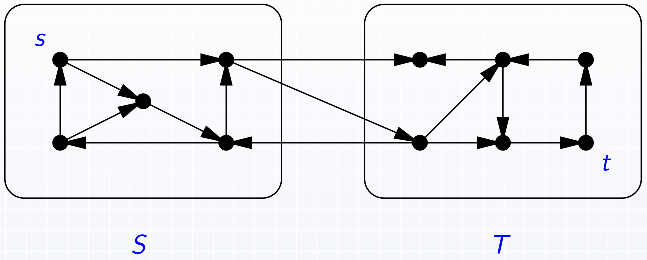
Fluxo líquido ao longo de um corte



Denote $f(S,S) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in S} f(u,v)$. Então

(a) $\sum_{u \in S} \sum_{v \in V} f(u,v) = f(S,S) + \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} f(x,y)$

Fluxo líquido ao longo de um corte



De modo análogo temos que

(b) $\sum_{u \in S} \sum_{v \in V} f(v,u) = f(S,S) + \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} f(y,x)$

Fluxo líquido ao longo de um corte

(a) $\sum_{u \in S} \sum_{v \in V} f(u,v) = f(S,S) + \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} f(x,y)$

(b) $\sum_{u \in S} \sum_{v \in V} f(v,u) = f(S,S) + \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} f(y,x)$

Subtraindo (b) de (a) obtemos:

$$\sum_{u \in S} \sum_{v \in V} f(u,v) - \sum_{u \in S} \sum_{v \in V} f(v,u) = \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} f(x,y) - \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} f(y,x)$$

$$\sum_{u \in S} \left(\sum_{v \in V} f(u,v) - \sum_{v \in V} f(v,u) \right) = f(S,T)$$

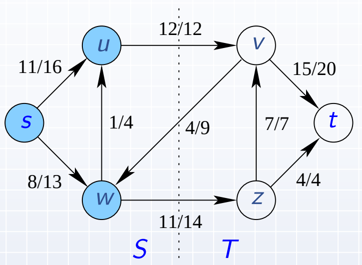
$$\sum_{v \in V} (f(s,v) - f(v,s)) = f(S,T)$$

$$|f| = f(S,T)$$

Capacidade de um corte

A capacidade de um corte (S,T) é definida como

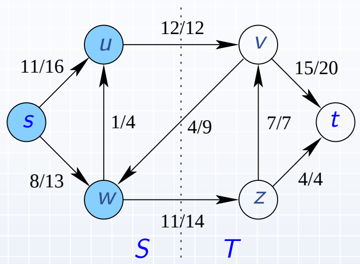
$$c(S,T) := \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u,v).$$



Um corte mínimo em uma rede (G,c,s,t) é um corte cuja capacidade é mínima entre todos os cortes da rede.

Relação entre fluxos e cortes

Corolário. Sejam f um fluxo e (S,T) um corte qualquer de uma rede (G,c,s,t). Então $|f| \leq c(S,T)$.



Relação entre fluxos e cortes

$$\begin{aligned}|f| &= f(S,T)\\ &= \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(u,v) - \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(v,u)\\ &\le \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(u,v)\\ &\le \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} c(u,v)\\ &= c(S,T).\end{aligned}$$

Relação entre fluxos e cortes

Corolário. Sejam f um fluxo e (S,T) um corte qualquer de uma rede (G,c,s,t). Então $|f| \le c(S,T)$.

O corolário mostra que o valor de um fluxo máximo é menor ou igual à capacidade de um corte mínimo.

O Teorema do Fluxo Máximo Corte Mínimo diz que estas duas quantidades são sempre iguais.

Teorema do Fluxo Máximo Corte Mínimo

Teorema. Seja f um fluxo de uma rede (G,c,s,t). Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) f é um fluxo máximo.

(2) A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.

(3) $|f| = c(S,T)$ para algum corte (S,T) de (G,c,s,t).

Prova. (1) $\Rightarrow$ (2). Suponha por contradição que f seja um fluxo máximo e que G_f contém um caminho aumentador P. Já vimos que o fluxo $f \uparrow P$ possui valor maior que o valor de f, uma contradição.

Teorema do Fluxo Máximo Corte Mínimo

Teorema. Seja f um fluxo de uma rede (G,c,s,t). Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) f é um fluxo máximo.

(2) A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.

(3) $|f| = c(S,T)$ para algum corte (S,T) de (G,c,s,t).

Prova. (2) $\Rightarrow$ (3). Suponha que G_f não possui caminhos aumentadores, ou seja, não existe caminho de s a t em G_f. Sejam

$$S := \{v \in V : \text{existe um caminho de } s \text{ a } v \text{ em } G_f\}$$

e $T := V - S$. Note que $s \in S$ e $t \notin T$. Logo, (S,T) é um corte.

Teorema do Fluxo Máximo Corte Mínimo

(2) $\Rightarrow$ (3).

$$S := \{v \in V : \text{existe um caminho de } s \text{ a } v \text{ em } G_f\}$$

e $T := V - S$.

Note que em G_f não existe aresta (u, v) com $u \in S$ e $v \in T$.

Sejam $u \in S$ e $v \in T$.

Se $(u, v) \in E$ então $f(u, v) = c(u, v)$ (senão $(u, v) \in E[G_f]$).

Se $(v, u) \in E$ então $f(v, u) = 0$ (senão $(u, v) \in E[G_f]$).

Teorema do Fluxo Máximo Corte Mínimo

Assim, para quaisquer $u \in S$ e $v \in T$,

(a) Se $(u, v) \in E$ então $f(u, v) = c(u, v)$.

(b) Se $(v, u) \in E$ então $f(v, u) = 0$.

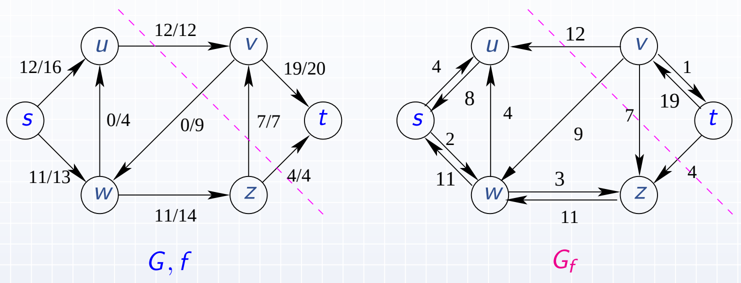
Assim,

$$\begin{aligned} f(S, T) &= \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u, v) - \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(v, u) \\ &= \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u, v) - \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} 0 \\ &= c(S, T). \end{aligned}$$

Logo, $|f| = c(S, T)$ e (3) vale.

Teorema do Fluxo Máximo Corte Mínimo

A figura abaixo ilustra a implicação (2) $\Rightarrow$ (3).



Teorema do Fluxo Máximo Corte Mínimo

Teorema. Seja f um fluxo de uma rede (G, c, s, t). Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) f é um fluxo máximo.

(2) A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.

(3) $|f| = c(S, T)$ para algum corte (S, T) de (G, c, s, t).

Prova. (3) $\Rightarrow$ (1). Pelo Corolário sabemos que $|f| \leq c(S', T')$ para todo corte (S', T'). Como $|f| = c(S, T)$, segue que f é um fluxo máximo.

Algumas consequências importantes

Baseado na prova do Teorema do Fluxo Máximo Corte Mínimo, responda às seguintes questões:

- Suponha que f é um fluxo de uma rede (G, c, s, t) e (S, T) é um corte de (G, c, s, t) tal que $|f| = c(S, T)$.
  Podemos concluir que f é um fluxo máximo e (S, T) é um corte mínimo de (G, c, s, t)?
- Dado um fluxo f de uma rede (G, c, s, t) como podemos verificar que f é de fato máximo? Qual é a complexidade deste teste?
- Dado um fluxo máximo f de uma rede (G, c, s, t), como podemos encontrar um corte mínimo de (G, c, s, t)? Qual é a complexidade?

Análise do método de Ford-Fulkerson

Ford-Fulkerson(G, c, s, t)
1. $f \leftarrow 0$
2. **enquanto** existe um caminho aumentador P em G_f **faça**
3. $\quad f \leftarrow f \uparrow P$ $\quad \triangleright$ G_f é atualizado também
4. **devolva** f

As operações na linha 3 de computar $f \uparrow P$ e atualizar G_f podem ser feitas em tempo $O(V + E) = O(E)$.

A dificuldade em analisar o algoritmo é determinar **quantas vezes a linha 2 é executada**.

Análise do método de Ford-Fulkerson

Ford-Fulkerson(G, c, s, t)
1. $f \leftarrow 0$
2. **enquanto** existe um caminho aumentador P em G_f **faça**
3. $\quad f \leftarrow f \uparrow P$ $\quad \triangleright$ G_f é atualizado também
4. **devolva** f

Se o caminho P for escolhido de modo errado, o algoritmo pode nem mesmo terminar. Existem instâncias com capacidades irracionais em que o valor do fluxo aumenta a cada iteração, mas não converge.

Este é um resultado teórico interessante mas do ponto de vista prático não é tão relevante: **não** é possível armazenar números irracionais em um computador (com precisão arbitrária).

Análise do método de Ford-Fulkerson

Ford-Fulkerson(G, c, s, t)
1. $f \leftarrow 0$
2. **enquanto** existe um caminho aumentador P em G_f **faça**
3. $\quad f \leftarrow f \uparrow P$ $\quad \triangleright$ G_f é atualizado também
4. **devolva** f

Na prática, em uma instância típica do Problema do Fluxo Máximo todas as capacidades são inteiras. Se as capacidades forem racionais é possível multiplicar as capacidades por um inteiro conveniente e obter uma instância equivalente com capacidades inteiras. (Exercício!)

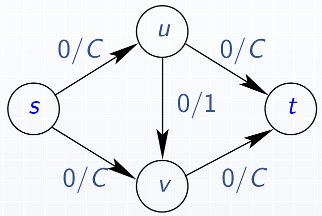
Análise do método de Ford-Fulkerson

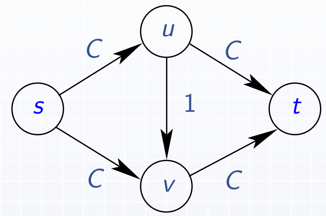
Ford-Fulkerson(G, c, s, t)
1. $f \leftarrow 0$
2. **enquanto** existe um caminho aumentador P em G_f **faça**
3. $\quad f \leftarrow f \uparrow P \qquad \triangleright$ G_f é atualizado também
4. **devolva** f

Suponha que as capacidades são inteiras.

Se f^* é um fluxo ótimo nesta rede, então o algoritmo de Ford-Fulkerson executa no máximo $|f^*|$ iterações na linha 2, resultando em tempo total $O(E|f^*|)$. No pior caso o algoritmo poderia aumentar o fluxo de apenas uma unidade a cada iteração.

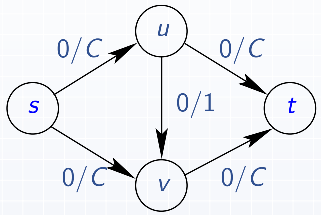
Instância ruim para o método de Ford-Fulkerson

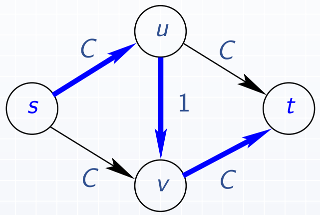




G, f $\qquad C = 10^{20} \qquad$ G_f

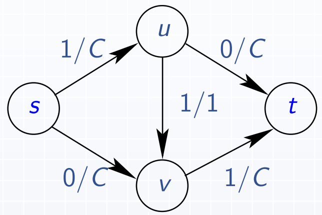
Instância ruim para o método de Ford-Fulkerson

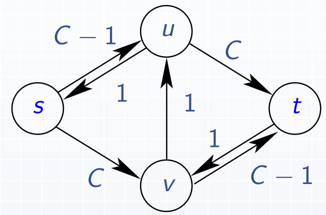




G, f $\qquad C = 10^{20} \qquad$ G_f

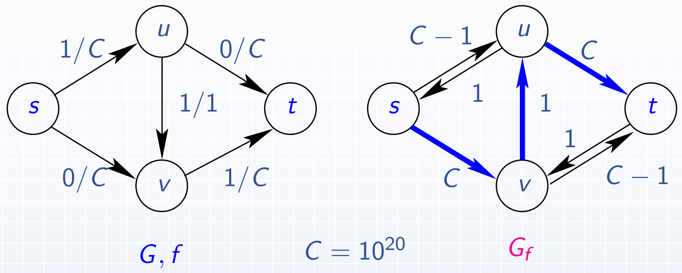
Instância ruim para o método de Ford-Fulkerson



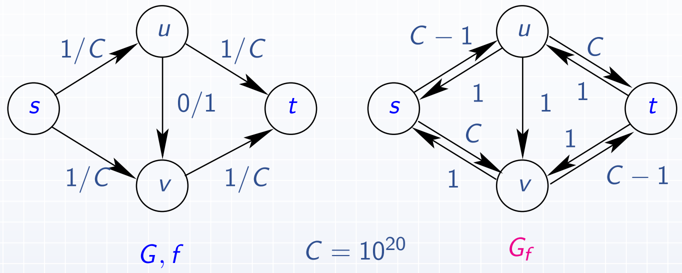


G, f $\qquad C = 10^{20} \qquad$ G_f

Instância ruim para o método de Ford-Fulkerson



Instância ruim para o método de Ford-Fulkerson



Fluxos máximos inteiros e aplicações

Teorema. Seja (G, c, s, t) uma rede em que c assume apenas valores inteiros. Então o fluxo devolvido por FORD-FULKERSON é inteiro, isto é, $f(u, v)$ é inteiro para toda aresta $(u, v) \in E$.

Prova. Indução no número de iterações. ∎

Teorema. (Fluxo Máximo Corte Mínimo) Seja (G, c, s, t) uma rede. Então o valor de um fluxo máximo é igual à capacidade de um corte mínimo. Além disso, se c assume apenas valores inteiros, então existe um fluxo máximo que é inteiro.

Veremos que este resultado pode ser usado como **caixa preta** para resolver outros problemas, ou seja, podemos reduzir outros problemas ao Problema do Fluxo Máximo.

Exercício em sala

Teorema de Menger

O número máximo de caminhos disjuntos nas arestas de s a t é igual ao número mínimo de arestas necessárias para desconectar s de t.

Algoritmos especializados de fluxo

Algoritmo de Edmonds-Karp

FORD-FULKERSON(G, c, s, t)
1. $f \leftarrow 0$
2. **enquanto** existe um caminho aumentador P em G_f **faça**
3. $\quad f \leftarrow f \uparrow P$ $\quad \triangleright$ G_f é atualizado também
4. **devolva** f

É possível melhorar muito a complexidade de FORD-FULKERSON se escolhermos P como um caminho mais curto de s a t em G_f na linha 2. Isto pode ser feito usando BFS.

Este é um método óbvio para procurar um caminho aumentador. Edmonds e Karp (1972) mostraram que esta simples modificação resulta em um algoritmo de complexidade $O(VE^2)$. Chame [1] o algoritmo resultante de EDMONDS-KARP.

[1] Dinitz (1970) publicou o mesmo algoritmo antes

Análise do algoritmo de Edmonds-Karp

Para provar este resultado é preciso provar alguns lemas auxiliares.

Denote por $\mathrm{dist}_f(u, v)$ a distância de u a v em G_f. Note que por distância nos referimos a número de arestas em G_f.

Analisaremos os valores $\mathrm{dist}_f(s, v)$ e $\mathrm{dist}_{f'}(s, v)$ para fluxos f e f' consecutivos mantidos pelo algoritmo.

Análise do algoritmo de Edmonds-Karp

Lema. Considere uma execução de EDMONDS-KARP em uma rede (G, c, s, t). Sejam f e f' fluxos mantidos pelo algoritmo em duas iterações consecutivas. Então para todo $v \in V - \{s, t\}$, temos que

$$\mathrm{dist}_{f'}(s, v) \geq \mathrm{dist}_f(s, v),$$

ou seja, a distância de s a v na rede residual nunca diminui após cada iteração.

Prova. Suponha por contradição que para algum $v \in V - \{s, t\}$, temos que

$$\mathrm{dist}_{f'}(s, v) < \mathrm{dist}_f(s, v).$$

Dentre esses vértices, escolha v com **menor** $\mathrm{dist}_{f'}(s, v)$.

Análise do algoritmo de Edmonds-Karp

Seja P um caminho mínimo de s a v em $G_{f'}$ e seja (u, v) a última aresta de P. Logo,

$$\mathrm{dist}_{f'}(s, u) = \mathrm{dist}_{f'}(s, v) - 1.$$

Pela escolha de v segue que:

$$\mathrm{dist}_{f'}(s, u) \geq \mathrm{dist}_{f}(s, u).$$

Então $(u, v) \notin E_f$. De fato, se $(u, v) \in E_f$ então

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}_{f}(s, v) &\leq \mathrm{dist}_{f}(s, u) + 1 \\ &\leq \mathrm{dist}_{f'}(s, u) + 1 \\ &= \mathrm{dist}_{f'}(s, v), \end{aligned}$$

o que contraria a hipótese de que $\mathrm{dist}_{f'}(s, v) < \mathrm{dist}_{f}(s, v)$.

Análise do algoritmo de Edmonds-Karp

Como $(u, v) \notin E_f$ mas $(u, v) \in E_{f'}$, isto implica que o algoritmo aumentou o fluxo de v para u.

EDMONDS-KARP aumenta fluxo ao longo de um caminho mais curto em G_f. Logo, (v, u) pertence ao caminho mais curto escolhido pelo algoritmo na iteração com fluxo f. Logo,

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}_{f}(s, v) &= \mathrm{dist}_{f}(s, u) - 1 \\ &\leq \mathrm{dist}_{f'}(s, u) - 1 \\ &= \mathrm{dist}_{f'}(s, v) - 2, \end{aligned}$$

o que contraria a hipótese de que $\mathrm{dist}_{f'}(s, v) < \mathrm{dist}_{f}(s, v)$. Disto segue que o lema vale. ∎

Análise do algoritmo de Edmonds-Karp

Teorema. Em uma execução de EDMONDS-KARP em uma rede (G, c, s, t), o número total de aumentos é $O(VE)$.

Prova. Considere uma iteração qualquer e seja f o fluxo mantido pelo algoritmo. Seja P o caminho aumentador encontrado pelo algoritmo.

Uma aresta $(u, v) \in E_f$ é **crítica** nesta iteração se

- (u, v) pertence ao caminho aumentador P e
- $c_f(P) = c_f(u, v)$.

Note que ao aumentar o fluxo ao longo de P, todas as arestas críticas desaparecem da rede residual. Além disso, pelo menos uma aresta de P deve ser crítica.

Análise do algoritmo de Edmonds-Karp

Mostraremos que cada aresta $(u, v) \in E_f$ pode ser crítica no máximo $|V|/2$ vezes.

Suponha que (u, v) seja crítica. Como ela pertence a um caminho aumentador mais curto P em G_f, temos que

$$\mathrm{dist}_{f}(s, v) = \mathrm{dist}_{f}(s, u) + 1.$$

Quando aumentamos o fluxo ao longo de P, a aresta (u, v) desaparece da rede residual.

A aresta (u, v) só pode reaparecer na rede residual se diminuirmos o fluxo de u a v. Isto só pode acontecer se (v, u) aparecer em algum caminho aumentador mais curto de alguma rede residual $G_{f'}$ de alguma iteração posterior.

Análise do algoritmo de Edmonds-Karp

Neste momento, temos que

$$\mathrm{dist}_{f'}(s,u) = \mathrm{dist}_{f'}(s,v) + 1.$$

Pelo Lema temos que $\mathrm{dist}_{f'}(s,v) \geq \mathrm{dist}_{f}(s,v)$. Logo

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}_{f'}(s,u) &= \mathrm{dist}_{f'}(s,v) + 1 \\ &\geq \mathrm{dist}_{f}(s,v) + 1 \\ &= \mathrm{dist}_{f}(s,u) + 2 \end{aligned}$$

Assim, se (u,v) é crítica em alguma iteração, ela se torna crítica novamente quando a distância de s a u aumenta de pelo menos 2.

Análise do algoritmo de Edmonds-Karp

Em qualquer iteração temos que:

$$0 \leq \mathrm{dist}_{f}(s,u) \leq |V| - 2.$$

Note que $\mathrm{dist}_{f}(s,u) < |V| - 1$ pois (u,v) pertence a um caminho mais curto de s a t (por ser crítica).

Como $\mathrm{dist}_{f}(s,u)$ é **não descrescente** ao longo do algoritmo, o número de vezes que (u,v) pode ser crítica é no máximo $(|V|-2)/2 = |V|/2 - 1 \leq |V|/2$.

Como $|E_f| \leq 2|E|$, o número total de arestas críticas durante a execução do algoritmo é no máximo $(2E)(V/2) = O(VE)$.

Como em cada iteração há pelo menos uma aresta crítica, segue que o número de iterações é $O(VE)$. ■

Redução ao Problema do Fluxo Máximo

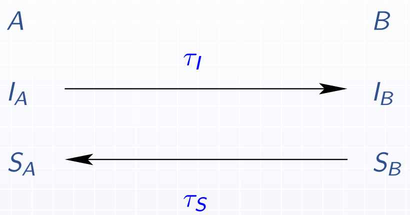
Teorema. (Fluxo Máximo Corte Mínimo) Seja (G,c,s,t) uma rede. Então o valor de um fluxo máximo é igual à capacidade de um corte mínimo. Além disso, se c assume apenas valores inteiros, então existe um fluxo máximo que é inteiro.

Veremos que este resultado pode ser usado como **caixa preta** para resolver outros problemas, ou seja, podemos reduzir outros problemas ao Problema do Fluxo Máximo.

Aplicações de fluxo

Reduções ao Problema do Fluxo Máximo

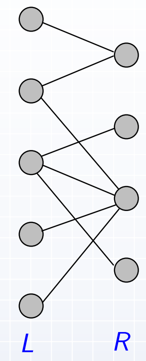
Relembrando o esquema básico de uma redução:



A seguir:

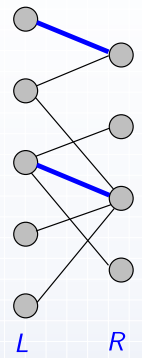
- mostraremos exemplos de reduções em que B é o Problema do Fluxo Máximo;
- neste caso sabemos que este pode ser resolvido pelo algoritmo de Ford-Fulkerson ou de Edmonds-Karp.

Emparelhamentos em grafos bipartidos



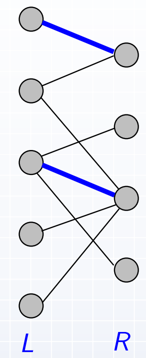
Um grafo não direcionado $G = (V, E)$ é bipartido se existe uma bipartição (L, R) de V tal que cada aresta de E tem uma ponta em L e outra em R.

Emparelhamentos em grafos bipartidos



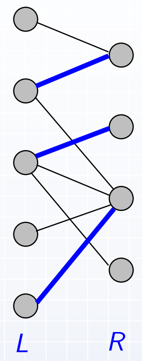
Um emparelhamento (matching) em G é um subconjunto de arestas $M \subseteq E$ tal que quaisquer duas arestas em M não tem ponta em comum.

Emparelhamentos em grafos bipartidos



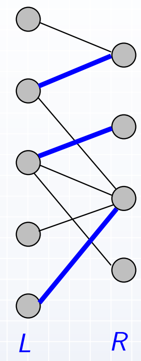
Se $(u, v) \in M$ dizemos que u é emparelhado com v em M.
Dizemos que um vértice u é coberto por M se é ponta de alguma aresta de M.

Emparelhamentos em grafos bipartidos



Dizemos que um emparelhamento M é máximo se não existe emparelhamento M' tal que $|M| < |M'|$.

Emparelhamentos em grafos bipartidos



Problema do Emparelhamento Máximo (em grafos bipartidos).
Dado um grafo bipartido $G = (V, E)$ encontrar um emparelhamento máximo em G.

Redução ao Problema do Fluxo Máximo

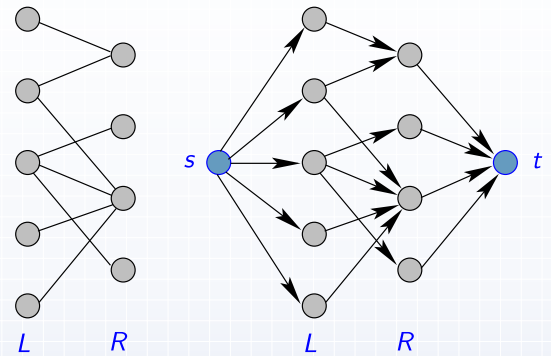
A partir de $G = (V, E)$ vamos construir uma rede associada a G tal que os fluxos desta correspondem a emparelhamentos de G e vice-versa.

Seja $G' = (V', E')$ o grafo direcionado em que $V' = V \cup \{s, t\}$ onde s e t são novos vértices e

$$E' = \{(u, v) : u \in L, v \in R, (u, v) \in E\}$$
$$\cup \{(s, u) : u \in L\} \cup \{(v, t) : v \in R\}$$

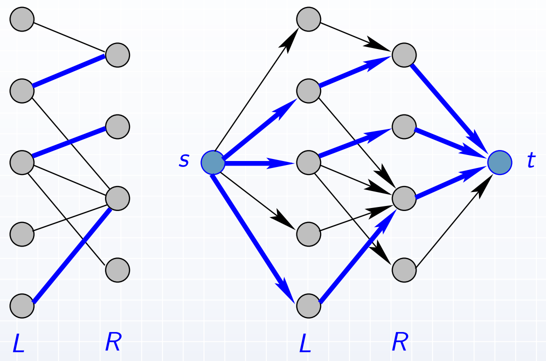
Cada aresta da rede tem capacidade unitária. Denote a rede resultante por $(G', 1, s, t)$. Note que $|V'| = |V| + 2$ e $|E'| = |E| + |L| + |R| = |E| + |V| = O(E)$.

Redução ao Problema do Fluxo Máximo



Grafo $G = (V, E)$ e a rede $(G', 1, s, t)$.
Arestas da rede tem capacidade 1.

Redução ao Problema do Fluxo Máximo



Correspondência entre emparelhamentos e fluxos.

Redução ao Problema do Fluxo Máximo

Lema. Seja $G = (V, E)$ um grafo bipartido com bipartição (L, R) e seja $(G', 1, s, t)$ a rede associada a G.

(a) Se M é um emparelhamento em G então existe um fluxo inteiro f em $(G', 1, s, t)$ com valor $|f| = |M|$.

(b) Se f é um fluxo inteiro em $(G', 1, s, t)$ então existe um emparelhamento M em G com tamanho $|M| = |f|$.

Prova. Consulte CLRS para ver os detalhes. (Importante!) ■

Corolário. O tamanho de um emparelhamento máximo M em G é igual ao valor de um fluxo máximo f em $(G', 1, s, t)$.

Redução ao Problema do Fluxo Máximo

Teorema. Dado um grafo bipartido $G = (V, E)$ podemos encontrar um emparelhamento máximo de G em tempo $O(VE)$.

Prova. Podemos construir a rede associada $(G', 1, s, t)$ em tempo $O(E)$, já que $|V'| = O(V)$ e $|E'| = O(E)$.

Usando o método de Ford-Fulkerson, podemos determinar um fluxo máximo f^* na rede em tempo $O(E'|f^*|) = O(E|f^*|)$. Note que f^* é inteiro e portanto corresponde a um emparelhamento máximo em G. Logo, $|f^*| \leq \min\{|L|, |R|\} \leq |V|$. Logo, o tempo gasto é $O(VE)$. ■

Obs: O algoritmo de Hopcroft–Karp encontra um emparelhamento máximo em um grafo bipartido em tempo $O(\sqrt{V}E)$.

Modelagem como um Problema de Fluxo Máximo

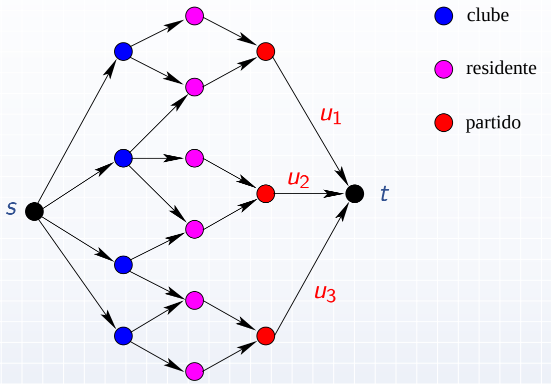
A cidade de Punxsutawney na Pennsylvania possui r residentes $R_1, \ldots, R_r$, q clubes $C_1, \ldots, C_q$ e p partidos políticos $P_1, \ldots, P_p$. Cada residente é membro de pelo menos um clube e pertence a exatamente um partido político.

Cada clube deve **indicar** um de seus **membros** para representá-lo no conselho municipal de modo que:

- dois clubes **não** podem indicar o mesmo membro e
- cada partido P_i pode ter **no máximo** u_i membros no conselho.

É possível montar um conselho que respeite essas restrições?

Modelagem como um Problema de Fluxo Máximo



Exemplo com $q = 4$, $r = 6$ e $p = 3$.

Modelagem como um Problema de Fluxo Máximo

Modelagem. Construímos a seguinte rede.

Os vértices $R_1, \ldots, R_r$ representam os residentes, os vértices $C_1, \ldots, C_q$ representam os clubes e os vértices $P_1, \ldots, P_p$ representam os partidos políticos. Temos ainda um vértice **fonte** s e um vértice **destino** t.

Temos

- uma aresta (s, C_i) para cada $i = 1, \ldots, q$,
- uma aresta (C_i, R_j) se o R_j é um membro de C_i,
- uma aresta (R_j, P_k) se o R_j pertence a P_k, e
- uma aresta (P_k, t) para cada $k = 1, \ldots, p$.

Uma aresta (P_k, t) tem capacidade u_k e as demais arestas têm capacidade unitária. Isto completa a descrição da transformação τ_I.

Modelagem como um Problema de Fluxo Máximo

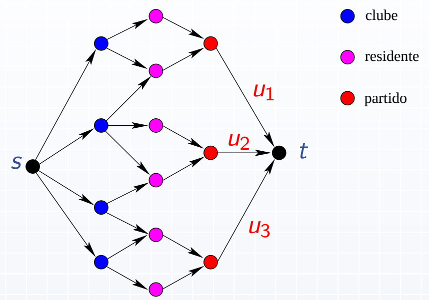
Descrevemos agora a transformação τ_S (e porque funciona).

Seja f o fluxo máximo obtido na resolução do Problema de Fluxo Máximo. Suponha que o valor seja q. Como f é inteiro, então para cada C_i exatamente uma aresta (C_i, R_j) tem fluxo um. Como há apenas uma resta de capacidade um saindo de R_j, então nenhuma outra aresta com fluxo positivo entra em R_j. Isto significa que o clube C_i indica R_j para o conselho. Note que as arestas (P_k, t) garantem que não há mais que u_k membros do partido P_k no conselho.

Por outro lado, se existe uma indicação de cada clube que respeita às restrições para montagem do conselho, é fácil definir um fluxo na rede com valor q.

Portanto, se o valor do fluxo máximo da rede é q então é possível montar o conselho, caso contrário, não é possível.

Modelagem como um Problema de Fluxo Máximo



Exemplo com $q = 4$, $r = 6$ e $p = 3$.

Qual é a complexidade da redução (τ_I, τ_S)?
Qual é a complexidade do algoritmo resultante (compondo com Edmonds-Karp)?

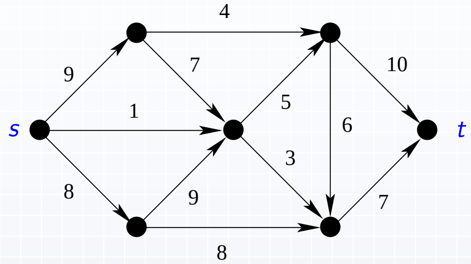
Redução a um Problema de Fluxo Máximo

Neo precisa mandar um pacote de dados para seus aliados através da imensa rede de computadores conhecida como Matrix. Esta informação é vital para a sobrevivência da raça humana!

A rede pode ser vista como um grafo direcionado $G = (V, E)$ onde a informação está em um **vértice fonte** s e precisa ser enviada a um **vértice terminal** t. Para não chamar a atenção indevida do controlador da rede, Neo pode enviar por cada aresta (u, v) no máximo uma quantidade $c(u, v)$ de dados.

Suponha que a quantidade total de dados seja k. Para saber se é possível enviar a informação de s a t, Neo pode resolver o Problema de Fluxo Máximo na rede (G, c, s, t).

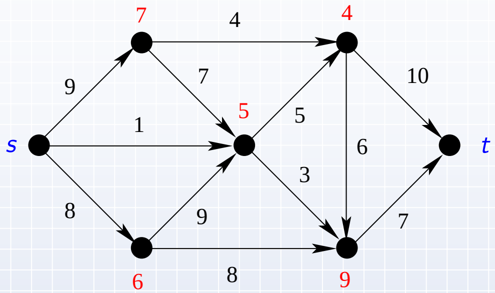
Redução a um Problema de Fluxo Máximo



Se o fluxo máximo da rede for maior ou igual a k, Neo conseguirá mandar a informação. Caso contrário, ele terá que tomar outras providências (que não vem ao caso aqui).

Redução a um Problema de Fluxo Máximo

Meses depois, Neo viu-se novamente na mesma situação de ter que enviar um pacote de informações de um ponto s a outro ponto t. No entanto, desde a última vez a Matrix evoluiu e melhorou seus sistemas de detecção. Neo agora só pode passar no máximo $p(v)$ dados por um vértice v sem ser detectado.



Redução a um Problema de Fluxo Máximo

Neo percebeu que agora ele tem que resolver o seguinte problema.

PFM com Capacidade nos Vértices (PFMCV). Dada uma rede (G, c, p, s, t) encontrar um fluxo máximo em (G, c, s, t) que respeite a **restrição adicional**:

$$\sum_{v \in V} f(v, u) \leq p(u)$$

para cada $u \in V - \{s, t\}$.

Observação: Uma rede (G, c, p, s, t) é uma uma rede (G, c, s, t) com uma função capacidade $p : V - \{s, t\} \mapsto \mathbb{R}_+$.

Redução a um Problema de Fluxo Máximo

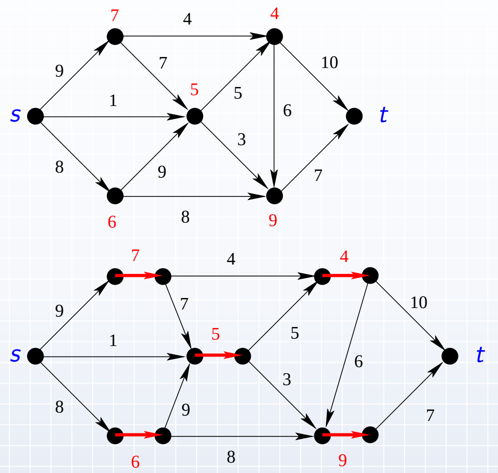
No entanto, Neo percebeu que é possível **reduzir** o PFMCV ao Problema de Fluxo Máximo (PFM) usual da seguinte forma.

Para cada vértice $v \in V - \{s, t\}$ substituímos v por dois vértices v'' e v' ligados por uma aresta (v'', v') e substituímos cada aresta original (u, v) pela nova aresta (u', v''). Aqui convencionamos que $s'' = s' = s$ e $t'' = t' = t$.

A capacidade de cada aresta (v'', v') é $p(v)$ para $v \in V - \{s, t\}$ e a capacidade de cada aresta (u', v'') é igual à capacidade da aresta (u, v) na rede original.

É fácil mostrar que um fluxo máximo nesta instância do PFM corresponde a um fluxo máximo da instância original (G, c, p, s, t).

Redução a um Problema de Fluxo Máximo



Redução a um Problema de Fluxo Máximo

Note que aqui fizemos **duas reduções**:

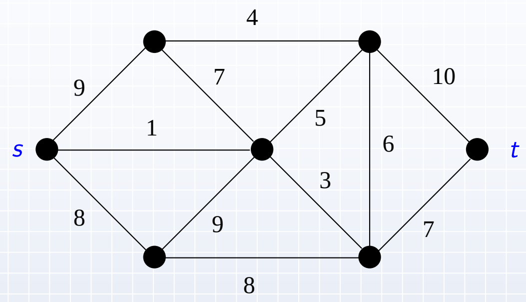
- a primeira redução foi modelar o problema do Neo como um PFMCV e
- a segunda foi a redução do PFMCV ao PFM.

A composição dessas duas reduções é uma redução do problema do Neo ao PFM.

Qual é a complexidade da redução?

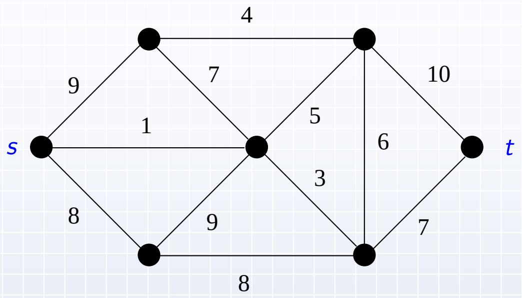
Redução a um Problema de Fluxo Máximo

Eis outro exemplo bélico. Na Segunda Guerra Mundial os alemães frequentemente usavam a rede ferroviária para transportar suprimentos de um ponto s a outro ponto t. Os aliados queriam interromper este processo.



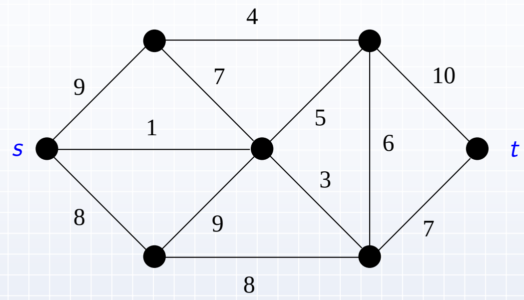
Redução a um Problema de Fluxo Máximo

A rede ferroviária era modelada como um grafo não direcionado. A razão é que os trilhos podiam ser usadas nas duas direções. Cada aresta tinha uma capacidade que indicava a resistência a bombardeios.



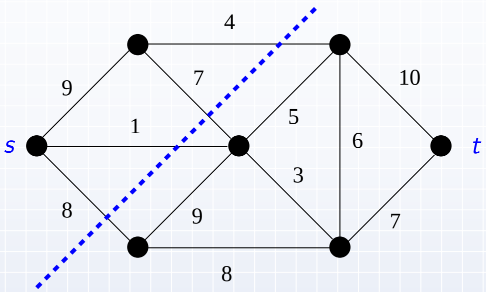
Redução a um Problema de Fluxo Máximo

Os aliados queriam destruir **todos** os caminhos de s a t. Um jeito **caro** de fazer isto seria simplesmente bombardear todas as arestas. Mas obviamente isto não é necessário.



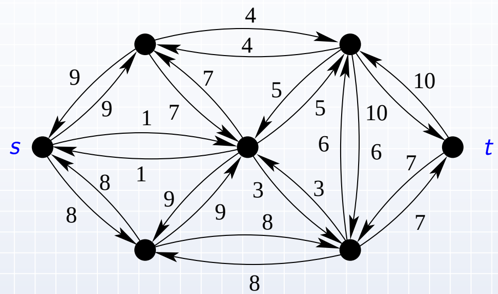
Redução a um Problema de Fluxo Máximo

Um modo mais barato é encontrar um corte (S, T) em que $s \in S$ e $t \in T$ e tal que a soma das capacidades das arestas do corte fosse **mínima**.



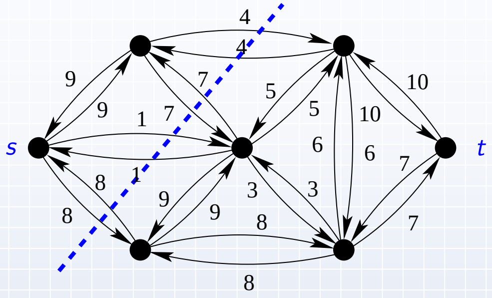
Redução a um Problema de Fluxo Máximo

Podemos construir uma rede de fluxo (G, c, s, t) substituindo cada aresta não direcionada (u, v) por um par de arestas orientadas (u, v) e (v, u). Esta rede tem arestas antiparalelas, mas já vimos como nos livrar delas.



Redução a um Problema de Fluxo Máximo

Pelo Teorema do Fluxo Máximo Corte Mínimo o valor de um fluxo máximo é igual à capacidade de um corte mínimo na rede. O algoritmo de Ford-Fulkerson ou de Edmonds-Karp pode ser usado para encontrar um corte mínimo (S, T) (lembra?).



Redução a um Problema de Fluxo Máximo

É fácil ver que a capacidade de (S, T) na rede corresponde à capacidade de (S, T) no grafo original e há uma correspondência de soluções (cortes) entre as duas instâncias. Logo, esta redução resolve o problema inicial.