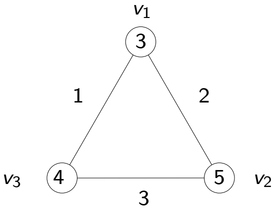
Sobre a Conjetura 1,2 e a Conjetura 1,2,3

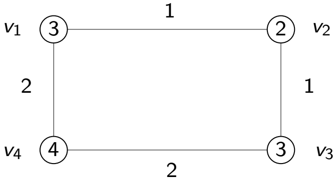
Atílio Gomes Luiz

Workshop em Estruturas Combinatórias, Otimização e Algoritmos

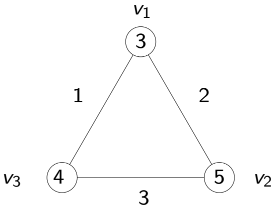
Novembro, 2013

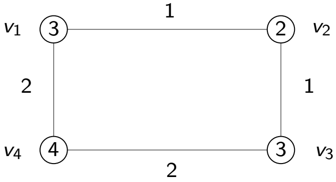
Uma ponderação das arestas de um grafo simples com inteiros positivos induz uma ponderação dos seus vértices.





Uma ponderação das arestas de um grafo simples com inteiros positivos induz uma ponderação dos seus vértices.

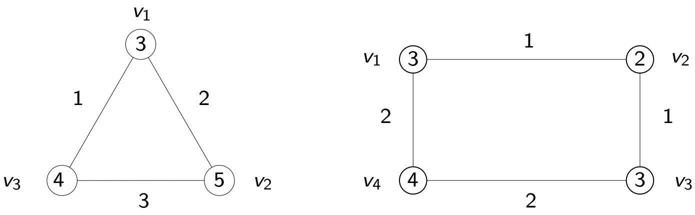




Seja G um grafo simples, munido de uma ponderação de arestas $\omega\colon E(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$. Definimos o **peso** de um vértice $v \in V(G)$ como $\phi(v) = \sum_{v \in e} \omega(e)$.

Introdução e Motivação

Uma ponderação das arestas de um grafo simples com inteiros positivos induz uma ponderação dos seus vértices.



Seja G um grafo simples, munido de uma ponderação de arestas $\omega\colon E(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$. Definimos o **peso** de um vértice $v \in V(G)$ como $\phi(v) = \sum_{v \in e} \omega(e)$.

Se $\phi(u) \neq \phi(v)$, para quaisquer $u, v \in V(G)$, então dizemos que ω é uma ponderação de arestas **forte**.

O menor número k para o qual um grafo simples G admite uma ponderação de arestas forte é denominado por $s(G)$.

O menor número k para o qual um grafo simples G admite uma ponderação de arestas forte é denominado por $s(G)$.

A ponderação de arestas forte foi introduzida em 1986, por Chartrand et al. [1], e desde então tem sido estudada por vários autores [2, 3, 4, 5].

O menor número k para o qual um grafo simples G admite uma ponderação de arestas forte é denominado por $s(G)$.

A ponderação de arestas forte foi introduzida em 1986, por Chartrand et al. [1], e desde então tem sido estudada por vários autores [2, 3, 4, 5].

Nierhoff, 2000

$s(G) \leq n - 1$, para grafos conexos com pelo menos três vértices.

Introdução e Motivação

O menor número k para o qual um grafo simples G admite uma ponderação de arestas forte é denominado por $s(G)$.

A ponderação de arestas forte foi introduzida em 1986, por Chartrand et al. [1], e desde então tem sido estudada por vários autores [2, 3, 4, 5].

Nierhoff, 2000

$s(G) \leq n - 1$, para grafos conexos com pelo menos três vértices.

Kalkowski et al., 2011

$s(G) \leq \lceil 6n/\delta(G) \rceil$, para grafos conexos com pelo menos três vértices.

O menor número k para o qual um grafo simples G admite uma ponderação de arestas forte é denominado por $s(G)$.

A ponderação de arestas forte foi introduzida em 1986, por Chartrand et al. [1], e desde então tem sido estudada por vários autores [2, 3, 4, 5].

Nierhoff, 2000

$s(G) \leq n - 1$, para grafos conexos com pelo menos três vértices.

Kalkowski et al., 2011

$s(G) \leq \lceil 6n/\delta(G) \rceil$, para grafos conexos com pelo menos três vértices.

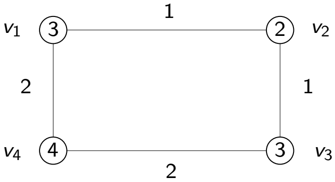
- Diversas variações deste problema têm sido estudadas.

Ponderação de arestas semiforte

- Seja G um grafo simples munido de uma k-ponderação de arestas $\omega\colon E(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$.
- Dizemos que a ponderação de arestas ω é **semiforte** se $\phi(u) \neq \phi(v)$ para quaisquer dois vértices *adjacentes* $u, v \in V(G)$.

Ponderação de arestas semiforte

- Seja G um grafo simples munido de uma k-ponderação de arestas $\omega\colon E(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$.
- Dizemos que a ponderação de arestas ω é **semiforte** se $\phi(u) \neq \phi(v)$ para quaisquer dois vértices *adjacentes* $u, v \in V(G)$.



Conjetura 1,2,3

- O menor número k para o qual um grafo G admite uma k-ponderação de arestas semiforte é denotado por $\mu(G)$.

Conjetura 1,2,3

- O menor número k para o qual um grafo G admite uma k-ponderação de arestas semiforte é denotado por $\mu(G)$.

- Não existe ponderação de arestas semiforte do K_2. Para este caso, temos $\mu(K_2) = \infty$.

Conjetura 1,2,3

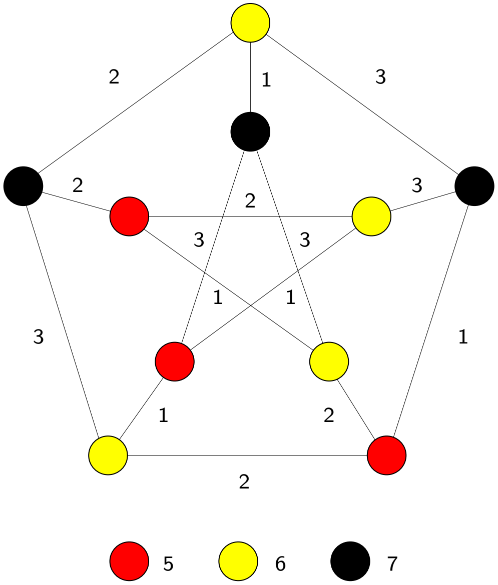
- O menor número k para o qual um grafo G admite uma k-ponderação de arestas semiforte é denotado por $\mu(G)$.

- Não existe ponderação de arestas semiforte do K_2. Para este caso, temos $\mu(K_2) = \infty$.

Conjetura 1,2,3 [Karoński et al., 2004]

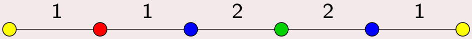
Se G é um grafo conexo com pelo menos três vértices, então G possui uma ponderação de arestas semiforte com os pesos 1,2,3.

Conjetura 1,2,3 - Grafo de Petersen



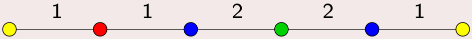
Caminhos

$\mu(P_n) = 2$, para $n \geq 4$.



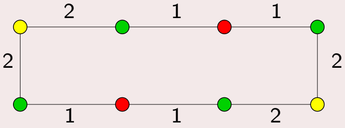
Caminhos

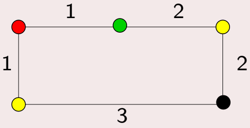
$\mu(P_n) = 2$, para $n \geq 4$.



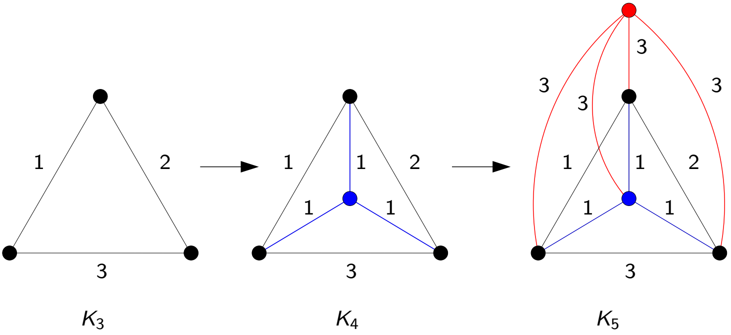
Ciclos

$$\mu(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{se } n \equiv 0 \pmod 4 \\ 3 & \text{se } n \not\equiv 0 \pmod 4 \end{cases}$$





Conjetura 1,2,3 - Grafos completos



Construção indutiva do K_{n+1} a partir do K_n ($n \geq 3$):

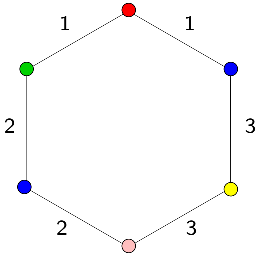
- Se n ímpar $\rightarrow$ adiciona vértice universal com peso 1 nas arestas.
- Se n par $\rightarrow$ adiciona vértice universal com peso 3 nas arestas.

Conjetura 1,2,3

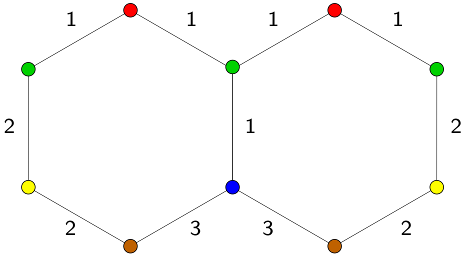
- Em 2008, Addario-Berry et al. [16] provaram que quase todos os grafos admitem uma 2-ponderação de arestas.
- Em 2011, A. Dudek e D. Wajc [17] provaram que determinar se um grafo possui uma 2-ponderação de arestas é um problema *NP*-completo.

- Em 2008, Addario-Berry et al. [16] provaram que quase todos os grafos admitem uma 2-ponderação de arestas.
- Em 2011, A. Dudek e D. Wajc [17] provaram que determinar se um grafo possui uma 2-ponderação de arestas é um problema *NP*-completo.

Exemplo: Bipartidos com $\mu(G) = 3$.



C_{4k+2}



$\theta(1, 4k_2 + 1, 4k_3 + 1, \ldots, 4k_r + 1)$

Cálculo do parâmetro $\mu(G)$ para grafos gerais:

- Se G é um grafo 3-colorável, então $\mu(G) \leq 3$. [Karoński, Luczak e Thomason, 2004].
- Se G é um grafo conexo com pelo menos três vértices, então:
  - $\mu(G) \leq 30$. [Addario-Berry et al., 2007]
  - $\mu(G) \leq 16$. [Addario-Berry et al., 2007]
  - $\mu(G) \leq 13$. [Wang e Yu, 2008]
  - $\mu(G) \leq 5$. [Kalkowski et al., 2010]

Uma k-**ponderação total** de um grafo simples G é um mapeamento $\omega\colon V(G) \cup E(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$.

Ponderação total semiforte

Uma k-**ponderação total** de um grafo simples G é um mapeamento $\omega\colon V(G) \cup E(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$.

Uma k-ponderação total é **semiforte** se, para toda aresta $uv \in E(G)$,

$$\left(\omega(u) + \sum_{u \in e} w(e)\right) \neq \left(\omega(v) + \sum_{v \in e} \omega(e)\right).$$

Dizemos que G **admite** uma k-ponderação total semiforte.

O menor número k para o qual um grafo G admite uma k-ponderação total semiforte é denotado por $\tau(G)$.

Conjetura 1,2

O menor número k para o qual um grafo G admite uma k-ponderação total semiforte é denotado por $\tau(G)$.

Em 2007, Przybylo e Woźniak verificaram que os seguintes grafos possuem $\tau(G) \leq 2$:

- grafos completos;
- grafos bipartidos e ciclos;
- grafos 3-coloráveis.
- grafos 4-regulares;

O menor número k para o qual um grafo G admite uma k-ponderação total semiforte é denotado por $\tau(G)$.

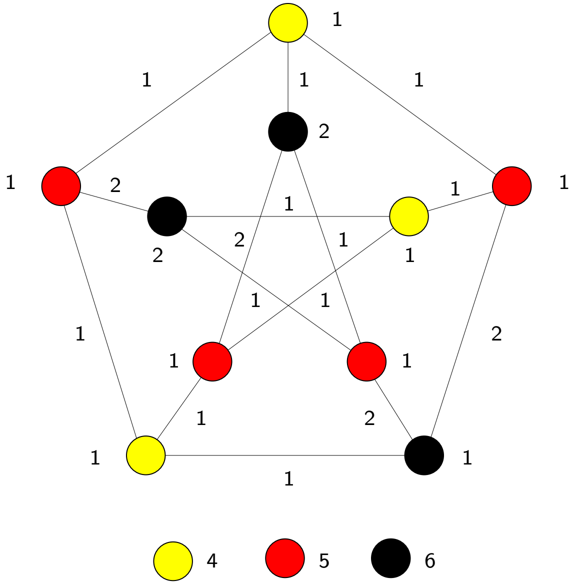
Em 2007, Przybylo e Woźniak verificaram que os seguintes grafos possuem $\tau(G) \leq 2$:

- grafos completos;
- grafos bipartidos e ciclos;
- grafos 3-coloráveis.
- grafos 4-regulares;

Conjetura 1,2 [Przybylo e Woźniak, 2007]

Se G é um grafo simples, então G admite uma ponderação total semiforte com os pesos 1 e 2.

Conjetura 1,2 - Grafo de Petersen



Conjetura 1,2 - Grafos gerais

Cálculo do parâmetro $\tau(G)$ para grafos gerais:

- $\tau(G) \leq 7$ para todos os grafos regulares.
  [Przybylo, 2008].
- Se G é um grafo simples, então $\tau(G) \leq \min\{11, \lfloor \frac{\chi(G)}{2} \rfloor + 1\}$.
  [Przybylo e Woźniak, 2008].
- para qualquer grafo G, $\tau(G) \leq 3$.
  (ainda não publicado)[Kalkowski, 2008].

- Determinar $\tau(G)$ para as potências de ciclo.

Uma **potência de ciclo** C_n^k é um grafo com conjunto de vértices $V := \{v_0, \ldots, v_{n-1}\}$ e conjunto de arestas $E := E^1 \cup E^2 \cup \ldots \cup E^k$, onde $E^i := \{(v_j v_{(j+i) \bmod n}) \colon 0 \leq j \leq n-1\}$.

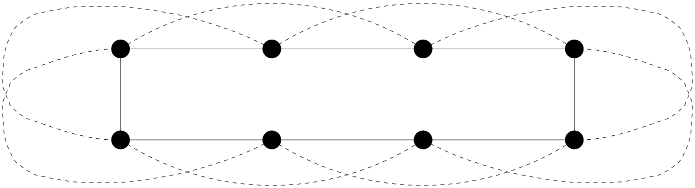
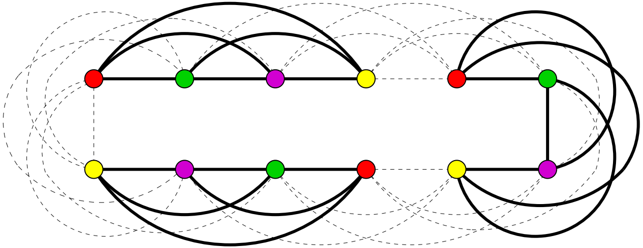
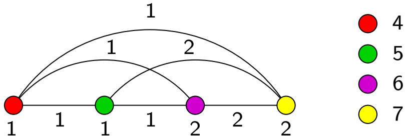


Figura: Potência de ciclo C_8^2.

- $\tau(C_n^k) = 2$ para grafos C_n^k com $n \equiv 0 \pmod{k+1}$.



C_{12}^3



Obrigado.

Agradecimentos

FAPESP
Instituto de Computação - UNICAMP

Referências I

[1] G. Chratrand, M. Jacobson, J. Lehel, O. Oellermann, S. Ruiz, and F. Saba.
Irregular networks.
Congressus Numerantium, 64:197-210, 1988.

[2] T. Nierhoff.
A tight bound on the irregularity strength of graphs.
SIAM J. Discrete Math., 13:313–323, 2000.

[3] M. Aigner and E. Triesch.
Irregular assignments of trees and forests.
SIAM J. Discrete Math., 3:439–449, 1990.

[4] M. Kalkowski, M. Karoński, and F. Pfender.
A new upper bound for the irregularity strength of graphs.
SIAM J. Discrete Math., 25(3):1319–1321, 2011.

[5] J. Lehel.
Facts and quests on degree irregular assignments.
Graph Theory, Combinatorics and Applications, Willey, New York, pp. 765–782, 1991.

[6] J. Przybylo, M. Woźniak
On a 1,2 Conjecture.
Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 12 (1):101-108, 2010.

Referências II

[7] J. Przybylo
A note on neighbour-distinguishing regular graphs total-weighting.
The electronic journal of combinatorics, 15(1):1-5, 2008.

[8] M. Kalkowski, M. Karoński and F. Pfender
Vertex-coloring edge-weightings: Towards the 1-2-3-conjecture.
Journal of Combinatorial Theory-Series B, 100:347-349, 2010.

[9] M. Karoński, T. Luczak, A. Thomason
Edge weights and vertex colours.
Journal of Combinatorial Theory - Series B, 91:151-157, 2004.

[10] T. Wang and Q. Yu.
On vertex-coloring 13-edge-weighting.
Front. Math. China, 3:1-7, 2008.

[11] G. Chang, C. Lu, J. Wu, and Q. Yu
Vertex-coloring edge-weightings of graphs.
Taiwanese Journal of Mathematics, 15(4):1807–1813, 2011.

[12] H. Lu, Q. Yu, C. Zhang
Vertex-coloring 2-edge-weighting of graphs.
European Journal of Combinatorics, 32:21-27, 2011.

Referências III

[13] B. Seamone
The 1-2-3 Conjecture and related problems: a survey.
Preprint available at: http://arxiv.org/abs/1211.5122

[14] A. Davoodi and B. Omoomi
On the 1-2-3 Conjecture.
Preprint available at: http://arxiv.org/abs/1205.3266

[15] L. Addario-Berry, K. Dalal, C. McDiarmid, B. A. Reed, and A. Thomason
Vertex-colouring edge-weightings.
Combinatorica, 27(1):1-12, 2007.

[16] L. Addario-Berry, K. Dalal, and B. A. Reed
Degree constrained subgraphs.
Discrete Appl. Math., 156(7):1168-1174, 2008.

[17] A. Dudek and D. Wajc.
On the complexity of vertex-coloring edge-weightings.
Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science., 13(3):45-50, 2011.