MC102 – Aula28
Recursão III - QuickSort

Prof. Luiz F. Bittencourt

Turmas QR

Instituto de Computação – Unicamp

2019

Conteúdo adaptado de slides fornecidos pelo Prof. Eduardo Xavier.

Introdução

Vamos usar a técnica de recursão para resolver o problema de ordenação.

- Problema:
  - Temos uma lista v de inteiros de tamanho n.
  - Devemos deixar v ordenada em ordem crescente de valores.
- Veremos um algoritmo baseado na técnica **dividir-e-conquistar** que usa recursão.

Introdução

Vamos usar a técnica de recursão para resolver o problema de ordenação.

- Problema:
  - Temos uma lista v de inteiros de tamanho n.
  - Devemos deixar v ordenada em ordem crescente de valores.
- Veremos um algoritmo baseado na técnica **dividir-e-conquistar** que usa recursão.

Dividir e Conquistar

- Temos que resolver um problema P de tamanho n.
- **Dividir:** Quebramos P em sub-problemas menores.
- Resolvemos os sub-problemas de forma recursiva.
- **Conquistar:** Unimos as soluções dos sub-problemas para obter solução do problema maior P.

Dividir e Conquistar

- Temos que resolver um problema P de tamanho n.
- **Dividir:** Quebramos P em sub-problemas menores.
- Resolvemos os sub-problemas de forma recursiva.
- **Conquistar:** Unimos as soluções dos sub-problemas para obter solução do problema maior P.

Dividir e Conquistar

- Temos que resolver um problema P de tamanho n.
- **Dividir:** Quebramos P em sub-problemas menores.
- Resolvemos os sub-problemas de forma recursiva.
- **Conquistar:** Unimos as soluções dos sub-problemas para obter solução do problema maior P.

Dividir e Conquistar

- Temos que resolver um problema P de tamanho n.
- **Dividir:** Quebramos P em sub-problemas menores.
- Resolvemos os sub-problemas de forma recursiva.
- **Conquistar:** Unimos as soluções dos sub-problemas para obter solução do problema maior P.

Quick-Sort

- Vamos supor que devemos ordenar uma lista de uma posição *ini* até *fim*.
- **Dividir:**
  - Escolha em elemento especial da lista chamado *pivô*.
  - Particione a lista em uma posição *pos* tal que todos elementos de *ini* até $pos - 1$ são menores ou iguais do que o *pivô*, e todos elementos de *pos* até *fim* são maiores ou iguais ao *pivô*.
- Resolvemos o problema de ordenação de forma recursiva para estas duas sub-listas (uma de *ini* até $pos - 1$ e a outra de *pos* até *fim*).
- **Conquistar:** Nada a fazer já que a lista estará ordenada pelo processo que foi feita a fase de divisão.

Quick-Sort

- Vamos supor que devemos ordenar uma lista de uma posição *ini* até *fim*.
- **Dividir:**
  - Escolha em elemento especial da lista chamado *pivô*.
  - Particione a lista em uma posição *pos* tal que todos elementos de *ini* até $pos - 1$ são menores ou iguais do que o *pivô*, e todos elementos de *pos* até *fim* são maiores ou iguais ao *pivô*.
- Resolvemos o problema de ordenação de forma recursiva para estas duas sub-listas (uma de *ini* até $pos - 1$ e a outra de *pos* até *fim*).
- **Conquistar:** Nada a fazer já que a lista estará ordenada pelo processo que foi feita a fase de divisão.

Quick-Sort

- Vamos supor que devemos ordenar uma lista de uma posição *ini* até *fim*.
- **Dividir:**
  - Escolha em elemento especial da lista chamado *pivô*.
  - Particione a lista em uma posição *pos* tal que todos elementos de *ini* até $pos - 1$ são menores ou iguais do que o *pivô*, e todos elementos de *pos* até *fim* são maiores ou iguais ao *pivô*.
- Resolvemos o problema de ordenação de forma recursiva para estas duas sub-listas (uma de *ini* até $pos - 1$ e a outra de *pos* até *fim*).
- **Conquistar:** Nada a fazer já que a lista estará ordenada pelo processo que foi feita a fase de divisão.

Quick-Sort

- Vamos supor que devemos ordenar uma lista de uma posição *ini* até *fim*.
- **Dividir:**
  - Escolha em elemento especial da lista chamado *pivô*.
  - Particione a lista em uma posição *pos* tal que todos elementos de *ini* até $pos - 1$ são menores ou iguais do que o *pivô*, e todos elementos de *pos* até *fim* são maiores ou iguais ao *pivô*.
- Resolvemos o problema de ordenação de forma recursiva para estas duas sub-listas (uma de *ini* até $pos - 1$ e a outra de *pos* até *fim*).
- **Conquistar:** Nada a fazer já que a lista estará ordenada pelo processo que foi feita a fase de divisão.

Quick-Sort

- Vamos supor que devemos ordenar uma lista de uma posição *ini* até *fim*.
- **Dividir:**
  - Escolha em elemento especial da lista chamado *pivô*.
  - Particione a lista em uma posição *pos* tal que todos elementos de *ini* até $pos - 1$ são menores ou iguais do que o *pivô*, e todos elementos de *pos* até *fim* são maiores ou iguais ao *pivô*.
- Resolvemos o problema de ordenação de forma recursiva para estas duas sub-listas (uma de *ini* até $pos - 1$ e a outra de *pos* até *fim*).
- **Conquistar:** Nada a fazer já que a lista estará ordenada pelo processo que foi feita a fase de divisão.

Quick-Sort: Particionamento

Dado um valor *p* como pivô, como fazer o particionamento?

- Podemos "varrer" a lista do início para o fim até encontrarmos um elemento maior que o pivô.
- "Varremos" o vetor do fim para o início até encontrarmos um elemento menor ou igual ao pivô.
- Trocamos então estes elementos de posição e continuamos com o processo até termos verificado todas as posições do vetor.

Quick-Sort: Particionamento

Dado um valor p como pivô, como fazer o particionamento?

- Podemos “varrer”a lista do início para o fim até encontrarmos um elemento maior que o pivô.
- “Varremos”o vetor do fim para o início até encontrarmos um elemento menor ou igual ao pivô.
- Trocamos então estes elementos de posição e continuamos com o processo até termos verificado todas as posições do vetor.

Quick-Sort: Particionamento

Dado um valor p como pivô, como fazer o particionamento?

- Podemos "varrer" a lista do início para o fim até encontrarmos um elemento maior que o pivô.
- "Varremos" o vetor do fim para o início até encontrarmos um elemento menor ou igual ao pivô.
- Trocamos então estes elementos de posição e continuamos com o processo até termos verificado todas as posições do vetor.

Quick-Sort: Particionamento

Dado um valor *p* como pivô, como fazer o particionamento?

- Podemos "varrer" a lista do início para o fim até encontrarmos um elemento maior que o pivô.
- "Varremos" o vetor do fim para o início até encontrarmos um elemento menor ou igual ao pivô.
- Trocamos então estes elementos de posição e continuamos com o processo até termos verificado todas as posições do vetor.

Quick-Sort: Particionamento

A função retorna a posição de partição. Ela considera sempre o último elemento como o pivô.

```
def particiona(v, ini, fim):
    pivo = v[fim]
    while(ini<fim): #O laço para quando ini==fim => checamos o vetor inteiro

        while (ini < fim) and (v[ini] <= pivo) : #acha pos. de elem. maior que pivo
            ini = ini + 1

        while (ini < fim) and (v[fim] > pivo) : #acha pos. de elem. menor ou igual que pivo
            fim = fim -1

        v[ini], v[fim] = v[fim], v[ini]  #troca elementos de posição
    return ini
```

Quick-Sort: Particionamento

Exemplo: (1,9,3,7,6,2,3,8,5) e pivô=5.

- (1,9,3,7,6,2,3,8,5) $\rightarrow$ (1,5,3,7,6,2,3,8,9)
- (1,5,3,7,6,2,3,8,9) $\rightarrow$ (1,5,3,3,6,2,7,8,9)
- (1,5,3,3,6,2,7,8,9) $\rightarrow$ (1,5,3,3,2,6,7,8,9)
- (1,5,3,3,2,6,7,8,9) $\rightarrow$ Retorna posição 5.

Quick-Sort: Particionamento

Exemplo: (1,9,3,7,6,2,3,8,5) e pivô=5.

- (1,9,3,7,6,2,3,8,5) $\rightarrow$ (1,5,3,7,6,2,3,8,9)
- (1,5,3,7,6,2,3,8,9) $\rightarrow$ (1,5,3,3,6,2,7,8,9)
- (1,5,3,3,6,2,7,8,9) $\rightarrow$ (1,5,3,3,2,6,7,8,9)
- (1,5,3,3,2,6,7,8,9) $\rightarrow$ Retorna posição 5.

Quick-Sort: Particionamento

Exemplo: (1,9,3,7,6,2,3,8,5) e pivô=5.

- (1,9,3,7,6,2,3,8,5) $\rightarrow$ (1,5,3,7,6,2,3,8,9)
- (1,5,3,7,6,2,3,8,9) $\rightarrow$ (1,5,3,3,6,2,7,8,9)
- (1,5,3,3,6,2,7,8,9) $\rightarrow$ (1,5,3,3,2,6,7,8,9)
- (1,5,3,3,2,6,7,8,9) $\rightarrow$ Retorna posição 5.

Quick-Sort: Particionamento

Exemplo: (1,9,3,7,6,2,3,8,5) e pivô=5.

- (1,9,3,7,6,2,3,8,5) $\rightarrow$ (1,5,3,7,6,2,3,8,9)
- (1,5,3,7,6,2,3,8,9) $\rightarrow$ (1,5,3,3,6,2,7,8,9)
- (1,5,3,3,6,2,7,8,9) $\rightarrow$ (1,5,3,3,2,6,7,8,9)
- (1,5,3,3,2,6,7,8,9) $\rightarrow$ Retorna posição 5.

Quick-Sort: Particionamento

Exemplo: (1,9,3,7,6,2,3,8,5) e pivô=5.

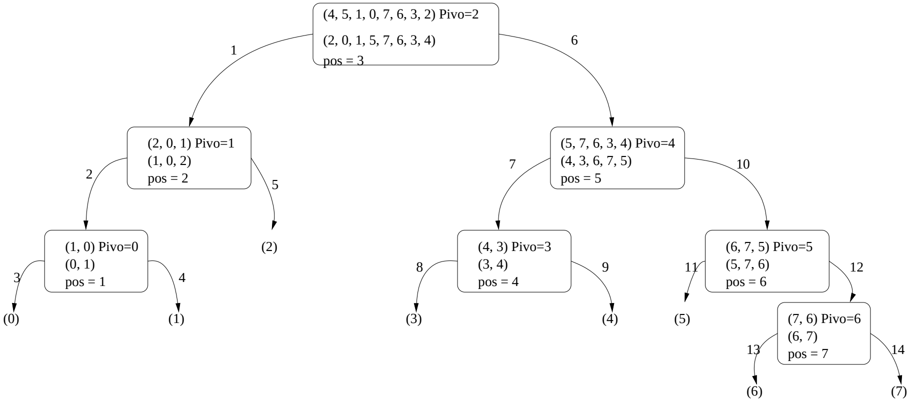
- (1,9,3,7,6,2,3,8,5) $\rightarrow$ (1,5,3,7,6,2,3,8,9)
- (1,5,3,7,6,2,3,8,9) $\rightarrow$ (1,5,3,3,6,2,7,8,9)
- (1,5,3,3,6,2,7,8,9) $\rightarrow$ (1,5,3,3,2,6,7,8,9)
- (1,5,3,3,2,6,7,8,9) $\rightarrow$ Retorna posição 5.

Quick-Sort

```
def quickSort(v, ini, fim):
    if(ini < fim): #tem pelo menos 2 elementos a serem ordenados
        pos = particiona(v, ini, fim)
        quickSort(v,ini, pos-1)
        quickSort(v,pos, fim)
```

Quick-Sort

Abaixo temos um exemplo da árvore de recursão com ordem das chamadas recursivas.



Quick-Sort

- Se o Quick-Sort particionar o vetor de tal forma que cada partição tenha mais ou menos o mesmo tamanho ele é muito eficiente.
- Porém se a partição for muito desigual ($n - 1$ de um lado e 1 de outro) ele é ineficiente.
- Quando um vetor já está ordenado ou quase-ordenado, ocorre este caso ruim. Por que?

Quick-Sort

- Se o Quick-Sort particionar o vetor de tal forma que cada partição tenha mais ou menos o mesmo tamanho ele é muito eficiente.
- Porém se a partição for muito desigual ($n - 1$ de um lado e 1 de outro) ele é ineficiente.
- Quando um vetor já está ordenado ou quase-ordenado, ocorre este caso ruim. Por que?

Quick-Sort

- Se o Quick-Sort particionar o vetor de tal forma que cada partição tenha mais ou menos o mesmo tamanho ele é muito eficiente.
- Porém se a partição for muito desigual ($n - 1$ de um lado e 1 de outro) ele é ineficiente.
- Quando um vetor já está ordenado ou quase-ordenado, ocorre este caso ruim. Por que?

Quick-Sort: Tratando o pior caso

- Podemos implementar o Quick-Sort de tal forma a diminuirmos a chance de ocorrência do pior caso.
- Ao invés de escolhermos o pivô como um elemento de uma posição fixa, podemos escolher como pivô o elemento de uma posição aleatória.
- Podemos usar a função **random.randint(a,b)** da biblioteca **random** que retorna um número de forma aleatória entre **a** e **b**.

Quick-Sort: Tratando o pior caso

- Podemos implementar o Quick-Sort de tal forma a diminuirmos a chance de ocorrência do pior caso.
- Ao invés de escolhermos o pivô como um elemento de uma posição fixa, podemos escolher como pivô o elemento de uma posição aleatória.
- Podemos usar a função **random.randint(a,b)** da biblioteca **random** que retorna um número de forma aleatória entre **a** e **b**.

Quick-Sort: Tratando o pior caso

- Podemos implementar o Quick-Sort de tal forma a diminuirmos a chance de ocorrência do pior caso.
- Ao invés de escolhermos o pivô como um elemento de uma posição fixa, podemos escolher como pivô o elemento de uma posição aleatória.
- Podemos usar a função **random.randint(a,b)** da biblioteca **random** que retorna um número de forma aleatória entre **a** e **b**.

Random-Quick-Sort

- A única diferença é que escolhemos um elemento aleatório.
- Tal elemento é trocado com o que está no fim (será o pivô).

```
import random
def randomQuickSort(v, ini, fim):
    if(ini <fim):
        j = random.randint(ini, fim)
        v[j], v[fim] = v[fim], v[j]
        pos = particiona(v, ini, fim)
        randomQuickSort(v, ini, pos-1)
        randomQuickSort(v, pos, fim)
```

Random-Quick-Sort

- A única diferença é que escolhemos um elemento aleatório.
- Tal elemento é trocado com o que está no fim (será o pivô).

```
import random
def randomQuickSort(v, ini, fim):
    if(ini <fim):
        j = random.randint(ini, fim)
        v[j], v[fim] = v[fim], v[j]
        pos = particiona(v, ini, fim)
        randomQuickSort(v, ini, pos-1)
        randomQuickSort(v, pos, fim)
```

Random-Quick-Sort

- A chance de ocorrer um caso ruim para o Random-Quick-Sort é desprezível.

Exercícios

1. Aplique o algoritmo de particionamento sobre o vetor $(13, 19, 9, 5, 12, 21, 7, 4, 11, 2, 6, 6)$ com pivô igual a 6.
2. Qual o valor retornado pelo algoritmo de particionamento se todos os elementos do vetor tiverem valores iguais?
3. Faça uma execução passo-a-passo do Quick-Sort com o vetor $(4, 3, 6, 7, 9, 10, 5, 8)$.
4. Modifique o algoritmo QuickSort para ordenar vetores em ordem decrescente.