

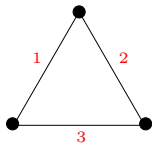
Conjetura 1,2,3 para potências de caminho e potências de ciclo

Atílio G. Luiz C. N. Campos

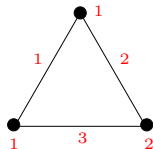
UNICAMP, São Paulo, Brasil

Segundo Encontro de Teoria da Computação
Congresso da Sociedade Brasileira de Computação 2017
São Paulo - SP - Brasil
4 de Julho de 2017

- ▶ Seja G um grafo e $S = E(G)$ ou $S = V(G) \cup E(G)$.
- ▶ Uma $[k]$ -rotulação de G é uma função $\pi: S \rightarrow \{1, \dots, k\}$, $k \in \mathbb{N}^*$.



rotulação de arestas

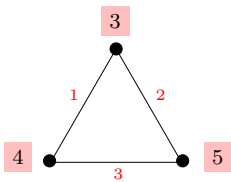


rotulação total

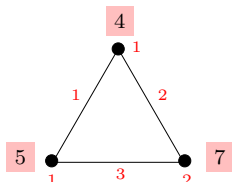
- ▶ Seja G um grafo e $S = E(G)$ ou $S = V(G) \cup E(G)$.
- ▶ Uma $[k]$ -rotulação de G é uma função $\pi: S \rightarrow \{1, \dots, k\}$, $k \in \mathbb{N}^*$.

$$c_{\pi}(v) = \sum_{uv \in E(G)} \pi(uv)$$

$$c_{\pi}(v) = \pi(v) + \sum_{uv \in E(G)} \pi(uv)$$



rotulação de arestas

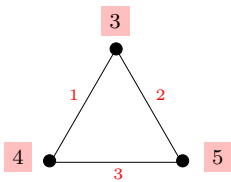


rotulação total

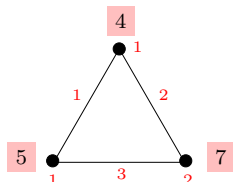
- ▶ Seja G um grafo e $S = E(G)$ ou $S = V(G) \cup E(G)$.
- ▶ Uma $[k]$ -rotulação de G é uma função $\pi: S \rightarrow \{1, \dots, k\}$, $k \in \mathbb{N}^*$.

$$c_\pi(v) = \sum_{uv \in E(G)} \pi(uv)$$

$$c_\pi(v) = \pi(v) + \sum_{uv \in E(G)} \pi(uv)$$



rotulação de arestas
semiforte



rotulação total
semiforte

- ▶ π é **semiforte** se $c_\pi(u) \neq c_\pi(v)$ para toda aresta $uv \in E(G)$.

Rotulação de arestas semiforte

- ▶ Introduzida por Karoński, Łuczak e Thomason em 2004.



Michał Karoński



Tomasz Łuczak



Andrew Thomason

Conjetura 1,2,3

Todo grafo simples sem componentes conexas isomorfas ao K_2 possui uma [3]-rotulação de arestas semiforte.

- ▶ Introduzida por Karoński, Łuczak e Thomason em 2004.



Michał Karoński



Tomasz Łuczak



Andrew Thomason

Conjetura 1,2,3

Todo grafo simples sem componentes conexas isomorfas ao K_2 possui uma [3]-rotulação de arestas semiforte.

- ▶ [Kalkowski et al. 2010] Todo grafo simples sem componentes conexas isomorfas ao K_2 possui uma [5]-rotulação de arestas semiforte.

- ▶ Introduzida por Przybyto e Woźniak em 2008.



Jakub Przybyto



Mariusz Woźniak

Conjetura 1,2

Todo grafo simples possui uma $[2]$ -rotulação total semiforte.

- ▶ Introduzida por Przybyło e Woźniak em 2008.



Jakub Przybyło



Mariusz Woźniak

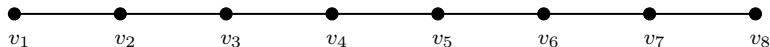
Conjetura 1,2

Todo grafo simples possui uma [2]-rotulação total semiforte.

- ▶ [Kalkowski 2010] Todo grafo simples possui uma [3]-rotulação total semiforte.

A *k*-ésima potência do caminho P_n é o grafo simples P_n^k tal que:

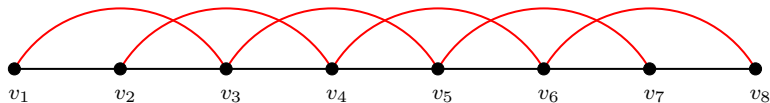
- $V(P_n^k) = V(P_n)$;
- $u, v \in V(P_n^k)$ são adjacentes $\iff d_{P_n}(u, v) \leq k$.



P_8

A k -ésima potência do caminho P_n é o grafo simples P_n^k tal que:

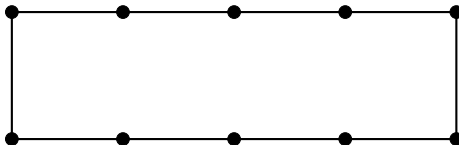
- $V(P_n^k) = V(P_n)$;
- $u, v \in V(P_n^k)$ são adjacentes $\iff d_{P_n}(u, v) \leq k$.



P_8^2

A *k*-ésima potência do ciclo C_n é o grafo simples C_n^k tal que:

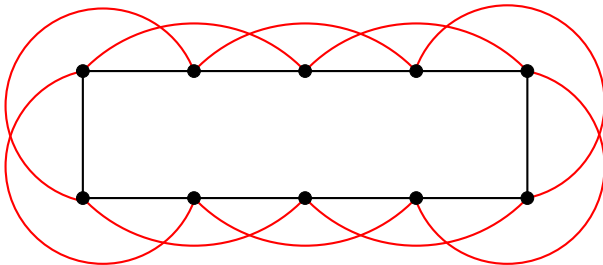
- $V(C_n^k) = V(C_n)$;
- $u, v \in V(C_n^k)$ são adjacentes $\iff d_{P_n}(u, v) \leq k$.



C_{10}

A k -ésima potência do ciclo C_n é o grafo simples C_n^k tal que:

- $V(C_n^k) = V(C_n)$;
- $u, v \in V(C_n^k)$ são adjacentes $\iff d_{P_n}(u, v) \leq k$.



C_{10}^2

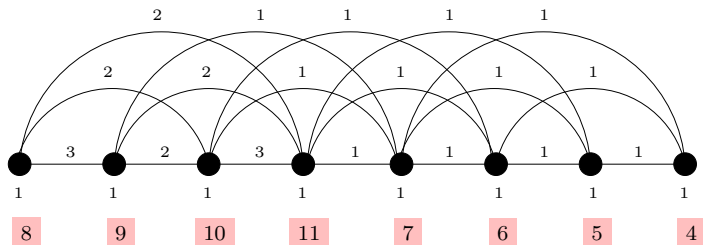
Teorema

Se G é uma potência de ciclo ou uma potência de caminho, então G possui uma $[3]$ -rotulação de arestas semiforte.

Proposição

Se numa rotulação total semiforte π de G , todos os vértices tiverem o mesmo rótulo, então a restrição de π às arestas de G é uma rotulação de arestas semiforte.

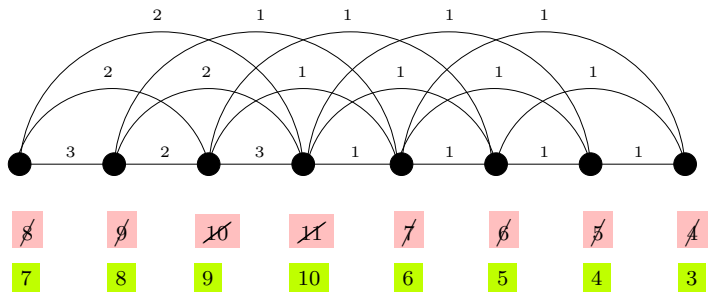
Exemplo: Potência de caminho P_8^3



Proposição

Se numa rotulação total semiforte π de G , todos os vértices tiverem o mesmo rótulo, então a restrição de π às arestas de G é uma rotulação de arestas semiforte.

Exemplo: Potência de caminho P_8^3

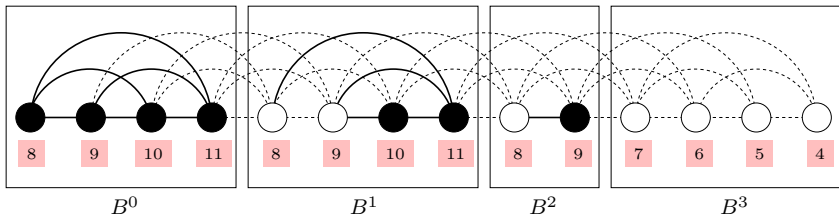


Ingredientes da demonstração

Teorema [trabalho conjunto com D. Sasaki e S. Dantas, 2015]

Se $G \cong P_n^k$ ou $G \cong C_n^k$, então G possui uma $[2]$ -rotulação total semiforte.

Exemplo: Potência de caminho P_{14}^3



Legenda:

Rótulo 1 ○ -----

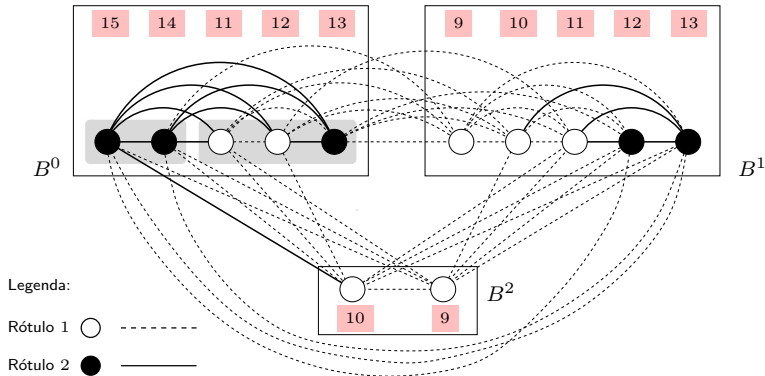
Rótulo 2 ● —————

Ingredientes da demonstração

Teorema [trabalho conjunto com D. Sasaki e S. Dantas, 2015]

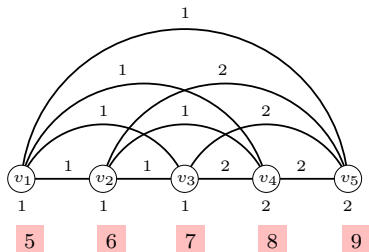
Se $G \cong P_n^k$ ou $G \cong C_n^k$, então G possui uma [2]-rotulação total semiforte.

Exemplo: Potência de ciclo C_{12}^4

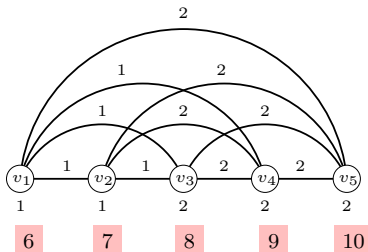


Rotulação canônica

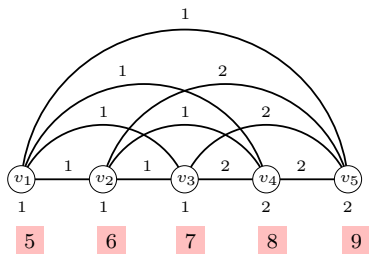
O grafo completo K_n , $n \geq 4$, tem duas $[2]$ -rotulações totais semiforte que atribuem o rótulo 2 à pelo menos dois de seus vértices.



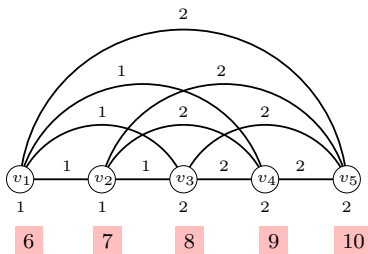
K_5



Modificamos a [2]-rotulação total semiforte do K_n a fim de obter uma [3]-rotulação total semiforte em que todo vértice tenha rótulo 1.

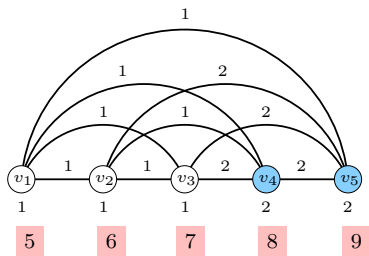


K_5

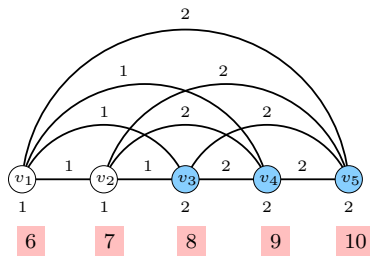


Ingredientes da demonstração

Modificamos a [2]-rotulação total semiforte do K_n a fim de obter uma [3]-rotulação total semiforte em que todo vértice tenha rótulo 1.



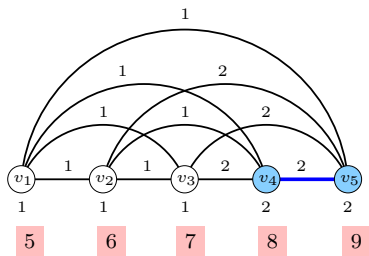
K_5



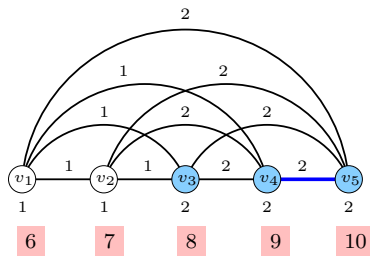
- Seja S conjunto dos vértices com rótulo 2.

Ingredientes da demonstração

Modificamos a [2]-rotulação total semiforte do K_n a fim de obter uma [3]-rotulação total semiforte em que todo vértice tenha rótulo 1.



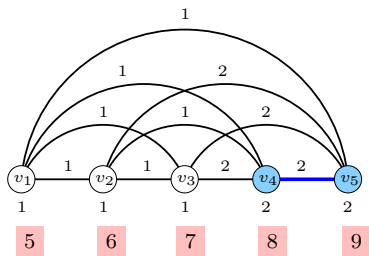
K_5



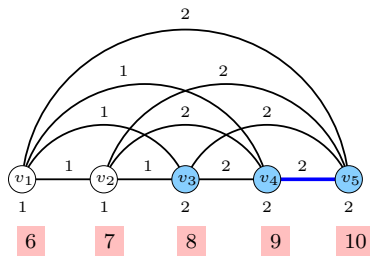
- ▶ Seja S conjunto dos vértices com rótulo 2.
- ▶ Seja M um emparelhamento máximo de $G[S]$ tal que:
 - se $|S|$ ímpar, M não satura o vértice de menor cor.

Ingredientes da demonstração

Modificamos a [2]-rotulação total semiforte do K_n a fim de obter uma [3]-rotulação total semiforte em que todo vértice tenha rótulo 1.



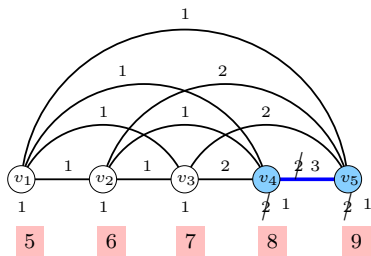
K_5



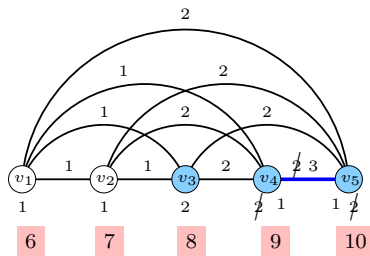
- ▶ o rótulo de cada aresta em M é incrementado em 1.
- ▶ o rótulo dos vértices saturados por M é decrementado em 1.

Ingredientes da demonstração

Modificamos a [2]-rotulação total semiforte do K_n a fim de obter uma [3]-rotulação total semiforte em que todo vértice tenha rótulo 1.



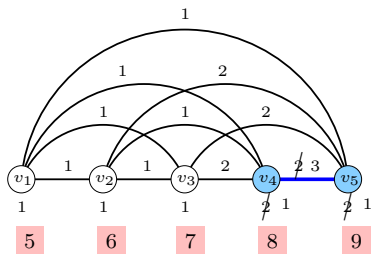
K_5



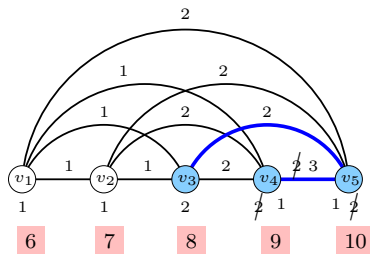
- ▶ o rótulo de cada aresta em M é incrementado em 1.
- ▶ o rótulo dos vértices saturados por M é decrementado em 1.

Ingredientes da demonstração

Modificamos a [2]-rotulação total semiforte do K_n a fim de obter uma [3]-rotulação total semiforte em que todo vértice tenha rótulo 1.



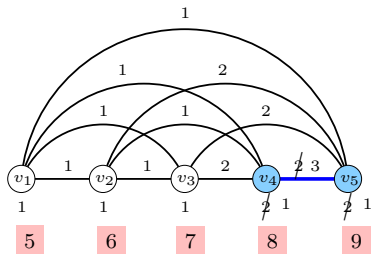
K_5



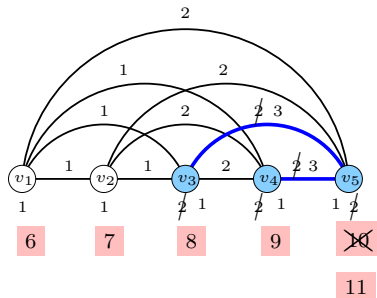
- ▶ o vértice de S não saturado por M é decrementado em 1.
- ▶ a aresta que liga o vértice não saturado de S ao vértice de maior cor de S é incrementada em 1.

Ingredientes da demonstração

Modificamos a [2]-rotulação total semiforte do K_n a fim de obter uma [3]-rotulação total semiforte em que todo vértice tenha rótulo 1.



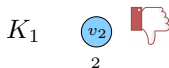
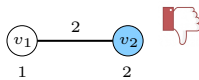
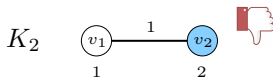
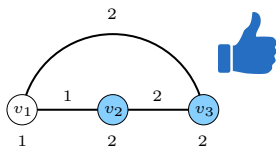
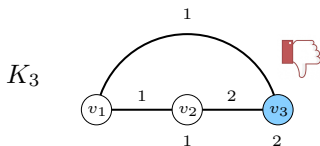
K_5



- ▶ o vértice de S não saturado por M é decrementado em 1.
- ▶ a aresta que liga o vértice não saturado de S ao vértice de maior cor de S é incrementada em 1.

Ingredientes da demonstração

Casos excepcionais: K_1 , K_2 e um caso do K_3 .



Teorema

Se $G \cong P_n^k$ ou $G \cong C_n^k$, então G tem uma [3]-rotulação de arestas semiforte.

Casos:

- (i) $G \cong P_n^k$ e $n \geq 2k + 2$;
- (ii) $G \cong P_n^k$ e $k + 1 < n < 2k + 2$;
- (iii) $G \cong C_n^k$, $k \geq 3$ e $r \neq 1$;
- (iv) $G \cong C_n^k$, $k \geq 3$ e $r = 1$;
- (v) $G \cong C_n^k$, $k = 2$ e $r = 0$;
- (vi) $G \cong C_n^k$, $k = 2$ e $r = 1$;
- (vii) $G \cong C_n^k$, $k = r = 2$.

Teorema

Se $G \cong P_n^k$ ou $G \cong C_n^k$, então G tem uma [3]-rotulação de arestas semiforte.

Casos:

- (i) $G \cong P_n^k$ e $n \geq 2k + 2$;
- (ii) $G \cong P_n^k$ e $k + 1 < n < 2k + 2$;
- (iii) $G \cong C_n^k$, $k \geq 3$ e $r \neq 1$;
- (iv) $G \cong C_n^k$, $k \geq 3$ e $r = 1$;
- (v) $G \cong C_n^k$, $k = 2$ e $r = 0$;
- (vi) $G \cong C_n^k$, $k = 2$ e $r = 1$;
- (vii) $G \cong C_n^k$, $k = r = 2$.

Ilustração do caso $G \cong P_n^k$ e $n \geq 2k + 2$

Exemplo: P_{11}^2

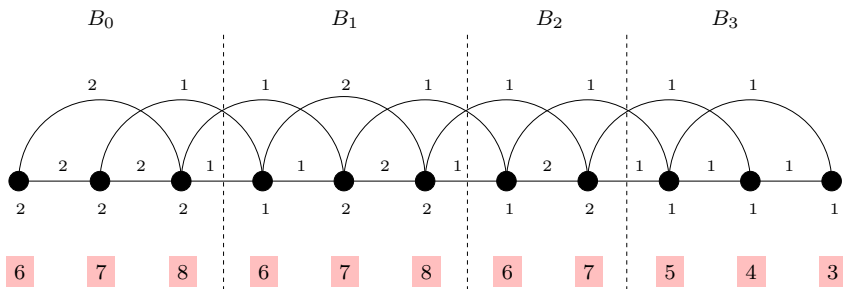


Ilustração do caso $G \cong P_n^k$ e $n \geq 2k + 2$

Exemplo: P_{11}^2

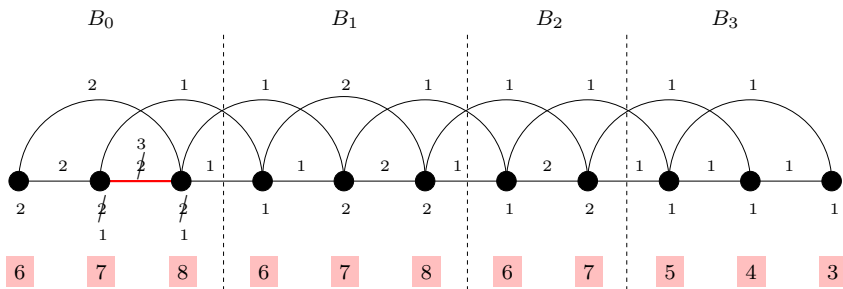


Ilustração do caso $G \cong P_n^k$ e $n \geq 2k + 2$

Exemplo: P_{11}^2

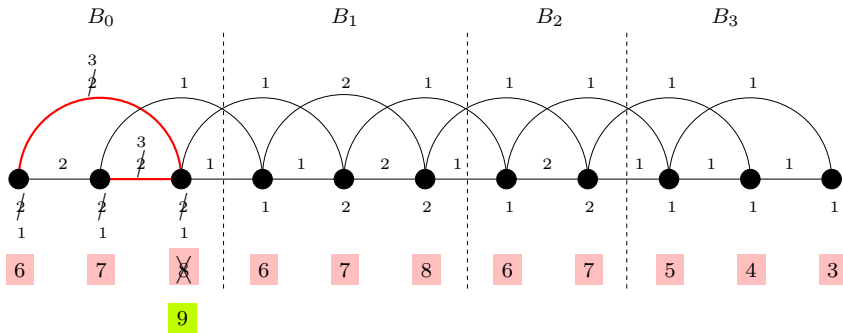


Ilustração do caso $G \cong P_n^k$ e $n \geq 2k + 2$

Exemplo: P_{11}^2

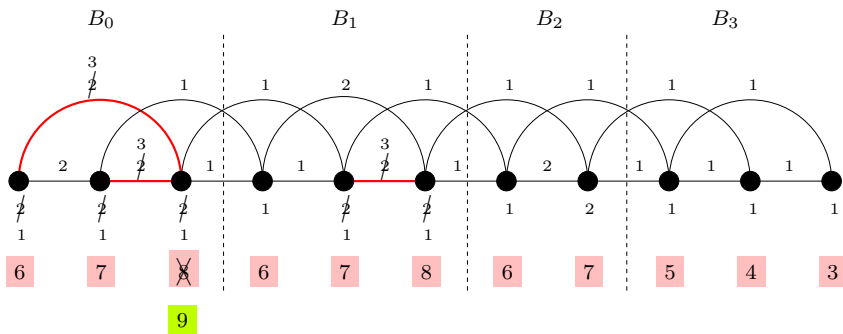


Ilustração do caso $G \cong P_n^k$ e $n \geq 2k + 2$

Exemplo: P_{11}^2

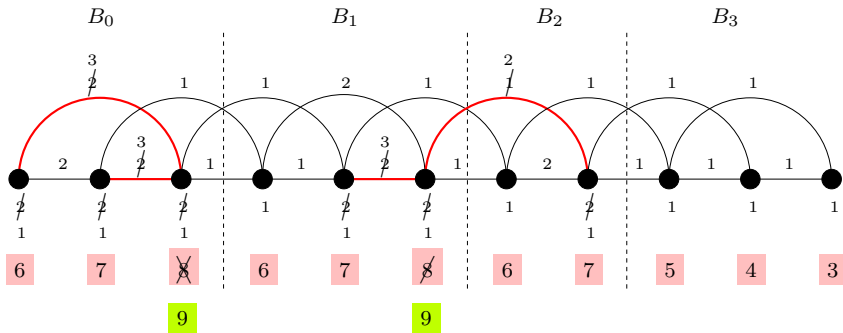


Ilustração do caso $G \cong C_n^k$, $k = 2$ e $r = 1$

Exemplo: C_{10}^2

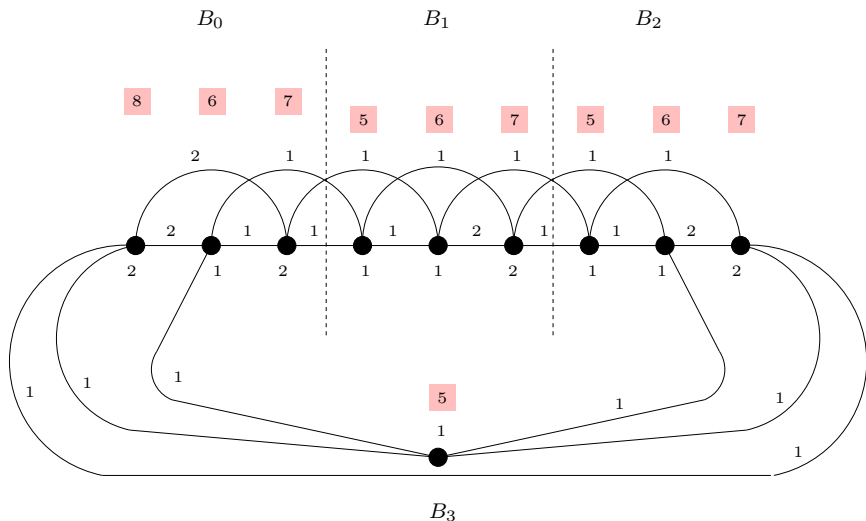


Ilustração do caso $G \cong C_n^k$, $k = 2$ e $r = 1$

Exemplo: C_{10}^2

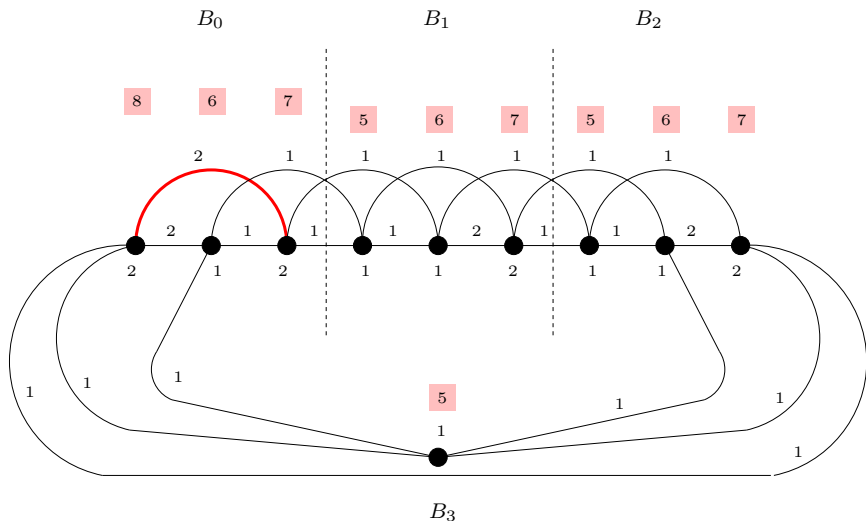


Ilustração do caso $G \cong C_n^k$, $k = 2$ e $r = 1$

Exemplo: C_{10}^2

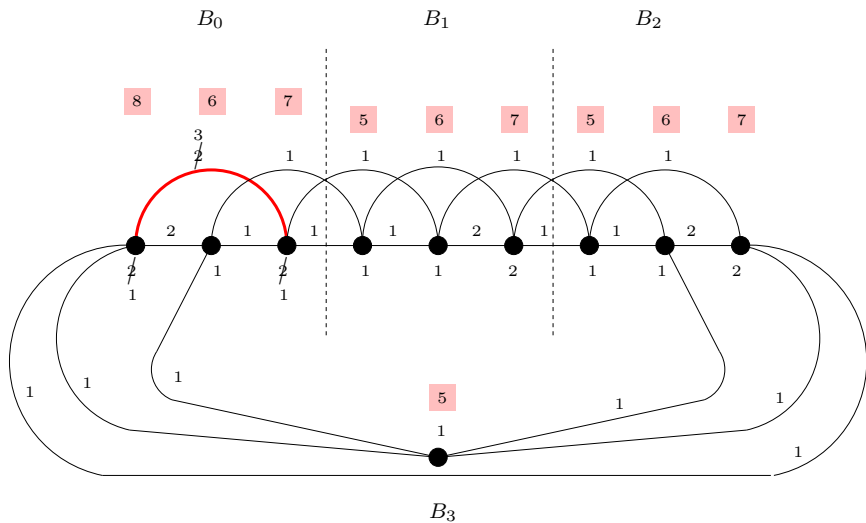


Ilustração do caso $G \cong C_n^k$, $k = 2$ e $r = 1$

Exemplo: C_{10}^2

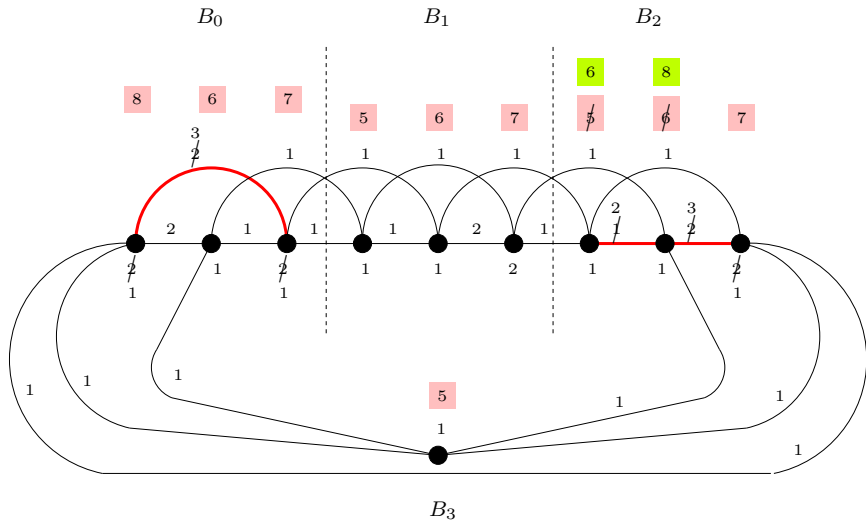


Ilustração do caso $G \cong C_n^k$, $k = 2$ e $r = 1$

Exemplo: C_{10}^2

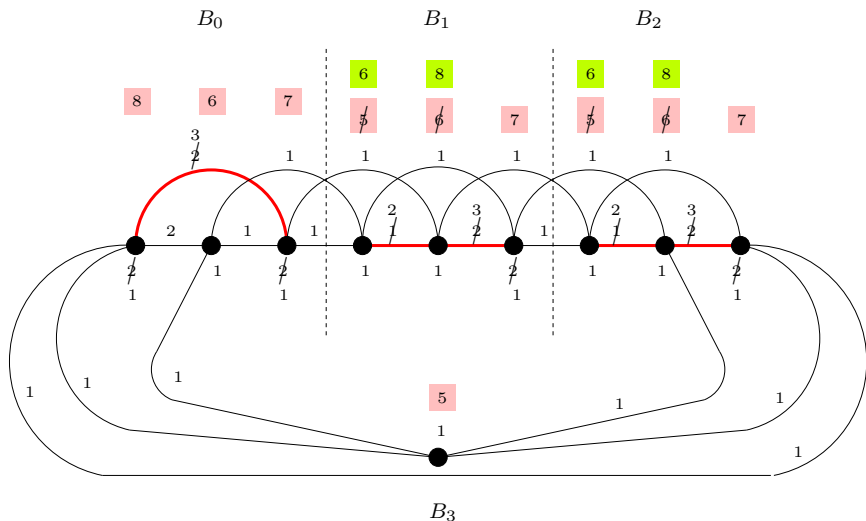


Ilustração do caso $G \cong C_n^k$, $k = 2$ e $r = 1$

Exemplo: C_{10}^2

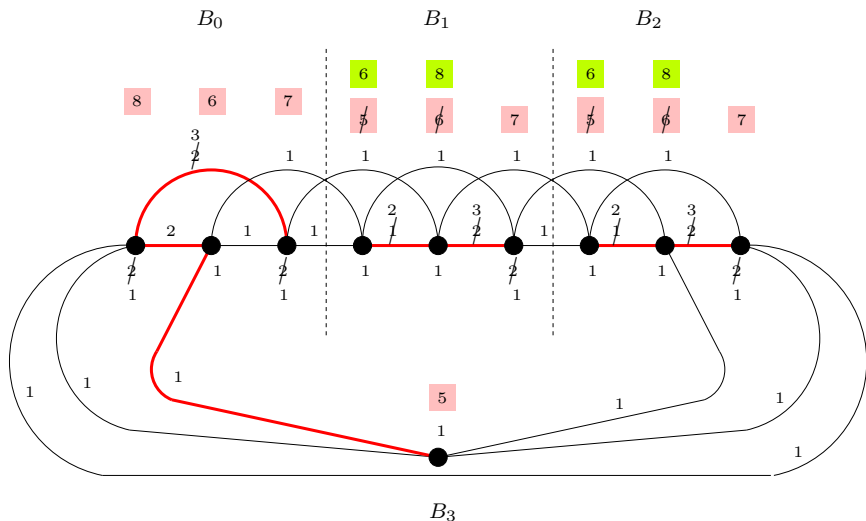
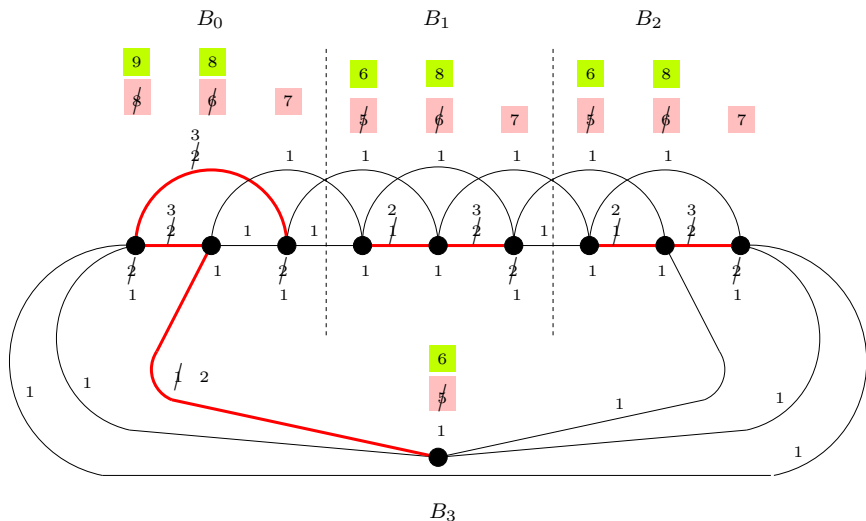


Ilustração do caso $G \cong C_n^k$, $k = 2$ e $r = 1$

Exemplo: C_{10}^2



- ▶ Quais grafos possuem uma rotulação semiforte com reais a e b distintos? [Khatirinejad et al. 2012]

- ▶ Quais grafos possuem uma rotulação semiforte com reais a e b distintos? [Khatirinejad et al. 2012]
- ▶ Uma rotulação semiforte com reais a, b distintos implica numa rotulação semiforte com reais a', b' distintos?
 - Se G for regular: **Sim!** [Hulgan et al. 2016]

- ▶ Quais grafos possuem uma rotulação semiforte com reais a e b distintos? [Khatirinejad et al. 2012]
- ▶ Uma rotulação semiforte com reais a, b distintos implica numa rotulação semiforte com reais a', b' distintos?
 - Se G for regular: **Sim!** [Hulgan et al. 2016]
- ▶ C_n^k possui uma [2]-rotulação total semiforte. [Luiz et al. 2015]

Corolário

Toda potência de ciclo possui uma rotulação total semiforte com rótulos a e b distintos, tal que $a, b \in \mathbb{R}$.

Neste trabalho provamos que:

A Conjetura 1,2,3 é verdadeira para as potências de ciclo e potências de caminho.

C_n^k tem uma rotulação total semiforte com rótulos reais a e b distintos.

Próximo passo:

- ▶ C_n^k tem uma rotulação de arestas semiforte com rótulos reais a e b distintos.

Obrigado!

Agradecimentos



- [1] Dudek, A. and Wajc, D. (2011).
On the complexity of vertex-coloring edge-weightings.
Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 13(3):45–50.
- [2] Hulgan, J., Lehel, J., Ozeki, K., and Yoshimoto, K. (2016).
Vertex Coloring of Graphs by Total 2-Weightings.
Graphs and Combinatorics, 32(6):2461–2471.
- [3] Kalkowski, M., Karóński, M., and Pfender, F. (2010).
Vertex-coloring edge-weightings: Toward the 1-2-3-conjecture.
Journal of Combinatorial Theory, Series B, 100(3):347–349.
- [4] Karóński, M., Łuczak, T., and Thomason, A. (2004).
Edge weights and vertex colours.
Journal of Combinatorial Theory, Series B, 91(1):151–157.
- [5] Luiz, A. G., Campos, C. N., Dantas, S., and Sasaki, D. (2015).
The 1,2-Conjecture for powers of cycles.
Electronic Notes in Discrete Mathematics, 50:83–88.
- [6] Luiz, A. G., Campos, C. N., Dantas, S., and Sasaki, D. (2017).
The 1,2-conjecture for powers of paths and powers of cycles.
(submitted).

- [7] Przybyło, J. and Woźniak, M. (2010).
On a 1,2 Conjecture.
Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 12(1):101–108.
- [8] Seymour, P. D. (1995).
Nowhere-zero flows.
In *Handbook of combinatorics* (eds. Graham, R. L., Grottschel, M., and Lovasz, L.), North-Holand, Amsterdam, pages 289–299.
- [9] Thomassen, C., Wu, Y., and Zhang, C.-Q. (2016).
The 3-flow conjecture, factors modulo k , and the 1-2-3-conjecture.
Journal of Combinatorial Theory, Series B, 121:308–325.