Lista de Exercícios: Classes[1]

MC358 — Fundamentos Matemáticos para Computação

Pedro J. de Rezende

2º Semestre de 2018

Assunto: Classes de Funções e Crescimento Assintótico

Exercícios

1. Comparando o crescimento assintótico das funções $f(n)$ e $g(n)$ abaixo, determine a que classe<u>s</u> de g a função f pertence (isto é, $f \in \bullet(g)$, onde $\bullet$ é uma dentre o, O, Θ, Ω ou ω), em cada um dos seguintes dezesseis casos (`(a)` a `(p)`):

	$f(n)$	$g(n)$		$f(n)$	$g(n)$
`(a)`	$1000n$	$n^2/1000$	`(b)`	$20n + \log n$	$n + 20$
`(c)`	$\log n$	n	`(d)`	$10n^2 + 12n + 6$	$2n^2 - n$
`(e)`	$100n \log n$	n^2	`(f)`	$n \log^5 n$	n^2
`(g)`	$n^{(2/3)}$	$\log^4 n$	`(h)`	$n^2 + 3n^4 + 3$	$n \log^5 n$
`(i)`	$\log^2 n$	$\log n^2$	`(j)`	$\log^2(n^5 + n)$	$\log(n^{10} + n^2)$
`(k)`	$\sqrt{n}$	$\log^2 n$	`(l)`	$n^{(1/2)}$	$(\log n)^2$
`(m)`	$n^{(1/10)}$	$\log^{10} n$	`(n)`	n^{ε}	$\left(\log^{(1/\varepsilon)} n\right)$ onde ε é uma constante $0<\varepsilon<1$
`(o)`	n^{10}	$(1.1)^n$	`(p)`	n^k	$(1 + 1/k)^n$ onde k é uma constante $k > 1$

2. Utilizando as definições de classes, verifique que:

   (a) $o(g) \subset O(g)$

   (b) $\omega(g) \subset \Omega(g)$

   (c) $O(g) \cap \Omega(g) = \Theta(g)$

   (d) $o(g) \cap \omega(g) = \emptyset$

   (e) $o(g) \cap \Theta(g) = \emptyset$

   (f) $\Theta(g) \cap \omega(g) = \emptyset$

[1]Com a colaboração de Fábio P. Selmi-Dei e Célia P. de Mello.

3. Utilizando as definições de classes, verifique que:

   (a) $f \in o(g)$ se e somente se $g \in \omega(f)$
   (b) $f \in O(g)$ se e somente se $g \in \Omega(f)$
   (c) $f \in \Theta(g)$ se e somente se $g \in \Theta(f)$
   (d) $f \in \Theta(g)$ se e somente se $f \in O(g)$ e $g \in O(f)$
   (e) $f \in \Omega(g)$ se e somente se $g \in O(f)$
   (f) $f \in \omega(g)$ se e somente se $g \in o(f)$

4. Prove ou disprove cada uma das afirmações abaixo:

   (a) Se $f \in O(g)$ e $g \in O(f)$ então $f \in \Theta(g)$.
   (b) Se $f \in O(g)$ e $g \notin O(f)$ então $f \in o(g)$.
   (c) Se $f \in o(g)$ então $f \in O(g)$.
   (d) Se $f \in O(g)$ então $f \in o(g)$.
   (e) $f \in o(f)$
   (f) $f \in \omega(f)$

5. Prove ou disprove cada uma das afirmações abaixo:

   (a) $f + g \in \Theta(max(f, g))$.
   (b) $f + g \in \Theta(min(f, g))$.
   (c) Se $g \in o(f)$, então $f + g \in \Theta(f)$.

6. Seja $f \in O(r)$ e $g \in O(s)$, prove ou disprove as seguintes afirmações:

   (a) $f + g \in O(r + s)$.
   (b) $f \cdot g \in O(r \cdot s)$.
   (c) $f - g \in O(r - s)$.
   (d) $f/g \in O(r/s)$.