Fluxos e Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

Questão 1. (CLRS) Exercícios complementares (2ed): 26-1.1 a 26-1.7, 26-1.9, 26-2.1 a 26-2.10, 26-3.1 a 26-3.5.

Questão 2. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais são falsas? Justifique sua resposta apresentado uma prova ou um contra-exemplo.

1. Se f é um fluxo máximo de uma rede então $f(a) = 0$ ou $f(a) = c(a)$ para toda aresta $a \in E$.
2. Toda rede possui um fluxo máximo f tal que $f(a) = 0$ ou $f(a) = c(a)$ para toda aresta $a \in E$.
3. Se todas arestas têm capacidades diferentes então existe um único corte mínimo.
4. Suponha que (S,T) é um corte mínimo em uma rede (G,c,s,t). Se multiplicarmos as capacidades de todas as arestas por um número $\lambda > 0$ então (S,T) também é um corte mínimo na nova rede $(D,\lambda c,s,t)$.
5. Suponha que (S,T) é um corte mínimo em uma rede (G,c,s,t). Se aumentarmos as capacidades de todas as arestas de um número $\lambda > 0$ então (S,T) também é um corte mínimo na nova rede (D,c',s,t).

Questão 3. Seja (G,c,s,t) uma rede de fluxo. Um fluxo inteiro é **par** (**ímpar**, respectivamente) se $f(a)$ é par (ímpar, respectivamente) para toda aresta $a \in E$. Prove ou mostre um contra-exemplo para cada uma das afirmações seguintes.

1. Se todas as capacidades são inteiros pares, então existe um fluxo máximo que é par.
2. Se todas as capacidades são inteiros ímpares, então existe um fluxo máximo que é ímpar.

Questão 4. (Teorema de Menger)

(a) Dados vértices s e t em um **grafo direcionado** G, dizemos que uma coleção $P_1,P_2,\ldots,P_k$ de caminhos com início em s e final em t é **aresta-disjunta** se para quaisquer caminhos P_i e P_j, P_i e P_j não têm arestas em comum. Demonstre que, dado grafo G e vértices s e t, o número máximo de caminhos disjuntos nas arestas de s a t é igual ao número mínimo de arestas necessárias para desconectar s de t.

(b) O problema dos caminhos aresta-disjuntos (CAD) consiste em, dados um grafo G e vértices s e t em G, encontrar uma coleção aresta-disjunta máxima de caminhos de s a t. Mostre que CAD $\prec_{\text{poli}}$ FM.

Algoritmos especializados de fluxo

- Alguns dos exercícios abaixo são de **modelagem**, isto é, mostrar como reduzir um problema a um Problema de Fluxo Máximo (PFM). Você **deve** descrever como construir a rede (quem são os vértices e as arestas, quem é a fonte e o terminal, e como são as capacidades das arestas). Obviamente **não** basta fazer um desenho, mas você pode colocar para ajudar na explicação.

Questão 5. Considere a variante de CAD definido no Exercício 4, chamada NCAD, em que o grafo G de entrada é não direcionado. Mostre que NCAD $\prec_{\text{poli}}$ CAD.

Questão 6. (Decomposição de fluxo). Seja (G,c,s,t) uma rede. Dizemos que um fluxo f é **básico** se:

- existe um caminho P de s a t e um valor $\alpha > 0$ tal que $f(e) = \alpha$ se $e \in P$ e $f(e) = 0$ caso contrário; **ou**
- existe um ciclo C e um valor $\alpha > 0$ tal que $f(e) = \alpha$ se $e \in C$ e $f(e) = 0$ caso contrário.

[1] Esta lista deve ser feita logo após as aulas do conteúdo correspondente e serve para fixar o conteúdo, confirmar ou identificar as dúvidas. Anote suas dúvidas e procure atendimento! Os exercícios são referências ou transcrições de exercícios dos livros-textos (CLRS/Manber), ou foram gentilmente cedidos por outros professores, particularmente por Flávio Keidi Miyazawa (FKM), Cid Carvalho de Souza e Orlando Lee (CID/OL).

Denotamos um tal fluxo por (P,α) ou (C,α).

Uma **decomposição de um fluxo f em caminhos e ciclos** é um conjunto de fluxos básicos (P_i,α_i) $(i = 1,2,\dots,k)$ e (C_j,β_j) $(j = 1,2,\dots,q)$ em que P_i é um caminho de s a t e C_j é um ciclo em G tais que $|f| = |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_k| + |\beta_1| + \cdots + |\beta_q|$.

Mostre que todo fluxo f possui uma decomposição em caminhos e ciclos. Mostre que tal decomposição pode ser encontrada em $O(V+E)$.

Questão 7. Mostre como encontrar um fluxo máximo em uma rede $G = (V,E)$ em uma sequência de no máximo $|E|$ caminhos aumentantes. (Dica: come

Questão 8. Mostre que se f é um fluxo máximo de uma rede (G,c,s,t) produzido pelo algoritmo de Edmonds-Karp então f possui uma decomposição em caminhos (ou seja, não usa fluxos básicos correspondendo a ciclos).

Questão 9. Diga se a frase a seguir é falsa ou verdadeira, justificando sua resposta: *"Todo fluxo máximo em uma rede admite uma decomposição em caminhos."*

Questão 10. Seja (G,c,s,t) uma rede com capacidades inteiras. Suponha que após resolver o PFM para esta instância, o dono da rede decidiu **aumentar** a capacidade de uma aresta a de k unidades. Mostre como encontrar o fluxo máximo da nova instância em tempo $O(kE)$. Se o dono decidisse **diminuir** a capacidade da aresta a de k unidades, seria possível resolver o novo problema em tempo $O(kE)$?

Observação: note que basta descobrir como resolver o problema quando $k = 1$. Na segunda parte, use o teorema de decomposição de fluxo.

Questão 11. Seja (G,c,s,t) uma rede. Responda os itens a seguir:

1. Descreva um algoritmo para encontrar o corte mínimo $[S,\overline{S}]$ tal que qualquer outro corte mínimo $[R,\overline{R}]$ satisfaz $S \subseteq R$.
2. Dado um fluxo máximo em uma rede, descreva um algoritmo para encontrar o corte mínimo $[S,\overline{S}]$ tal que qualquer outro corte mínimo $[R,\overline{R}]$ satisfaz $R \subseteq S$.
3. Descreva um algoritmo que determina se (G,c,s,t) possui um único corte mínimo.

Aplicações de fluxo

Questão 12. O problema do casamento na Távola Redonda. Um certo dia o Rei Artur caprichosamente decidiu que era tempo das donzelas da corte de Camelot se casarem. Na corte havia n donzelas e n cavaleiros. Apesar de Artur ser conhecido como um regente impiedoso, ele não queria casar nenhuma donzela com algum cavaleiro de quem ela não gostasse. Assim, ele pediu a Merlin que arranjasse o casamento de todas as donzelas de modo que isto não ocorresse. Suponha que cada donzela fornece a Merlin uma lista dos cavaleiros com quem ela aceitaria se casar. Como se vê, além de autoritário, o rei Artur era machista e preconceituoso. Mostre como Merlin pode determinar se é possível realizar estes n casamentos forçados.

Questão 13. O problema do jantar. Várias famílias saem juntas para jantar. Para aumentar a interação social[2], cada pessoa gostaria de se sentar em uma mesa em que não houvesse outro membro da sua família. Suponha que no total existam p famílias e a família i tem a_i membros. Suponha que há q mesas disponíveis e que a mesa j tem capacidade para acomodar b_j pessoas. Mostre como formular este problema como um PFM.

Questão 14. Suponha que Neo quer enviar uma informação de um ponto (vértice) s a outro ponto t em uma rede com capacidades unitárias (isto é, cada aresta tem capacidade igual a 1). A Matrix pode impedir isto destruindo um conjunto de **arestas** da rede (o que seria equivalente a remover as arestas do grafo orientado). Mostre como a Matrix pode determinar um conjunto mínimo de arestas cuja remoção destrói todos os caminhos de s a t. **Justifique.**

[2] Suponha por absurdo que todos vão desligar seus smartphones.

Questão 15. Considere novamente o exercício anterior, mas agora suponha que a Matrix quer *desligar* um conjunto de **vértices** da rede (o que seria equivalente a remover tais vértices do grafo orientado). Mostre como a Matrix pode determinar um conjunto mínimo de vértices cuja remoção destrói todos os caminhos de s a t. **Justifique.**