Duas famílias de caterpillars 0-rotativos

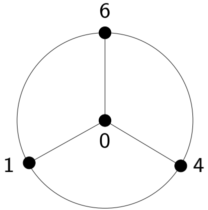
Atílio G. Luiz C. N. Campos R. Bruce Richter

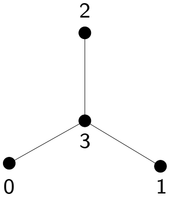
Universidade Estadual de Campinas, Brasil
Universidade de Waterloo, Canadá

XI Workshop de Teses, Dissertações e Trabalhos de Iniciação Científica
4 de Agosto de 2016

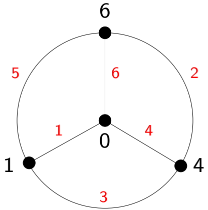
Introdução

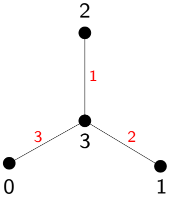
- Seja $G = (V(G), E(G))$ um grafo com m arestas.
- Uma rotulação de G é uma função injetora $f\colon V(G) \to \{0, \ldots, m\}$.





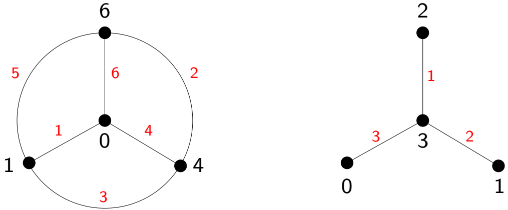
- Seja $G = (V(G), E(G))$ um grafo com m arestas.
- Uma rotulação de G é uma função injetora $f\colon V(G) \to \{0, \ldots, m\}$.
- para cada $uv \in E(G)$, o rótulo induzido de uv é $|f(u) - f(v)|$.





Introdução

- Seja $G = (V(G), E(G))$ um grafo com m arestas.
- Uma rotulação de G é uma função injetora $f\colon V(G) \to \{0, \ldots, m\}$.
- para cada $uv \in E(G)$, o rótulo induzido de uv é $|f(u) - f(v)|$.



- f é graciosa $\Rightarrow$ G é gracioso.

Rotulação graciosa

- A rotulação graciosa foi introduzida por Rosa e Kotzig em 1967.

Alexander Rosa

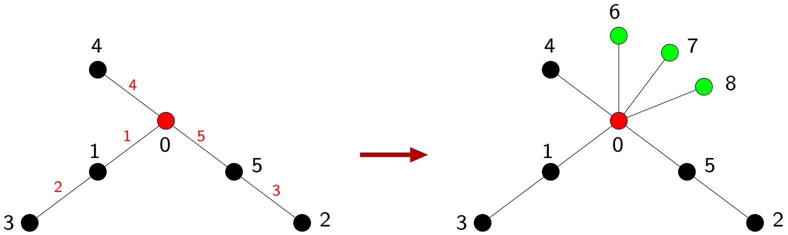
Anton Kotzig

Conjetura das Árvores Graciosas [Rosa e Kotzig 1967]

Todas as árvores são graciosas.

A importância do rótulo 0

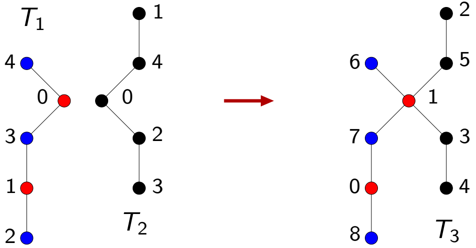
Dada uma rotulação graciosa de uma árvore T, é possível construir uma nova árvore graciosa adicionando k novas folhas ao vértice com rótulo 0.



A importância do rótulo 0

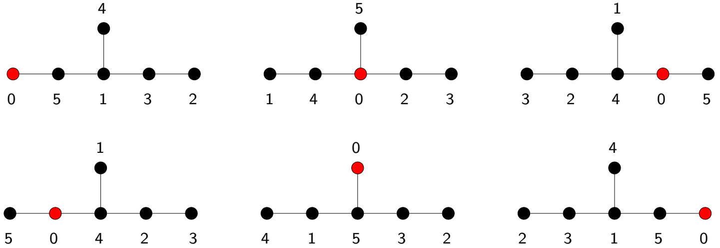
Teorema [Huang et al. 1982]

- α-**rotulação** f_1 de T_1 tal que $f_1(v) = 0$ para $v \in V(T_1)$.
- **rotulação graciosa** f_2 de T_2 tal que $f_2(w) = 0$ para $w \in V(T_2)$.
- A árvore obtida a partir da identificação de v com w é graciosa. $\square$



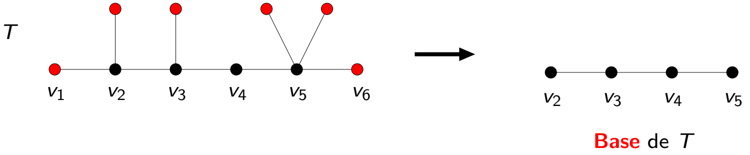
Definição

Uma árvore T é **0-rotativa** se, para todo $v \in V(T)$, existe uma rotulação graciosa f de T tal que $f(v) = 0$.



Definição

Uma árvore T é um **caterpillar** se T é isomorfo ao K_1 ou ao K_2 ou se o subgrafo obtido a partir da remoção de todas as folhas de T é um caminho.

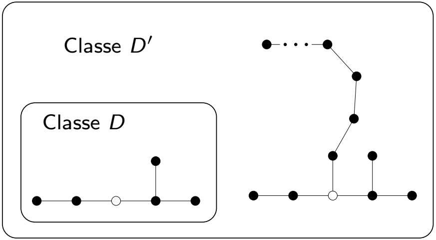


0-rotatividade de caterpillars

- Todos os caminhos são 0-rotativos. [Rosa 1967]
- Se T é um caterpillar tal que todos os vértices de sua base têm o mesmo grau, então T é 0-rotativo. [Chung e Huang 1981]
- Todos os caterpillars com diâmetro no máximo três são 0-rotativos. [Bussel 2004]

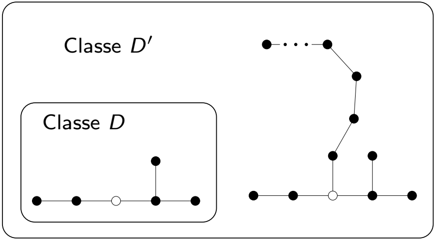
0-rotatividade de caterpillars

- Todos os caminhos são 0-rotativos. [Rosa 1967]
- Se T é um caterpillar tal que todos os vértices de sua base têm o mesmo grau, então T é 0-rotativo. [Chung e Huang 1981]
- Todos os caterpillars com diâmetro no máximo três são 0-rotativos. [Bussel 2004]
- Nem todos os caterpillars com diâmetro quatro são 0-rotativos. [Bussel 2004]



0-rotatividade de caterpillars

- Todos os caminhos são 0-rotativos. [Rosa 1967]
- Se T é um caterpillar tal que todos os vértices de sua base têm o mesmo grau, então T é 0-rotativo. [Chung e Huang 1981]
- Todos os caterpillars com diâmetro no máximo três são 0-rotativos. [Bussel 2004]
- Nem todos os caterpillars com diâmetro quatro são 0-rotativos. [Bussel 2004]



Conjetura

Todo caterpillar com diâmetro pelo menos cinco é 0-rotativo.

Teorema

As seguintes famílias de caterpillars são 0-rotativas:

(1) caterpillars com emparelhamento perfeito;

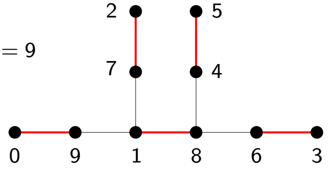
(2) caterpillars obtidos a partir da identificação de uma folha do $K_{1,s}$ com uma folha do P_n, tal que $n \geq 4$ e $s \geq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$. $\square$

Rotulação fortemente graciosa

Definição

- Seja T uma árvore com emparelhamento perfeito M.
- Uma rotulação f de T é fortemente graciosa se:
  - f é graciosa; e
  - para toda aresta $uv \in M$, $f(u) + f(v) = |E(T)|$.

$|E(T)| = 9$

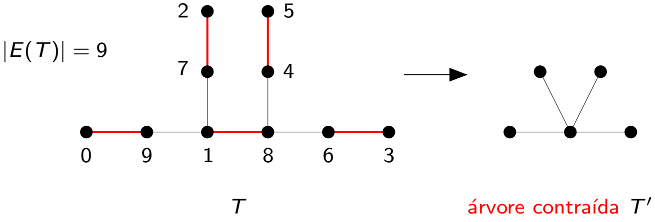


T

Rotulação fortemente graciosa

Definição

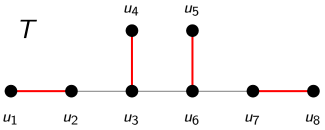
- Seja T uma árvore com emparelhamento perfeito M.
- Uma rotulação f de T é fortemente graciosa se:
  - f é graciosa; e
  - para toda aresta $uv \in M$, $f(u) + f(v) = |E(T)|$.

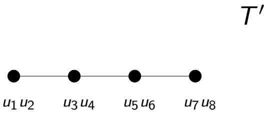


Teorema

Todo caterpillar com emparelhamento perfeito é 0-rotativo.

Demonstração:



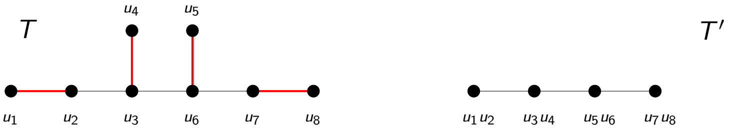


Caterpillars com emparelhamento perfeito

Teorema

Todo caterpillar com emparelhamento perfeito é 0-rotativo.

Demonstração:



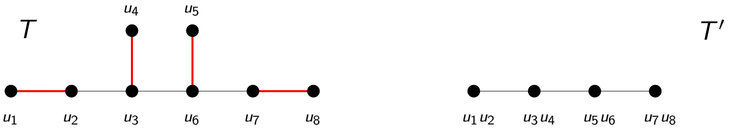
- T' é um caminho.

Caterpillars com emparelhamento perfeito

Teorema

Todo caterpillar com emparelhamento perfeito é 0-rotativo.

Demonstração:

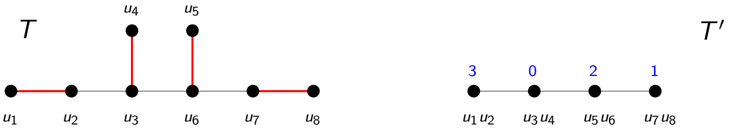


- T' é um caminho.
- [Rosa 1967]: Todo caminho é 0-rotativo.

Teorema

Todo caterpillar com emparelhamento perfeito é 0-rotativo.

Demonstração:



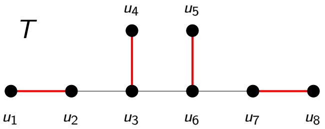
- T' é um caminho.
- [Rosa 1967]: Todo caminho é 0-rotativo.

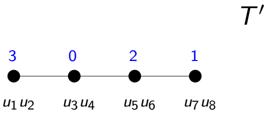
$\}$ T' é 0-rotativa.

Teorema

Todo caterpillar com emparelhamento perfeito é 0-rotativo.

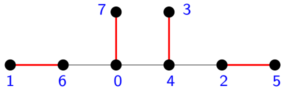
Demonstração:

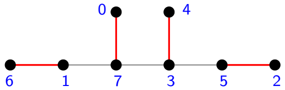




- T' é um caminho.
- [Rosa 1967]: Todo caminho é 0-rotativo.

$\left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\}$ T' é 0-rotativa.

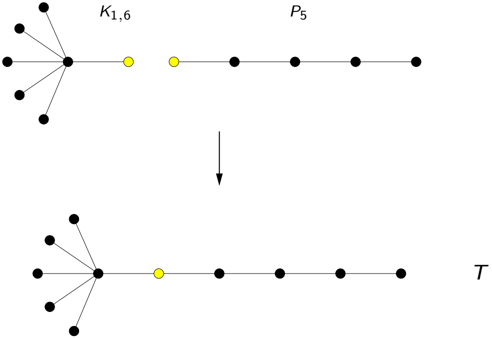




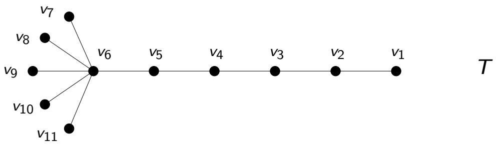
[Broersma e Hoede 1999]

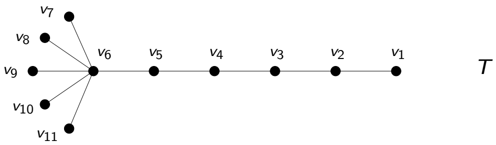
Teorema

Se T é o caterpillar obtido a partir da identificação de uma folha da estrela $K_{1,s-1}$ com uma folha do P_n, $n \geq 4$ e $s \geq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$, então T é 0-rotativo.

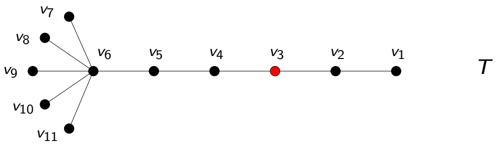


Identificação de caminho e estrela



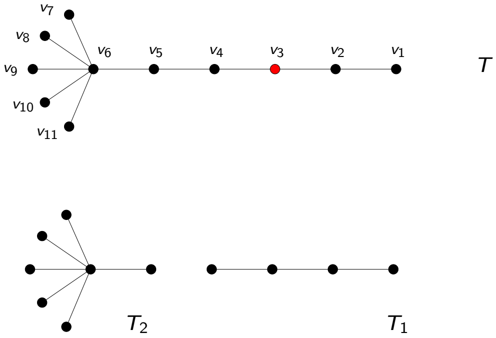


- [Rosa 1967]: vértices $v_1, v_2, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11} \Longrightarrow$ resolvido.

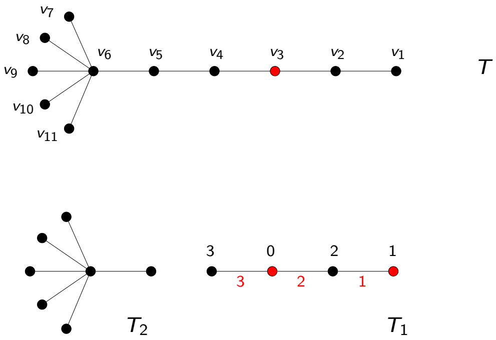


- [Rosa 1967]: vértices $v_1, v_2, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11} \Longrightarrow$ resolvido.
- Construímos f graciosa tal que $f(v_3) = 0$.

Identificação de caminho e estrela

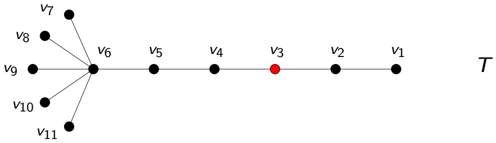


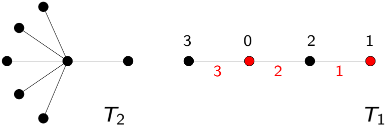
- [Rosa 1967]: vértices $v_1, v_2, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11} \Longrightarrow$ resolvido.
- Construímos f graciosa tal que $f(v_3) = 0$.
- Inicialmente, removemos a aresta $v_4 v_5$.



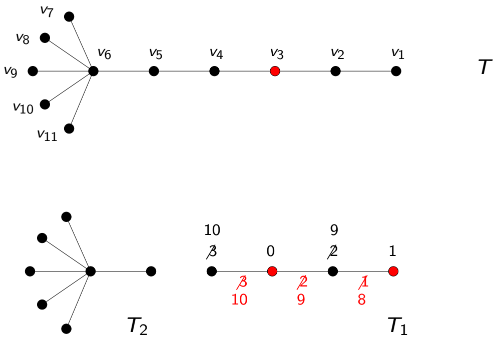
- [Rosa 1967]: como $T_1 \cong P_n$, então existe rotulação graciosa de T_1.

Identificação de caminho e estrela

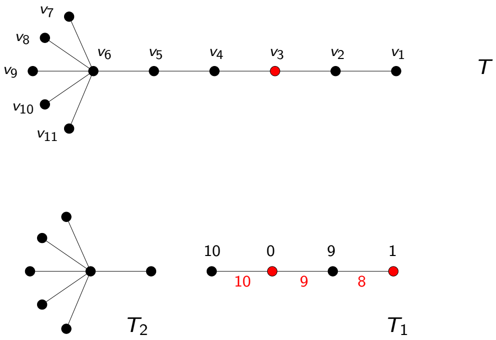




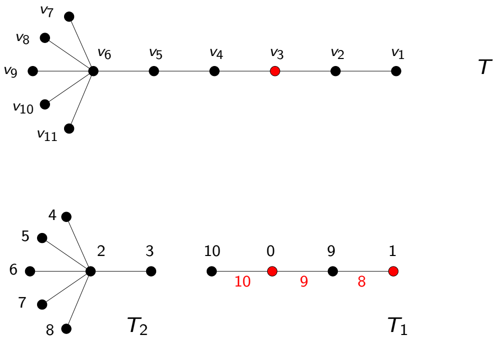
- Adicionamos $+7$ aos maiores rótulos de T_1.



- Adicionamos $+7$ aos maiores rótulos de T_1.

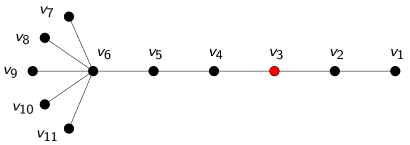


- Os rótulos $2, 3, \ldots, 8$ não são usados nos vértices de T_1.
- Os rótulos $1, 2, \ldots, 7$ não são induzidos nas arestas de T_1.

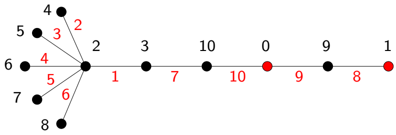


- Os rótulos $2, 3, \ldots, 8$ não são usados nos vértices de T_1.
- Os rótulos $1, 2, \ldots, 7$ não são induzidos nas arestas de T_1.
- Construimos uma rotulação para T_2 com esses rótulos.

Identificação de caminho e estrela



T



- Os rótulos $2, 3, \ldots, 8$ não são usados nos vértices de T_1.
- Os rótulos $1, 2, \ldots, 7$ não são induzidos nas arestas de T_1.
- Construimos uma rotulação para T_2 com esses rótulos.

Considerações finais

Conjetura

Todo caterpillar com diâmetro pelo menos cinco é 0-rotativo.

Apresentamos aqui duas das famílias para as quais verificamos a conjetura.

Obrigado!

Agradecimentos

FAPESP
Universidade Estadual de Campinas
Universidade de Waterloo

Referências

[Gallian 2015] J. A. Gallian.
A dynamic survey of graph labeling.
The Electronic Journal of Combinatorics, DS6, 1–389, 2015.

[Golomb 1972] S. W. Golomb.
How to number a graph.
In *Graph Theory and Computing*, 23–37. Academic Press, New York, 1972.

[Ringel 1964] G. Ringel.
Problem 25.
In *Theory of graphs and its applications, Proceedings of Symposium Smolenice*, volume 162, 1964.

[Rosa 1967] A. Rosa.
On certain valuations of the vertices of a graph.
Theory of Graphs (Internat. Sympos., Rome, 1966) Gordon and Breach, New York; Dunod, Paris, 349–355, 1967.

[Rosa 1977] A. Rosa.
Labeling snakes.
Ars Combinatoria, 3:67–73, 1977.

[Huang and Kotzig and Rosa 1982] C. Huang and A. Kotzig and A. Rosa.
Further results on tree labellings.
Utilitas Mathematica, 21(C):31–48, 1982.

[Broersma and Hoede 1999] Broersma, A. J. and Hoede, C. (1999).
Another equivalent of the graceful tree conjecture.
Ars Combinatoria, 51:183–192, 1999.

[Bussel 2004] Bussel, F. V. (2004).
0-Centred and 0-ubiquitously graceful trees.
Discrete Mathematics, 277:193–218, 2004.

[Chung and Hwang 1981] Chung, F. R. K. and Hwang, F. K. (1981).
Rotatable graceful graphs.
Ars Combinatoria, 11:239–250, 1981.

[Hrnčiar and Haviar 2001] Hrnčiar, P. and Haviar, A. (2001).
All trees of diameter five are graceful.
Discrete Mathematics, 233:133–150, 2001.

[Anick 2016] D. Anick.
Counting graceful labelings of trees: a theoretical and empirical study.
Discrete Applied Mathematics, 198:65–81, 2016.

[Cattell 2007] R. Cattell.
Graceful labellings of paths.
Discrete Mathematics, 307:3161–3176, 2007.

[Duke 1969] R. A. Duke.
Can the complete graph with $2n+1$ vertices be packed with copies of an arbitrary tree having n edges?
The American Mathematical Monthly, 76(10), November 1969.

[Mishra and Panigrahi 2007] D. Mishra and P. Panigrahi.
Some graceful lobsters with both odd and even degree vertices on the central path.
Utilitas Mathematica, 74:155–177, 2007.