Lista de exercícios de fixação[1] – Grafos – IC-UNICAMP – 1º semestre de 2017

Conceitos de grafos

Questão 1. Mostre que em uma festa com pelo menos $n \geq 6$ pessoas, existem três pessoas que se conhecem mutuamente ou três pessoas que não se conhecem mutuamente.

Questão 2. Suponha que em um grupo S de n pessoas, com $n \geq 4$, vale o seguinte: em qualquer grupo $X \subseteq S$ de 4 pessoas, existe uma que conhece as demais pessoas de X. Mostre que existe uma pessoa em S que conhece todas as demais pessoas de S.

Questão 3. Sejam G um grafo e u, v vértices de G. Mostre que se existe um passeio de u a v em G, então existe um caminho de u a v em G.

Sejam G um grafo e u, v, w vértices de G. Mostre que se em G existem um caminho de u a v e um caminho de v a w então existe um caminho de u a w em G.

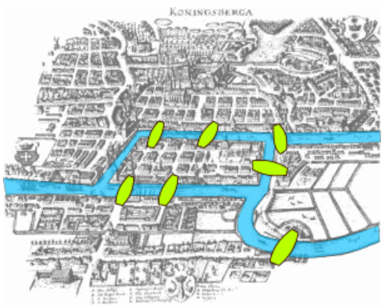
Questão 4. Demonstre ou dê um contraexemplo.

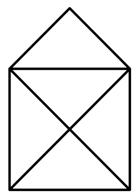
a) É verdade que todo passeio fechado contém um ciclo?

b) Uma rota é um passeio fechado com pelo menos uma aresta e que não tem repetição de arestas. É verdade que toda rota contém um ciclo?

Questão 5. Prove por indução que todo grafo conexo $G = (V, E)$, $|V| \geq 2$, tem um vértice cuja remoção mantém o grafo resultante conexo.

Questão 6. (Extra: Grafos Eulerianos) O Problema das Sete Pontes de Königsberg é um problema matemático famoso e resolvido por Euler. Existe um percurso que passe exatamente uma vez por cada uma das sete pontes da antiga cidade de Königsberg? Euler respondeu que não.





c) Modele o problema como um grafo:

- Quem são os vértices? Quem são as arestas?
- Escreva uma pergunta sobre um grafo que seja equivalente ao problema das pontes.

d) A figura da direita é uma casa. É apresentada com um desafio para crianças: desenhar sem tirar a ponta do lápis do papel e sem repetir linhas.

- Argumente que os dois problemas são os mesmos, mas para grafos diferentes.
- Desenhe o grafo para cada problema e conte o grau de cada vértices. Quantos vértices de grau par e ímpar tem cada um?
- Você consegue fazer o desenho da direita, sem levantar o lápis ou repetir linhas, mas começando pelo telhado?

[1] Esta lista deve ser feita logo após as aulas do conteúdo correspondente e serve para fixar o conteúdo, confirmar ou identificar as dúvidas. Anote suas dúvidas e procure atendimento! Os exercícios são referências ou transcrições de exercícios dos livros-textos (CRLS/Manber), ou foram gentilmente cedidos por outros professores, particularmente por Flávio Keidi Miyazawa (FKM), Cid Carvalho de Souza e Orlando Lee (CID/OL).

e) (*) Um grafo é Euleriano se, e somente se, existe um passeio fechado que passa por todas as arestas do grafo. É fácil ver que uma condição necessária para o grafo ser Euleriano é que todos os vértices tenham grau par. Por quê? Dê uma condição suficiente para um grafo ser Euleriano.

Fatos básicos de grafos

Questão 7. Demonstre o seguinte:

As seguintes afirmações são equivalentes:

- G é uma árvore.
- Para todo par de vértices u, v de G, existe um único caminho de u a v em G (e G não tem laços).

Questão 8. Sejam G um grafo direcionado e u, v vértices de G. Mostre que se existe um passeio de u a v em G, então existe um caminho de u a v em G.

Questão 9. Sejam G um grafo direcionado e u, v, w vértices de G. Mostre que se em G existem um caminho de u a v e um caminho de v a w então existe um caminho de u a w em G.

Questão 10. É verdade que todo passeio fechado em um grafo direcionado contém um ciclo (direcionado)?

Representação de grafos

Questão 11. (CRLS) Exercícios: 22.1-1, 22.1-2, 22.1-3, 22.1-4, 22.1-6, 22.1-7,

Questão 12. Seja M uma matriz de adjacência de um grafo $G = (V, E)$ e calcule o quadrado M^2. Dados $u, v \in V$, se existe um caminho de u até v, que valores pode haver em $M^2[u, v]$? Utilize essa informação e dê um algoritmo que calcule o quadrado de um grafo, representado como uma matriz de adjacências, com tempo assintoticamente melhor do que $|V|^3$.

Questão 13. Crie um algoritmo que receba um grafo G em forma de lista de adjacências e um conjunto $S \subseteq V$ e crie um novo grafo $G[S]$. Analise a complexidade de seu algoritmo.