MC102 – Aula 25
Recursão

Eduardo C. Xavier

Instituto de Computação – Unicamp

7 de Junho de 2018

Roteiro

1. Recursão – Indução
2. Recursão
3. Fatorial
4. O que acontece na memória
5. Recursão $\times$ Iteração
6. Soma em um Vetor
7. Números de fibonacci
8. Exercício

Recursão – Indução

- Devemos criar uma algoritmo para resolver um determinado problema.
- Usando o método de recursão/indução, a solução de um problema pode ser expressa da seguinte forma:
  - Primeiramente, definimos a solução para casos básicos;
  - Em seguida, definimos como resolver o problema para um caso geral, utilizando-se de soluções para instâncias menores do problema.

Recursão – Indução

- Devemos criar uma algoritmo para resolver um determinado problema.
- Usando o método de recursão/indução, a solução de um problema pode ser expressa da seguinte forma:
  - Primeiramente, definimos a solução para casos básicos;
  - Em seguida, definimos como resolver o problema para um caso geral, utilizando-se de soluções para instâncias menores do problema.

Recursão – Indução

- Devemos criar uma algoritmo para resolver um determinado problema.
- Usando o método de recursão/indução, a solução de um problema pode ser expressa da seguinte forma:
  - Primeiramente, definimos a solução para casos básicos;
  - Em seguida, definimos como resolver o problema para um caso geral, utilizando-se de soluções para instâncias menores do problema.

Indução

- **Indução:** Técnica de demonstração matemática, que no caso mais simples, é usada para demonstrar que uma proposição vale para todos os números naturais.
- Seja T uma proposição que desejamos provar como verdadeira para todos valores naturais n.
- Ao invés de provar diretamente que T é válida para todos os valores de n, basta provar as duas condições 1 e 3 a seguir:
  1. **Passo base:** PROVAR que T é válido para $n = 1$.
  2. **Hipótese de Indução:** Assumimos que T é válido para $n - 1$.
  3. **Passo de Indução:** Sabendo que T é válido para $n - 1$ devemos PROVAR que T é válido para n.

Indução

- **Indução:** Técnica de demonstração matemática, que no caso mais simples, é usada para demonstrar que uma proposição vale para todos os números naturais.
- Seja T uma proposição que desejamos provar como verdadeira para todos valores naturais n.
- Ao invés de provar diretamente que T é válida para todos os valores de n, basta provar as duas condições 1 e 3 a seguir:
  1. **Passo base:** PROVAR que T é válido para $n = 1$.
  2. **Hipótese de Indução:** Assumimos que T é válido para $n - 1$.
  3. **Passo de Indução:** Sabendo que T é válido para $n - 1$ devemos PROVAR que T é válido para n.

Indução

- **Indução:** Técnica de demonstração matemática, que no caso mais simples, é usada para demonstrar que uma proposição vale para todos os números naturais.
- Seja T uma proposição que desejamos provar como verdadeira para todos valores naturais n.
- Ao invés de provar diretamente que T é válida para todos os valores de n, basta provar as duas condições 1 e 3 a seguir:
  1. **Passo base:** PROVAR que T é válido para $n = 1$.
  2. **Hipótese de Indução:** Assumimos que T é válido para $n - 1$.
  3. **Passo de Indução:** Sabendo que T é válido para $n - 1$ devemos PROVAR que T é válido para n.

Indução

- **Indução:** Técnica de demonstração matemática, que no caso mais simples, é usada para demonstrar que uma proposição vale para todos os números naturais.
- Seja T uma proposição que desejamos provar como verdadeira para todos valores naturais n.
- Ao invés de provar diretamente que T é válida para todos os valores de n, basta provar as duas condições 1 e 3 a seguir:
  1. **Passo base:** PROVAR que T é válido para $n = 1$.
  2. **Hipótese de Indução:** Assumimos que T é válido para $n - 1$.
  3. **Passo de Indução:** Sabendo que T é válido para $n - 1$ devemos PROVAR que T é válido para n.

Indução

- **Indução:** Técnica de demonstração matemática, que no caso mais simples, é usada para demonstrar que uma proposição vale para todos os números naturais.
- Seja T uma proposição que desejamos provar como verdadeira para todos valores naturais n.
- Ao invés de provar diretamente que T é válida para todos os valores de n, basta provar as duas condições 1 e 3 a seguir:
  1. **Passo base:** PROVAR que T é válido para $n = 1$.
  2. **Hipótese de Indução:** Assumimos que T é válido para $n - 1$.
  3. **Passo de Indução:** Sabendo que T é válido para $n - 1$ devemos PROVAR que T é válido para n.

Indução

- **Indução:** Técnica de demonstração matemática, que no caso mais simples, é usada para demonstrar que uma proposição vale para todos os números naturais.
- Seja T uma proposição que desejamos provar como verdadeira para todos valores naturais n.
- Ao invés de provar diretamente que T é válida para todos os valores de n, basta provar as duas condições 1 e 3 a seguir:
  1. **Passo base:** PROVAR que T é válido para $n = 1$.
  2. **Hipótese de Indução:** Assumimos que T é válido para $n - 1$.
  3. **Passo de Indução:** Sabendo que T é válido para $n - 1$ devemos PROVAR que T é válido para n.

Indução

- Por que a indução funciona? Por que as duas condições são suficientes?
  - Mostramos que T é valida para um caso base, como $n = 1$.
  - Com o passo da indução, automaticamente mostramos que T é válida para $n = 2$.
  - Como T é válida para $n = 2$, pelo passo de indução, T também é válida para $n = 3$, e assim por diante.

Exemplo

Teorema

A soma dos n primeiros números ímpares é n^2

- Parece que o teorema vale para alguns casos de teste:

$$
\begin{aligned}
n = 1 \rightarrow \quad & 1 && = 1 && (1)\\
n = 2 \rightarrow \quad & 1 + 3 && = 4 && (2)\\
n = 3 \rightarrow \quad & 1 + 3 + 5 && = 9 && (3)\\
n = 4 \rightarrow \quad & 1 + 3 + 5 + 7 && = 16 && (4)\\
& && && (5)
\end{aligned}
$$

- Vamos usar indução para provar a validade do Teorema.

Exemplo

Teorema

A soma dos n primeiros números ímpares é n^2

Prova.

- **Base:** Para $n = 1$ o teorema é valido, pois $1 = 1^2$.
- Definimos $S(n)$ como a soma dos n primeiros números ímpares, ou seja, $S(n) = 1 + 3 + \ldots + 2n - 1$.
- **Hip. de Indução:** O Teorema vale para $(n-1)$, ou seja, $S(n-1) = (n-1)^2$.
- **Passo:** Deve-se mostrar que é válido para n, ou seja, mostrar que $S(n) = n^2$.
- Por definição, $S(n) = S(n-1) + 2n - 1$ e por hipótese $S(n-1) = (n-1)^2$.

$$\begin{aligned} S(n) &= S(n-1) + 2n - 1 \\ &= (n-1)^2 + 2n - 1 \\ &= (n^2 - 2n + 1) + 2n - 1 \\ &= n^2 \end{aligned}$$

Exemplo

Teorema

A soma dos n primeiros números ímpares é n^2

Prova.

- **Base:** Para $n = 1$ o teorema é valido, pois $1 = 1^2$.
- Definimos $S(n)$ como a soma dos n primeiros números ímpares, ou seja, $S(n) = 1 + 3 + \ldots + 2n - 1$.
- **Hip. de Indução:** O Teorema vale para $(n-1)$, ou seja, $S(n-1) = (n-1)^2$.
- **Passo:** Deve-se mostrar que é válido para n, ou seja, mostrar que $S(n) = n^2$.
- Por definição, $S(n) = S(n-1) + 2n - 1$ e por hipótese $S(n-1) = (n-1)^2$.

$$\begin{aligned} S(n) &= S(n-1) + 2n - 1 \\ &= (n-1)^2 + 2n - 1 \\ &= (n^2 - 2n + 1) + 2n - 1 \\ &= n^2 \end{aligned}$$

Exemplo

Teorema

A soma dos n primeiros números ímpares é n^2

Prova.

- **Base:** Para $n = 1$ o teorema é valido, pois $1 = 1^2$.
- Definimos $S(n)$ como a soma dos n primeiros números ímpares, ou seja, $S(n) = 1 + 3 + \ldots + 2n - 1$.
- **Hip. de Indução:** O Teorema vale para $(n-1)$, ou seja, $S(n-1) = (n-1)^2$.
- **Passo:** Deve-se mostrar que é válido para n, ou seja, mostrar que $S(n) = n^2$.
- Por definição, $S(n) = S(n-1) + 2n - 1$ e por hipótese $S(n-1) = (n-1)^2$.

$$\begin{aligned} S(n) &= S(n-1) + 2n - 1 \\ &= (n-1)^2 + 2n - 1 \\ &= (n^2 - 2n + 1) + 2n - 1 \\ &= n^2 \end{aligned}$$

Exemplo

Teorema

A soma dos n primeiros números ímpares é n^2

Prova.

- **Base:** Para $n = 1$ o teorema é valido, pois $1 = 1^2$.
- Definimos $S(n)$ como a soma dos n primeiros números ímpares, ou seja, $S(n) = 1 + 3 + \ldots + 2n - 1$.
- **Hip. de Indução:** O Teorema vale para $(n-1)$, ou seja, $S(n-1) = (n-1)^2$.
- **Passo:** Deve-se mostrar que é válido para n, ou seja, mostrar que $S(n) = n^2$.
- Por definição, $S(n) = S(n-1) + 2n - 1$ e por hipótese $S(n-1) = (n-1)^2$.

$$\begin{aligned} S(n) &= S(n-1) + 2n - 1 \\ &= (n-1)^2 + 2n - 1 \\ &= (n^2 - 2n + 1) + 2n - 1 \\ &= n^2 \end{aligned}$$

Exemplo

Teorema

A soma dos n primeiros números ímpares é n^2

Prova.

- **Base:** Para $n = 1$ o teorema é valido, pois $1 = 1^2$.
- Definimos $S(n)$ como a soma dos n primeiros números ímpares, ou seja, $S(n) = 1 + 3 + \ldots + 2n - 1$.
- **Hip. de Indução:** O Teorema vale para $(n-1)$, ou seja, $S(n-1) = (n-1)^2$.
- **Passo:** Deve-se mostrar que é válido para n, ou seja, mostrar que $S(n) = n^2$.
- Por definição, $S(n) = S(n-1) + 2n - 1$ e por hipótese $S(n-1) = (n-1)^2$.

$$\begin{aligned} S(n) &= S(n-1) + 2n - 1 \\ &= (n-1)^2 + 2n - 1 \\ &= (n^2 - 2n + 1) + 2n - 1 \\ &= n^2 \end{aligned}$$

Exemplo

Teorema

A soma dos n primeiros números ímpares é n^2

Prova.

- **Base:** Para $n = 1$ o teorema é valido, pois $1 = 1^2$.
- Definimos $S(n)$ como a soma dos n primeiros números ímpares, ou seja, $S(n) = 1 + 3 + \ldots + 2n - 1$.
- **Hip. de Indução:** O Teorema vale para $(n-1)$, ou seja, $S(n-1) = (n-1)^2$.
- **Passo:** Deve-se mostrar que é válido para n, ou seja, mostrar que $S(n) = n^2$.
- Por definição, $S(n) = S(n-1) + 2n - 1$ e por hipótese $S(n-1) = (n-1)^2$.

$$\begin{aligned} S(n) &= S(n-1) + 2n - 1 \\ &= (n-1)^2 + 2n - 1 \\ &= (n^2 - 2n + 1) + 2n - 1 \\ &= n^2 \end{aligned}$$

Exemplo 2

Teorema

Qualquer tabuleiro de $2^n \times 2^n$ quadrados pode ser preenchido com uma peça no formato em L (de três quadrados) onde apenas um dos quatro quadrados de canto do tabuleiro fica livre.

Exemplo 2

Teorema

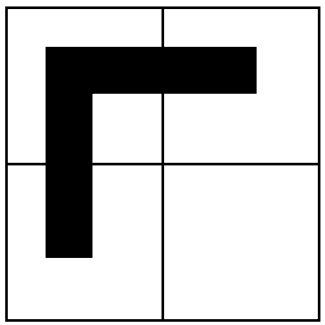
Qualquer tabuleiro de dimensões $2^n \times 2^n$ quadrados pode ser preenchido com uma peça no formato em L (de três quadrados) onde apenas um dos quatro quadrados de canto do tabuleiro fica livre.

Prova.

Base: Para $n = 1$ é fácil perceber que o teorema vale:

2^1

2^1

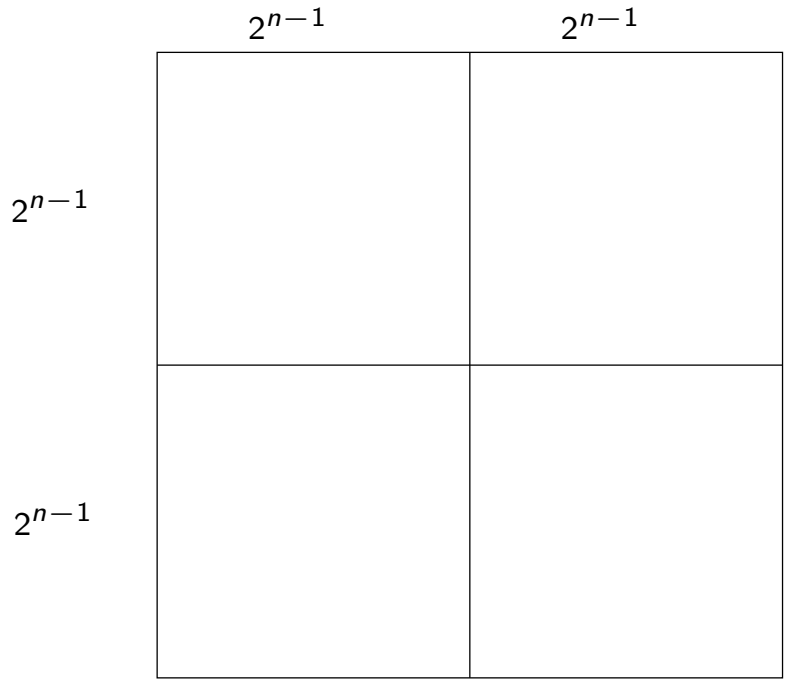


Hip. de Indução: Vamos assumir que é válido para $(n-1)$, ou seja, pode-se preencher um tabuleiro $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ com figuras em L deixando apenas um dos cantos livre.

Exemplo 2

Prova.

Passo: Dado tabuleiro $2^n \times 2^n$ podemos dividí-lo da seguinte forma:

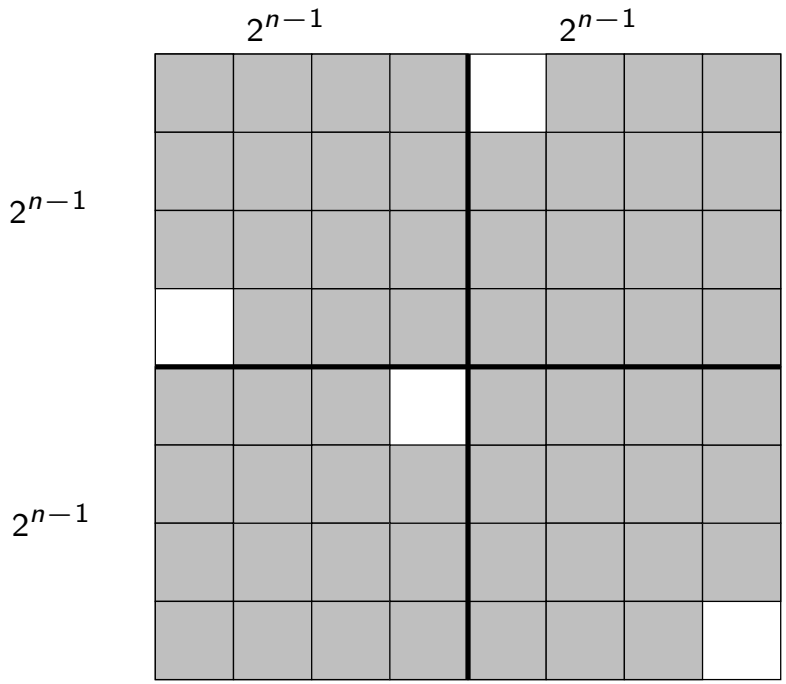


□

Exemplo 2

Prova.

Passo: Por hipótese é possível preencher cada um dos sub-tabuleiros de $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ onde apenas um de seus cantos ficam livres:

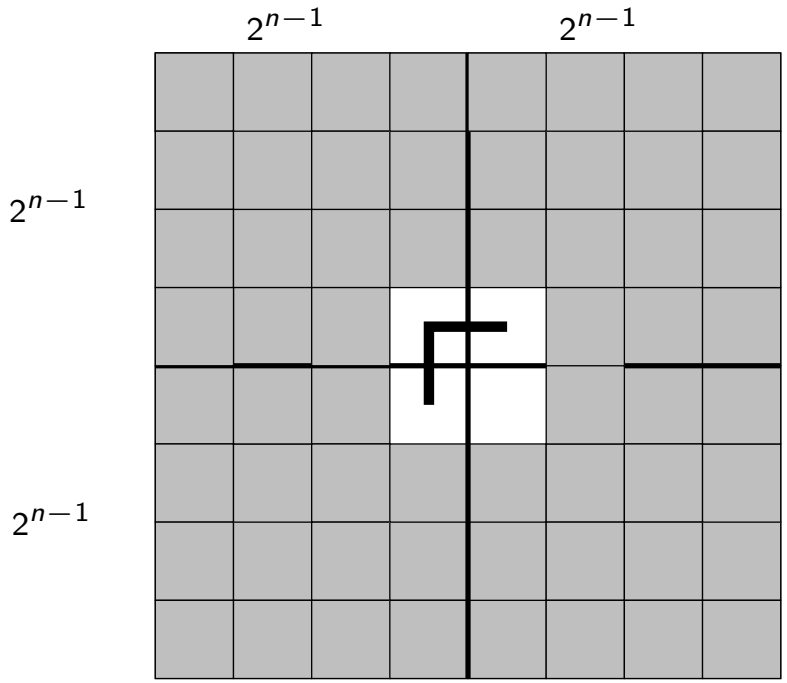


□

Exemplo 2

Prova.

Passo: Pode-se obter um preenchimento equivalente rotacionando cada sub-tabuleiro de tal forma que os 4 cantos livres fiquem juntos no centro do tabuleiro:

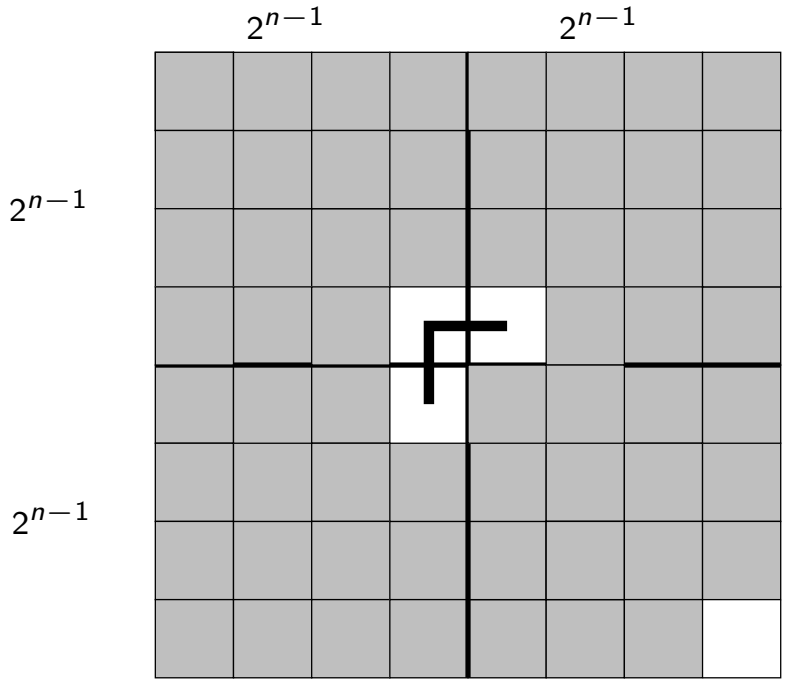


Preenchemos 3 dos 4 quadrados com a figura em L.

Exemplo 2

Prova.

Passo: Finalmente rotacionamos o sub-tabuleiro com quadrado livre para que este fique em um canto do tabuleiro:



Note que isto também serve como uma descrição em alto nível de um algoritmo para preencher um tabuleiro com figuras em L.

Recursão

- Definições recursivas de funções funcionam como o *princípio matemático da indução* que vimos anteriormente.
- A idéia é que a solução de um problema pode ser expressa da seguinte forma:
  - Definimos a solução para casos básicos;
  - Definimos como resolver o problema geral utilizando soluções do mesmo problema só que para casos menores.

Fatorial

Problema: Calcular o fatorial de um número ($n!$).
Qual o caso base e o passo da indução?

- Se n é igual a 1, então o fatorial é 1.

Qual seria o passo indutivo?

- Temos que expressar a solução para $n > 1$, supondo que já sabemos a solução para algum caso mais simples.
- $n! = n * (n-1)!$.

Este caso é trivial pois a própria definição do fatorial é recursiva.

Fatorial

Problema: Calcular o fatorial de um número ($n!$).
Qual o caso base e o passo da indução?

- Se n é igual a 1, então o fatorial é 1.

Qual seria o passo indutivo?

- Temos que expressar a solução para $n > 1$, supondo que já sabemos a solução para algum caso mais simples.
- $n! = n * (n-1)!$.

Este caso é trivial pois a própria definição do fatorial é recursiva.

Fatorial

Problema: Calcular o fatorial de um número ($n!$).
Qual o caso base e o passo da indução?

- Se n é igual a 1, então o fatorial é 1.

Qual seria o passo indutivo?

- Temos que expressar a solução para $n > 1$, supondo que já sabemos a solução para algum caso mais simples.
- $n! = n * (n - 1)!$.

Este caso é trivial pois a própria definição do fatorial é recursiva.

Fatorial

Portanto, a solução do problema **pode ser expressa de forma recursiva** como:

- Se $n = 1$ então $n! = 1$.
- Se $n > 1$ então $n! = n * (n - 1)!$.

Note como aplicamos o princípio da indução:

- Sabemos a solução para um caso base: $n = 1$.
- Definimos a solução do problema geral $n!$ em termos do mesmo problema só que para um caso menor $(n - 1)!$.

Fatorial em Python

```
def fatr(n):
        if n == 1:
                return 1
        else:
                x = n-1
                r = fatr(x)
                return n*r
```

Fatorial

- Para solucionar o problema, é feita uma chamada para a própria função, por isso, esta função é chamada *recursiva*.
- Recursividade geralmente permite uma descrição mais clara e concisa dos algoritmos, especialmente quando o problema é recursivo por natureza.

Fatorial

- Para solucionar o problema, é feita uma chamada para a própria função, por isso, esta função é chamada *recursiva*.
- Recursividade geralmente permite uma descrição mais clara e concisa dos algoritmos, especialmente quando o problema é recursivo por natureza.

O que acontece na memória

- Precisamos entender como é feito o controle sobre as variáveis locais em chamadas recursivas.
- A memória de um sistema computacional é dividida em alguns segmentos:
  - **Espaço Estático**: Contém as variáveis globais e código do programa.
  - **Heap:** Para alocação dinâmica de memória.
  - **Pilha:** Para execução de funções.

O que acontece na memória

O que acontece na pilha:

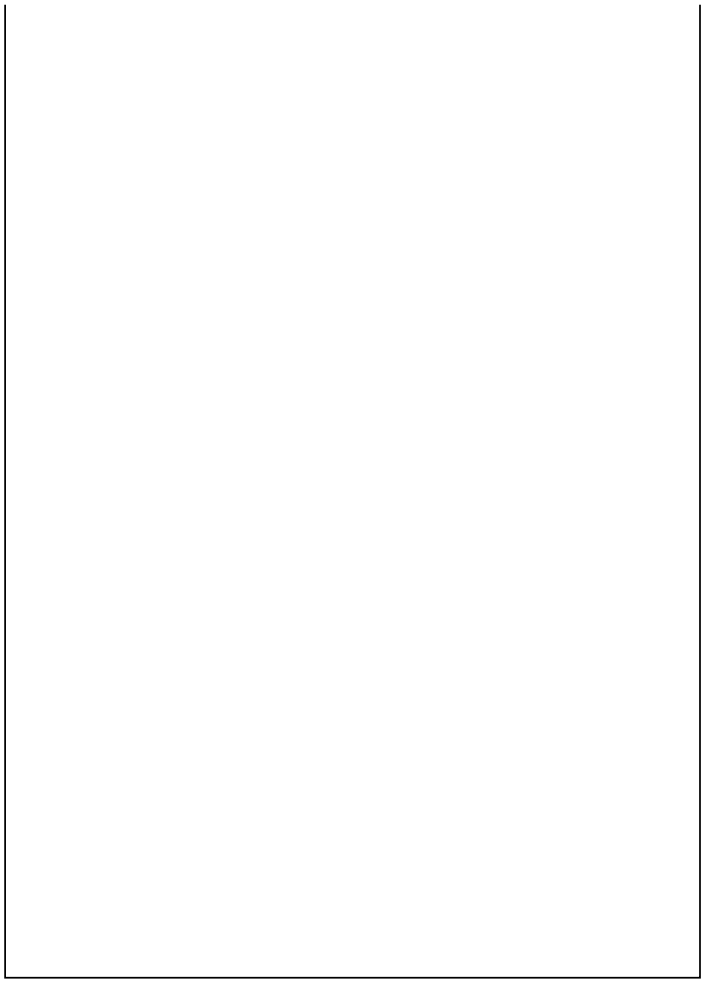
- Toda vez que uma função é invocada, suas variáveis locais são armazenadas no topo da pilha.
- Quando uma função termina a sua execução, suas variáveis locais são removidas da pilha.

Considere o exemplo:

```
def f1(a, b):
    c = 5
    return (c+a+b)

def f2(a, b):
    c = f1(b, a)
    return c

def main():
  f2(2, 3)

main()
```

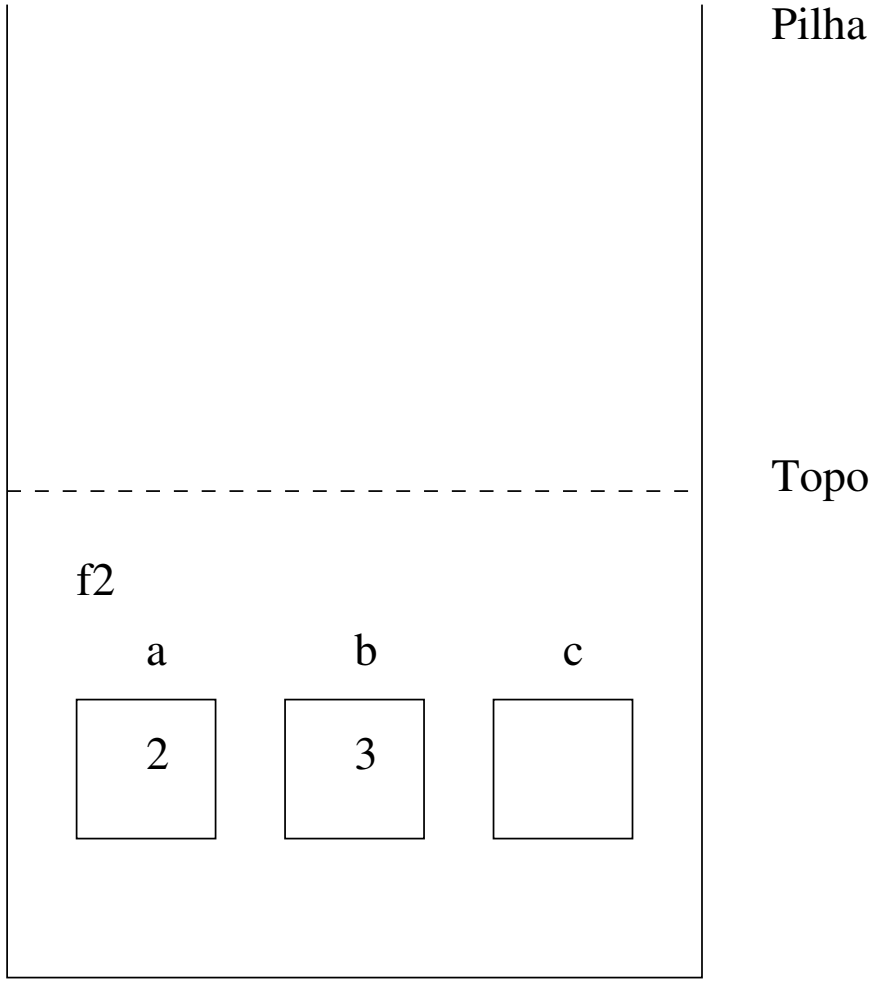
O que acontece na memória

Inicialmente a pilha está vazia.



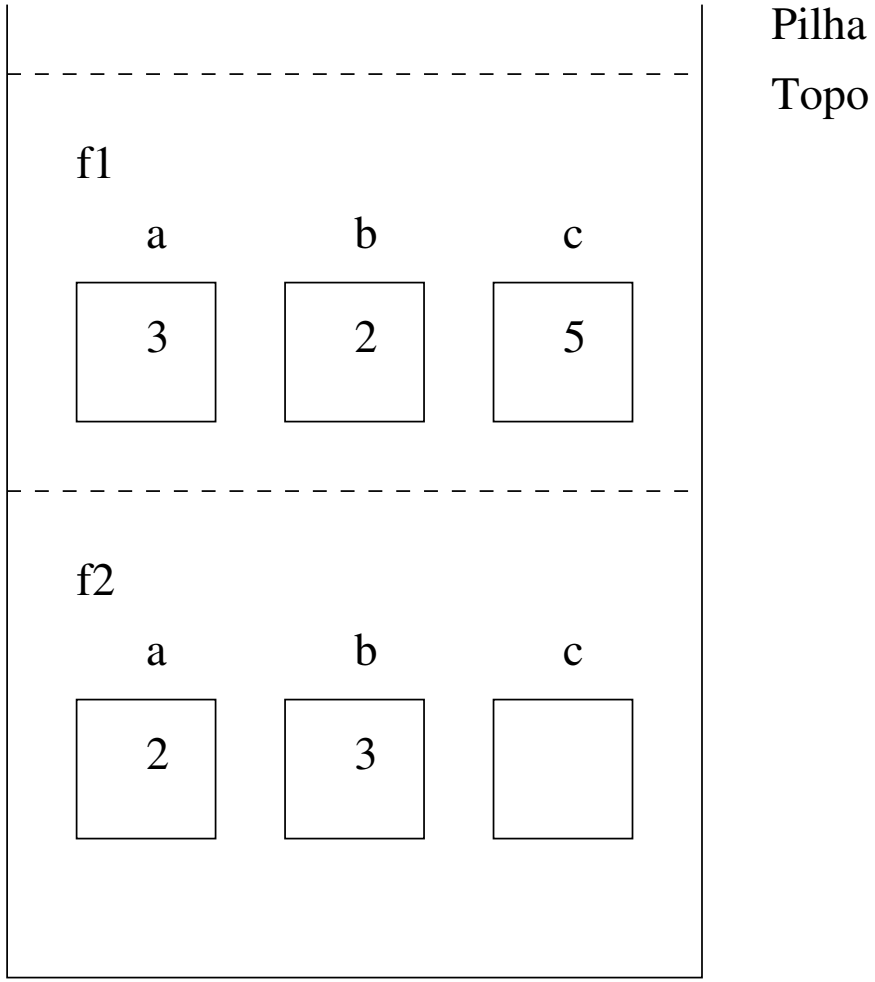
O que acontece na memória

Quando **f2(2,3)** é invocada, suas variáveis locais são alocadas no topo da pilha.



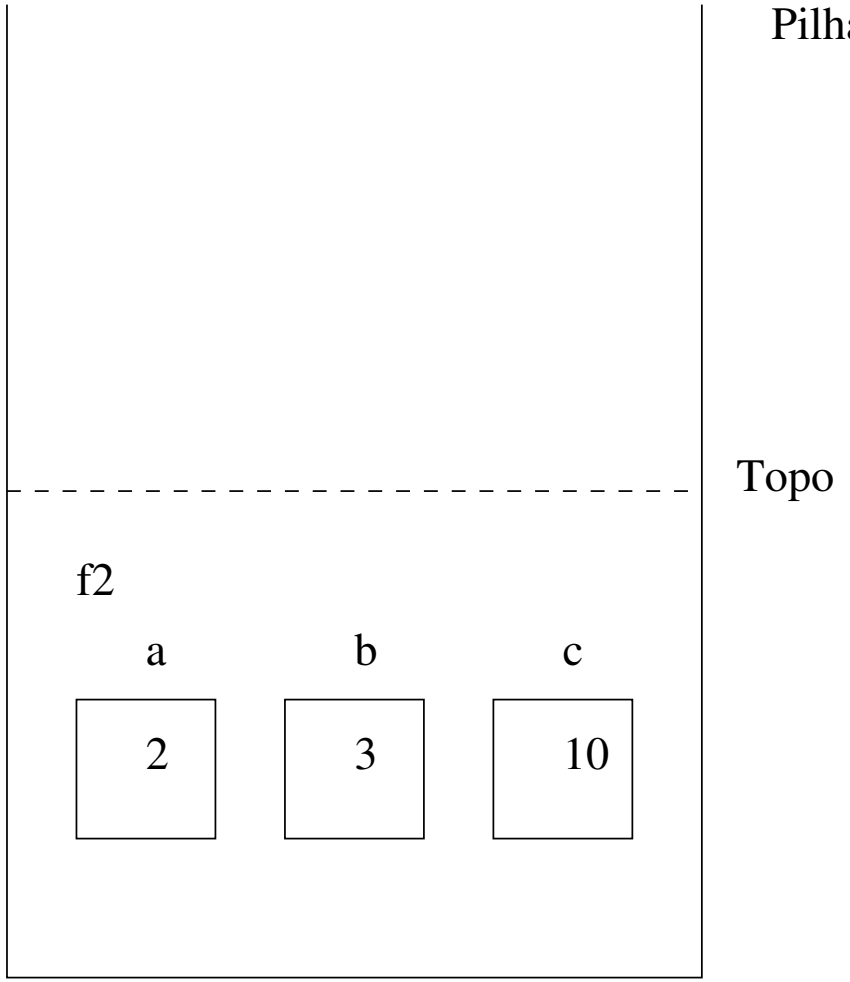
O que acontece na memória

A função **f2** invoca a função **f1(b,a)** e as variáveis locais desta são alocadas no topo da pilha sobre as de **f2**.



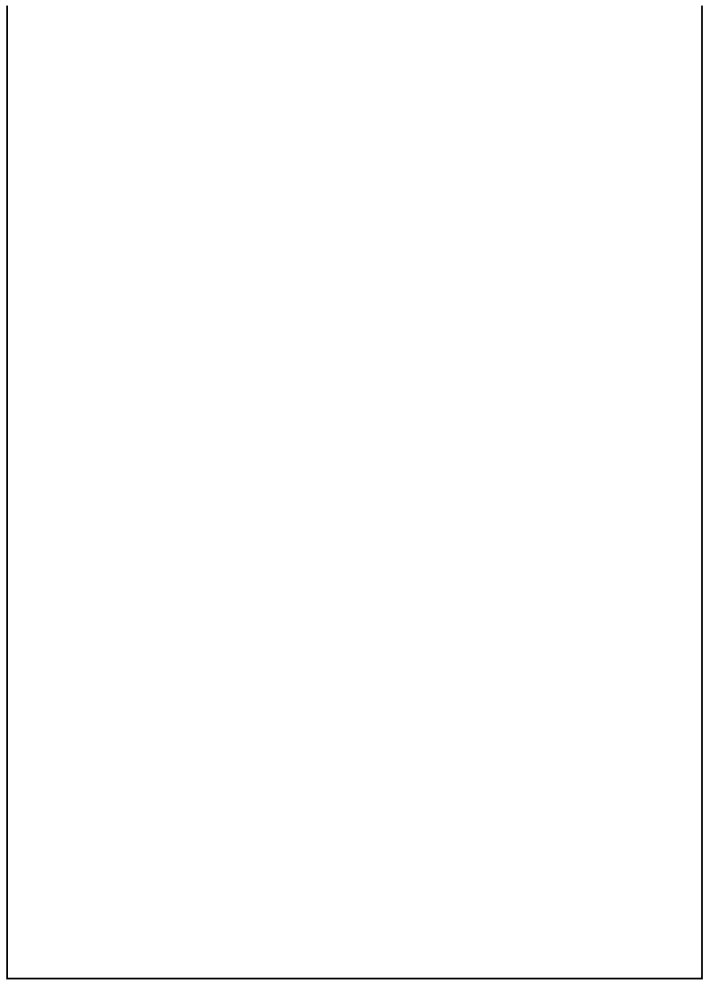
O que acontece na memória

A função **f1** termina, devolvendo 10. As variáveis locais de **f1** são removidas da pilha.



O que acontece na memória

Finalmente **f2** termina a sua execução devolvendo 10. Suas variáveis locais são removidas da pilha.



O que acontece na memória

No caso de chamadas recursivas para uma mesma função, é como se cada chamada correspondesse a uma função distinta.

- As execuções das chamadas de funções recursivas são feitas na pilha, assim como qualquer função.
- O último conjunto de variáveis alocadas na pilha, que está no topo, corresponde às variáveis da última chamada da função.
- Quando termina a execução de uma chamada da função, as variáveis locais desta são removidas da pilha.

Usando recursão em programação

Considere novamente a solução recursiva para se calcular o fatorial e assuma que seja feito a chamada **fatr(4)**.

```
def fatr(n):
        if n == 1:
                return 1
        else:
                x = n-1
                r = fatr(x)
                return n*r
```

O que acontece na memória

- Cada chamada da função *fatr* cria novas variáveis locais de mesmo nome (n, x, r) .
- Portanto, várias variáveis n, x e r podem existir em um dado momento.
- Em um dado instante, o nome n (ou x ou r) refere-se à variável local ao corpo da função que está sendo executada naquele instante.

O que acontece na memória

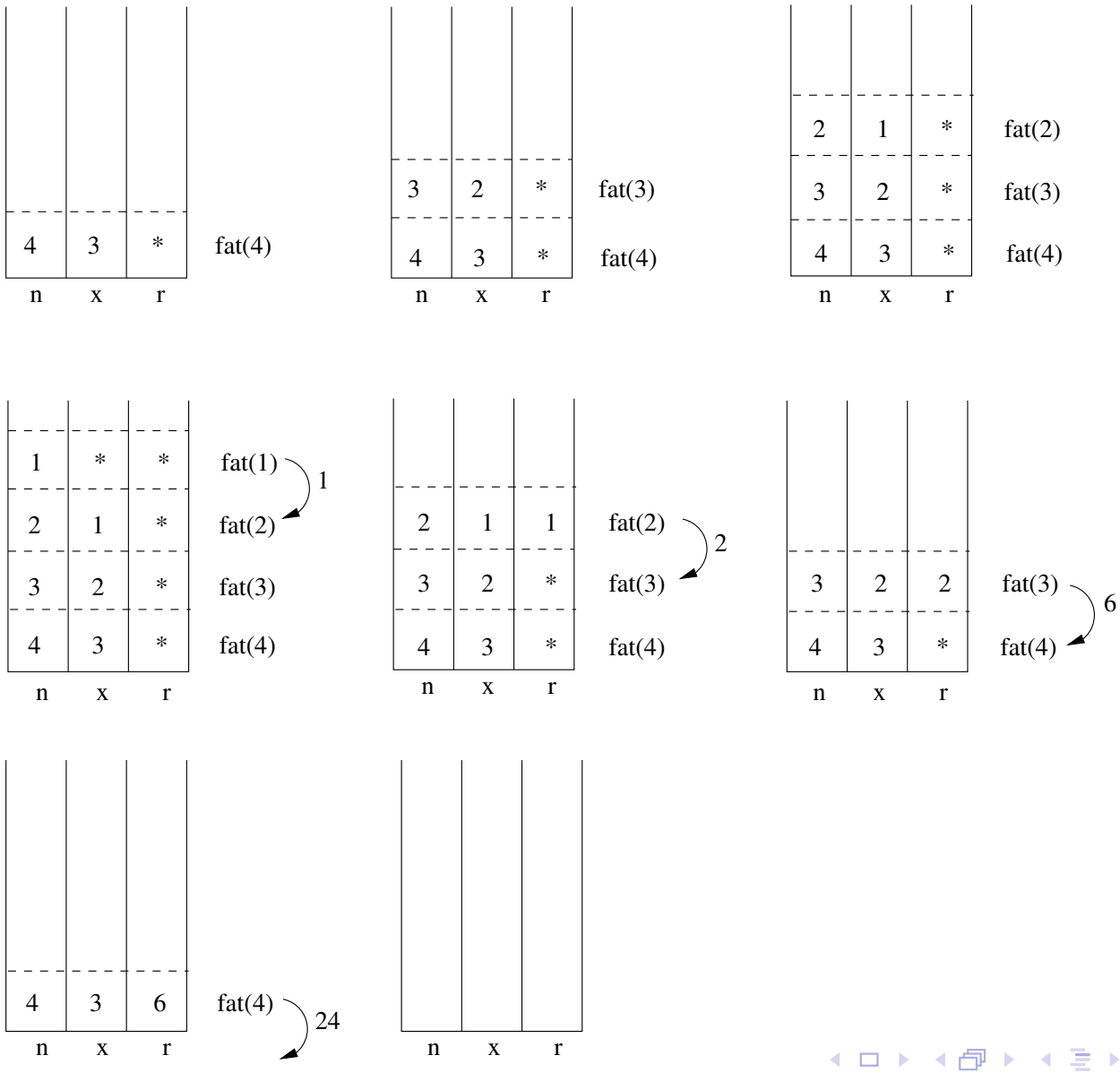
- Cada chamada da função *fatr* cria novas variáveis locais de mesmo nome (n, x, r) .
- Portanto, várias variáveis n, x e r podem existir em um dado momento.
- Em um dado instante, o nome n (ou x ou r) refere-se à variável local ao corpo da função que está sendo executada naquele instante.

O que acontece na memória

- Cada chamada da função *fatr* cria novas variáveis locais de mesmo nome (n, x, r) .
- Portanto, várias variáveis n, x e r podem existir em um dado momento.
- Em um dado instante, o nome n (ou x ou r) refere-se à variável local ao corpo da função que está sendo executada naquele instante.

O que acontece na memória

Estado da Pilha de execução para *fatr(4)*.



O que acontece na memória

- É claro que as variáveis x e r são desnecessárias.
- Você também deveria testar se n não é negativo!

```
def fatr2(n):
        if n <= 1: #Passo Básico
                return 1
        else:#Sabendo o fatorial de (n-1)
                #calculamos o fatorial de n
                return (n* fatr(n-1));
```

Recursão × Iteração

- Soluções recursivas são geralmente mais concisas que as iterativas.
- Soluções iterativas em geral têm a memória limitada enquanto as recursivas, não.
- Cópia dos parâmetros a cada chamada recursiva é um custo adicional para as soluções recursivas.

Recursão × Iteração

Neste caso, uma solução iterativa é mais eficiente. Por quê?

```
def fat(n):
        r = 1
        for i in range(1, n+1):
                r = r * i
        return r
```

Exemplo: Soma de elementos de um vetor

- Dado uma lista v de inteiros e um inteiro $n \leq$ **len(v)-1**, devemos calcular a soma dos seus elementos da posição 0 até n.
- Como podemos descrever este problema de forma recursiva? Isto é, como podemos descrever este problema em função de si mesmo?
- Vamos denotar por $S(n)$ a soma dos elementos das posições 0 até n da lista.
- O valor de $S(n)$ pode ser calculado com a seguinte definição recursiva:
  - Se $n = 0$ então a soma $S(0)$ é igual a $v[0]$.
  - Se $n > 0$ então a soma $S(n)$ é igual a $v[n] + S(n-1)$.

Exemplo: Soma de elementos de um vetor

- Dado uma lista v de inteiros e um inteiro $n \leq$ **len(v)-1**, devemos calcular a soma dos seus elementos da posição 0 até n.
- Como podemos descrever este problema de forma recursiva? Isto é, como podemos descrever este problema em função de si mesmo?
- Vamos denotar por $S(n)$ a soma dos elementos das posições 0 até n da lista.
- O valor de $S(n)$ pode ser calculado com a seguinte definição recursiva:
  - Se $n = 0$ então a soma $S(0)$ é igual a $v[0]$.
  - Se $n > 0$ então a soma $S(n)$ é igual a $v[n] + S(n-1)$.

Exemplo: Soma de elementos de um vetor

- Dado uma lista v de inteiros e um inteiro $n \leq$ **len(v)-1**, devemos calcular a soma dos seus elementos da posição 0 até n.
- Como podemos descrever este problema de forma recursiva? Isto é, como podemos descrever este problema em função de si mesmo?
- Vamos denotar por $S(n)$ a soma dos elementos das posições 0 até n da lista.
- O valor de $S(n)$ pode ser calculado com a seguinte definição recursiva:
  - Se $n = 0$ então a soma $S(0)$ é igual a $v[0]$.
  - Se $n > 0$ então a soma $S(n)$ é igual a $v[n] + S(n-1)$.

Algoritmo em Python

```
def soma(v, n):
        assert n <= len(v)-1
        if n == 0:
                return v[0]
        else:
                return v[n] + soma(v, n-1)
```

Algoritmo em Python

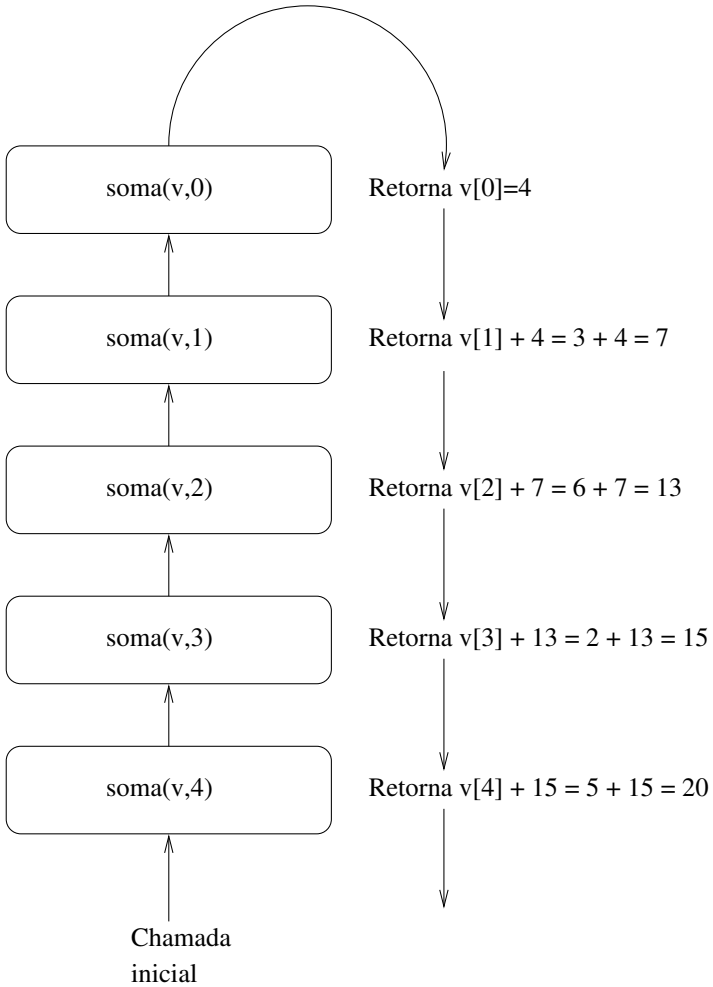
Exemplo de uso:

```
def soma(v, n):
        assert n <= len(v)-1
        if n == 0:
                return v[0]
        else:
                return v[n] + soma(v, n-1)

def main():
        l = [1, 2, 2, 10, 4]
        r = soma(l, len(l)-1)
        print(r)

main()
```

- Para somar todos os elementos da lista usamos como segundo parâmetro o índice da última posição da lista.

Exemplo de execução

$V = (4, 3, 6, 2, 5)$



Soma do vetor recursivo

- Garantir que o método recursivo sempre termina:
  - Existência de um caso base.
  - A cada chamada recursiva do método temos um valor menor de n que eventualmente chega ao caso base.

Algoritmo em Python

Neste caso, a solução iterativa também seria melhor (não há criação de variáveis das chamadas recursivas):

```
def soma2(v, n):
        assert n <= len(v) -1
        r = 0
        for i in range(n+1):
                r += v[i]
        return r
```

Recursão com várias chamadas

- Não há necessidade da função recursiva ter apenas uma chamada para si própria.
- A função pode fazer várias chamadas para si própria.
- A função pode ainda fazer chamadas recursivas indiretas. Neste caso a função 1, por exemplo, chama uma outra função 2 que por sua vez chama a função 1.

Fibonacci

- A série de fibonacci é a seguinte:
  - $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$.
- Queremos determinar qual é o n-ésimo número da série que denotaremos por fibo(n).
- Como descrever o n-ésimo número de fibonacci de forma recursiva?

Fibonacci

- No caso base temos:
  - Se $n = 1$ ou $n = 2$ então fibo$(n) = 1$.
- Sabendo casos anteriores podemos computar fibo(n) como:
  - fibo$(n) =$ fibo$(n-1) +$ fibo$(n-2)$.

Algoritmo em C

A definição anterior é traduzida diretamente em um algoritmo em Python:

```
def fib(n):
        if n <= 2:
                return 1
        else:
                return fib(n-1) + fib(n-2)
```

Como seria a execução para a chamada de **fib(4)**?

Relembrando

- Recursão é uma técnica para se criar algoritmos onde:
  1. Devemos descrever soluções para casos básicos.
  2. Assumindo a existência de soluções para casos menores, mostramos como obter a solução para o caso maior.
- Algoritmos recursivos geralmente são mais claros e concisos.
- Implementador deve avaliar clareza de código $\times$ eficiência do algoritmo.

Exercício

- Demonstre por indução que a soma $S(n)$ dos primeiros n números naturais é $n(n+1)/2$.

Exercício

- Demonstre por indução que $2^{2n} - 1$ é múltiplo de 3 para $n \geq 0$.

Exercício

Mostre a execução da função recursiva **imprime** abaixo:
O que será impresso?

```
def main():
    vet = [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]

    imprime(vet, 0, 9)
    print()

def imprime(v, i, n):
    if i==n:
        print(v[i], end=', ')
    else:
        imprime(v,i+1,n)
        print(v[i], end=', ')

main()
```

Exercício

- Mostre o estado da pilha de memória durante a execução da função **fibo** com a chamada **fib(5)**.
- Qual versão é mais eficiente para se calcular o *n*-ésimo número de fibonacci? A recursiva ou iterativa?