MC102 – Aula29
Recursão IV - MergeSort

Instituto de Computação – Unicamp

29 de Novembro de 2016

Introdução

- Problema:
  - Temos uma lista **v** de inteiros de tamanho **n**.
  - Devemos deixar **v** ordenada crescentemente.
- Veremos um algoritmo baseado na técnica **dividir-e-conquistar** que usa recursão.

Introdução

- Problema:
  - Temos uma lista **v** de inteiros de tamanho **n**.
  - Devemos deixar **v** ordenada crescentemente.
- Veremos um algoritmo baseado na técnica **dividir-e-conquistar** que usa recursão.

Dividir e Conquistar

- Temos que resolver um problema P de tamanho n.
- **Dividir:** Quebramos P em sub-problemas menores.
- Resolvemos os sub-problemas de forma recursiva.
- **Conquistar:** Unimos as soluções dos sub-problemas para obter solução do problema maior P.

Dividir e Conquistar

- Temos que resolver um problema P de tamanho n.
- **Dividir:** Quebramos P em sub-problemas menores.
- Resolvemos os sub-problemas de forma recursiva.
- **Conquistar:** Unimos as soluções dos sub-problemas para obter solução do problema maior P.

Dividir e Conquistar

- Temos que resolver um problema P de tamanho n.
- **Dividir:** Quebramos P em sub-problemas menores.
- Resolvemos os sub-problemas de forma recursiva.
- **Conquistar:** Unimos as soluções dos sub-problemas para obter solução do problema maior P.

Dividir e Conquistar

- Temos que resolver um problema P de tamanho n.
- **Dividir:** Quebramos P em sub-problemas menores.
- Resolvemos os sub-problemas de forma recursiva.
- **Conquistar:** Unimos as soluções dos sub-problemas para obter solução do problema maior P.

Merge-Sort: Ordenação por intercalação

- O Merge-Sort é um algoritmo baseado na técnica dividir-e-conquistar.
- Neste caso temos que ordenar uma lista de tamanho n.
  - **Dividir:** Dividimos a lista de tamanho n em duas sub-listas de tamanho aproximadamente iguais (uma de tamanho $\lceil n/2 \rceil$ e outra de tamanho $\lfloor n/2 \rfloor$).
  - Resolvemos o problema de ordenação de forma recursiva para estas duas sub-listas.
  - **Conquistar:** Com as duas sub-listas ordenadas, construímos uma lista ordenada de tamanho n ordenado.

Merge-Sort: Ordenação por intercalação

- O Merge-Sort é um algoritmo baseado na técnica dividir-e-conquistar.
- Neste caso temos que ordenar uma lista de tamanho n.
  - **Dividir:** Dividimos a lista de tamanho n em duas sub-listas de tamanho aproximadamente iguais (uma de tamanho $\lceil n/2 \rceil$ e outra de tamanho $\lfloor n/2 \rfloor$).
  - Resolvemos o problema de ordenação de forma recursiva para estas duas sub-listas.
  - **Conquistar:** Com as duas sub-listas ordenadas, construímos uma lista ordenada de tamanho n ordenado.

Merge-Sort: Ordenação por intercalação

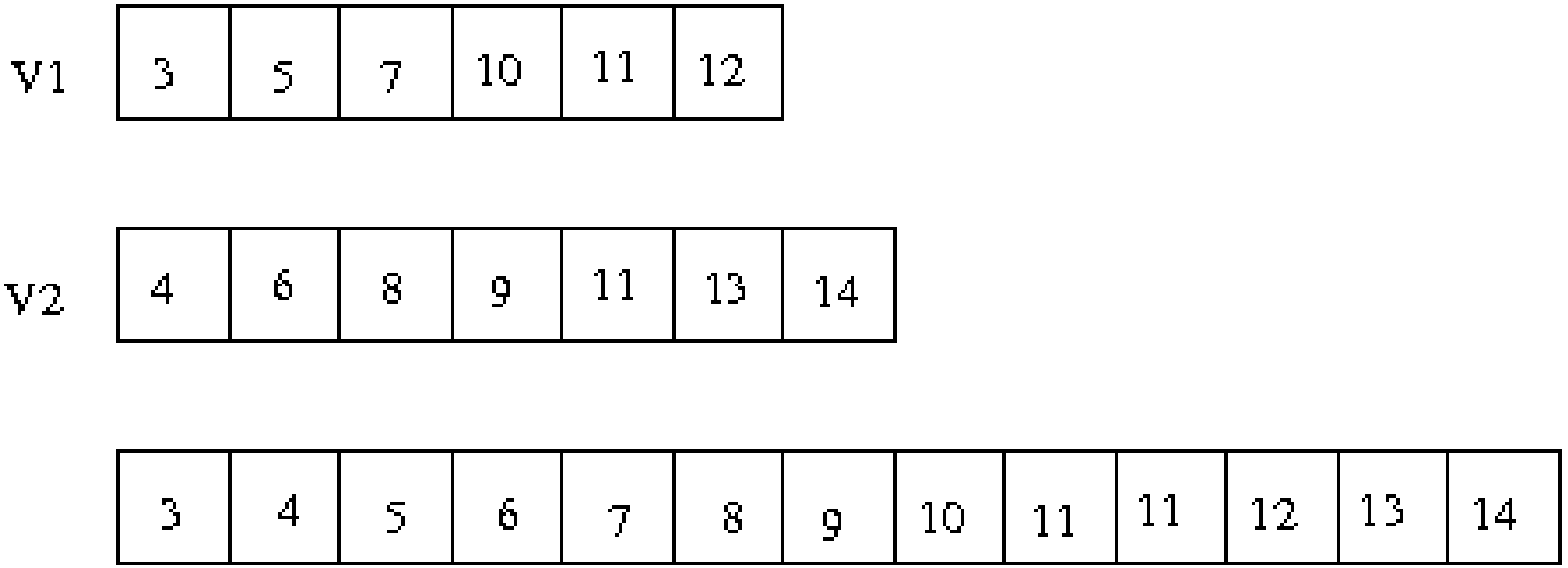
- O Merge-Sort é um algoritmo baseado na técnica dividir-e-conquistar.
- Neste caso temos que ordenar uma lista de tamanho n.
  - **Dividir:** Dividimos a lista de tamanho n em duas sub-listas de tamanho aproximadamente iguais (uma de tamanho $\lceil n/2 \rceil$ e outra de tamanho $\lfloor n/2 \rfloor$).
  - Resolvemos o problema de ordenação de forma recursiva para estas duas sub-listas.
  - **Conquistar:** Com as duas sub-listas ordenadas, construímos uma lista ordenada de tamanho n ordenado.

Merge-Sort: Ordenação por intercalação

- O Merge-Sort é um algoritmo baseado na técnica dividir-e-conquistar.
- Neste caso temos que ordenar uma lista de tamanho n.
  - **Dividir:** Dividimos a lista de tamanho n em duas sub-listas de tamanho aproximadamente iguais (uma de tamanho $\lceil n/2 \rceil$ e outra de tamanho $\lfloor n/2 \rfloor$).
  - Resolvemos o problema de ordenação de forma recursiva para estas duas sub-listas.
  - **Conquistar:** Com as duas sub-listas ordenadas, construímos uma lista ordenada de tamanho n ordenado.

Merge-Sort: Ordenação por intercalação

Conquistar: Dados duas listas v_1 e v_2 ordenadas, como obter uma outra lista ordenada contendo os elementos de v_1 e v_2?



Merge (Fusão)

- A ideia é executar um laço onde em cada iteração testamos quem é o menor elemento dentre $v_1[i]$ e $v_2[j]$, e copiamos este elemento para uma nova lista.
- Durante a execução deste laço podemos chegar em uma situação onde todos os elementos de uma das listas (v_1 ou v_2) foram todos avaliados. Neste caso terminamos o laço e copiamos os elementos restantes da outra lista.

Merge (Fusão)

- A ideia é executar um laço onde em cada iteração testamos quem é o menor elemento dentre $v_1[i]$ e $v_2[j]$, e copiamos este elemento para uma nova lista.
- Durante a execução deste laço podemos chegar em uma situação onde todos os elementos de uma das listas (v_1 ou v_2) foram todos avaliados. Neste caso terminamos o laço e copiamos os elementos restantes da outra lista.

Merge (Fusão)

Retorna uma lista que é a fusão das listas passadas por parâmetro:

```
#Devolve lista com fusão de a e b
def merge(a, b):
  i=0; j=0; #índice de a e b resp.
  c = []

  while(i < len(a) and j < len(b)): #Enquanto não avaliou completamente um dos
    if(a[i] <= b[j]):               #vetores, copia menor elemento para c
      c.append(a[i])
      i = i + 1
    else:
      c.append(b[j])
      j = j + 1


  while(i < len(a)): #copia resto de a
    c.append(a[i])
    i = i + 1

  while(j < len(b)): #copia resto de b
    c.append(b[j])
    j = j + 1

  return c
```

Merge (Fusão)

Retorna uma lista que é a fusão das listas passadas por parâmetro:

```
#Devolve lista com fusão de a e b
def merge(a, b):
  i=0; j=0; #índice de a e b resp.
  c = []

  while(i < len(a) and j < len(b)): #Enquanto não avaliou completamente um dos
    if(a[i] <= b[j]):               #vetores, copia menor elemento para c
      c.append(a[i])
      i = i + 1
    else:
      c.append(b[j])
      j = j + 1

  while(i < len(a)): #copia resto de a
    c.append(a[i])
    i = i + 1

  while(j < len(b)): #copia resto de b
    c.append(b[j])
    j = j + 1

  return c
```

Merge (Fusão)

Retorna uma lista que é a fusão das listas passadas por parâmetro:

```
#Devolve lista com fusão de a e b
def merge(a, b):
  i=0; j=0; #índice de a e b resp.
  c = []


  while(i < len(a) and j < len(b)): #Enquanto não avaliou completamente um dos
    if(a[i] <= b[j]):               #vetores, copia menor elemento para c
      c.append(a[i])
      i = i + 1
    else:
      c.append(b[j])
      j = j + 1


  while(i < len(a)): #copia resto de a
    c.append(a[i])
    i = i + 1

  while(j < len(b)): #copia resto de b
    c.append(b[j])
    j = j + 1

  return c
```

Merge (Fusão)

- A função descrita recebe duas listas ordenadas e devolve uma terceira contendo todos os elementos em ordem.
- Porém no merge-sort faremos a intercalação de sub-listas de uma mesma lista.
- Isto evita a criação de várias listas durante as várias chamadas recursivas, melhorando a performance do algoritmo.
- Teremos posições **ini, meio, fim** de uma lista e devemos fazer a intercalação das duas sub-listas: uma de **ini** até **meio**, e outra de **meio+1** até **fim**.
  - Para isso a função utiliza uma lista auxiliar, que receberá o resultado da intercalação, e que no final é copiado para a lista original a ser ordenada.

Merge (Fusão)

- A função descrita recebe duas listas ordenadas e devolve uma terceira contendo todos os elementos em ordem.
- Porém no merge-sort faremos a intercalação de sub-listas de uma mesma lista.
- Isto evita a criação de várias listas durante as várias chamadas recursivas, melhorando a performance do algoritmo.
- Teremos posições **ini, meio, fim** de uma lista e devemos fazer a intercalação das duas sub-listas: uma de **ini** até **meio**, e outra de **meio+1** até **fim**.
  - Para isso a função utiliza uma lista auxiliar, que receberá o resultado da intercalação, e que no final é copiado para a lista original a ser ordenada.

Merge (Fusão)

- A função descrita recebe duas listas ordenadas e devolve uma terceira contendo todos os elementos em ordem.
- Porém no merge-sort faremos a intercalação de sub-listas de uma mesma lista.
- Isto evita a criação de várias listas durante as várias chamadas recursivas, melhorando a performance do algoritmo.
- Teremos posições **ini, meio, fim** de uma lista e devemos fazer a intercalação das duas sub-listas: uma de **ini** até **meio**, e outra de **meio+1** até **fim**.
  - Para isso a função utiliza uma lista auxiliar, que receberá o resultado da intercalação, e que no final é copiado para a lista original a ser ordenada.

Merge (Fusão)

Faz intercalação de pedaços de **v**. No fim **v** estará ordenada entre as posições **ini** e **fim**:

```
def merge(v, ini, meio, fim, aux):
  i=ini; j=meio+1; k=0; #indices da metade inf, sup e aux respc.

  while(i <= meio and  j <= fim):#Enquanto não avaliou completamente um dos
                                 #vetores, copia menor elemento para aux
    if(v[i] <= v[j]):
      aux[k] = v[i]
      k = k + 1
      i = i + 1
    else:
      aux[k] = v[j]
      k = k + 1
      j = j + 1

  while(i <= meio): #copia resto da primeira sub-lista
    aux[k] = v[i]
    k = k + 1
    i = i + 1

  while(j <= fim): #copia resto da segunda sub-lista
    aux[k] = v[j]
    k = k + 1
    j = j + 1

  i = ini; k = 0;
  while(i <= fim): #copia lista ordenada aux para v
    v[i]=aux[k]
    i = i + 1
    k = k + 1
```

Merge (Fusão)

Faz intercalação de pedaços de **v**. No fim **v** estará ordenada entre as posições **ini** e **fim**:

```
def merge(v, ini, meio, fim, aux):
  i=ini; j=meio+1; k=0; #indices da metade inf, sup e aux respc.

  while(i <= meio and  j <= fim):#Enquanto não avaliou completamente um dos
                                 #vetores, copia menor elemento para aux
    if(v[i] <= v[j]):
      aux[k] = v[i]
      k = k + 1
      i = i + 1
    else:
      aux[k] = v[j]
      k = k + 1
      j = j + 1

  while(i <= meio): #copia resto da primeira sub-lista
    aux[k] = v[i]
    k = k + 1
    i = i + 1

  while(j <= fim): #copia resto da segunda sub-lista
    aux[k] = v[j]
    k = k + 1
    j = j + 1

  i = ini; k = 0;
  while(i <= fim): #copia lista ordenada aux para v
    v[i]=aux[k]
    i = i + 1
    k = k + 1
```

Merge (Fusão)

Faz intercalação de pedaços de **v**. No fim **v** estará ordenada entre as posições **ini** e **fim**:

```
def merge(v, ini, meio, fim, aux):
  i=ini; j=meio+1; k=0; #indices da metade inf, sup e aux respc.

  while(i <= meio and  j <= fim):#Enquanto não avaliou completamente um dos
                                 #vetores, copia menor elemento para aux
    if(v[i] <= v[j]):
      aux[k] = v[i]
      k = k + 1
      i = i + 1
    else:
      aux[k] = v[j]
      k = k + 1
      j = j + 1

  while(i <= meio): #copia resto da primeira sub-lista
    aux[k] = v[i]
    k = k + 1
    i = i + 1

  while(j <= fim): #copia resto da segunda sub-lista
    aux[k] = v[j]
    k = k + 1
    j = j + 1

  i = ini; k = 0;
  while(i <= fim): #copia lista ordenada aux para v
    v[i]=aux[k]
    i = i + 1
    k = k + 1
```

Merge-Sort

- O merge-sort resolve de forma recursiva dois sub-problemas, cada um contendo uma metade da lista original.
- Com a resposta das chamadas recursivas podemos chamar a função **merge** para obter uma lista ordenada.

Merge-Sort

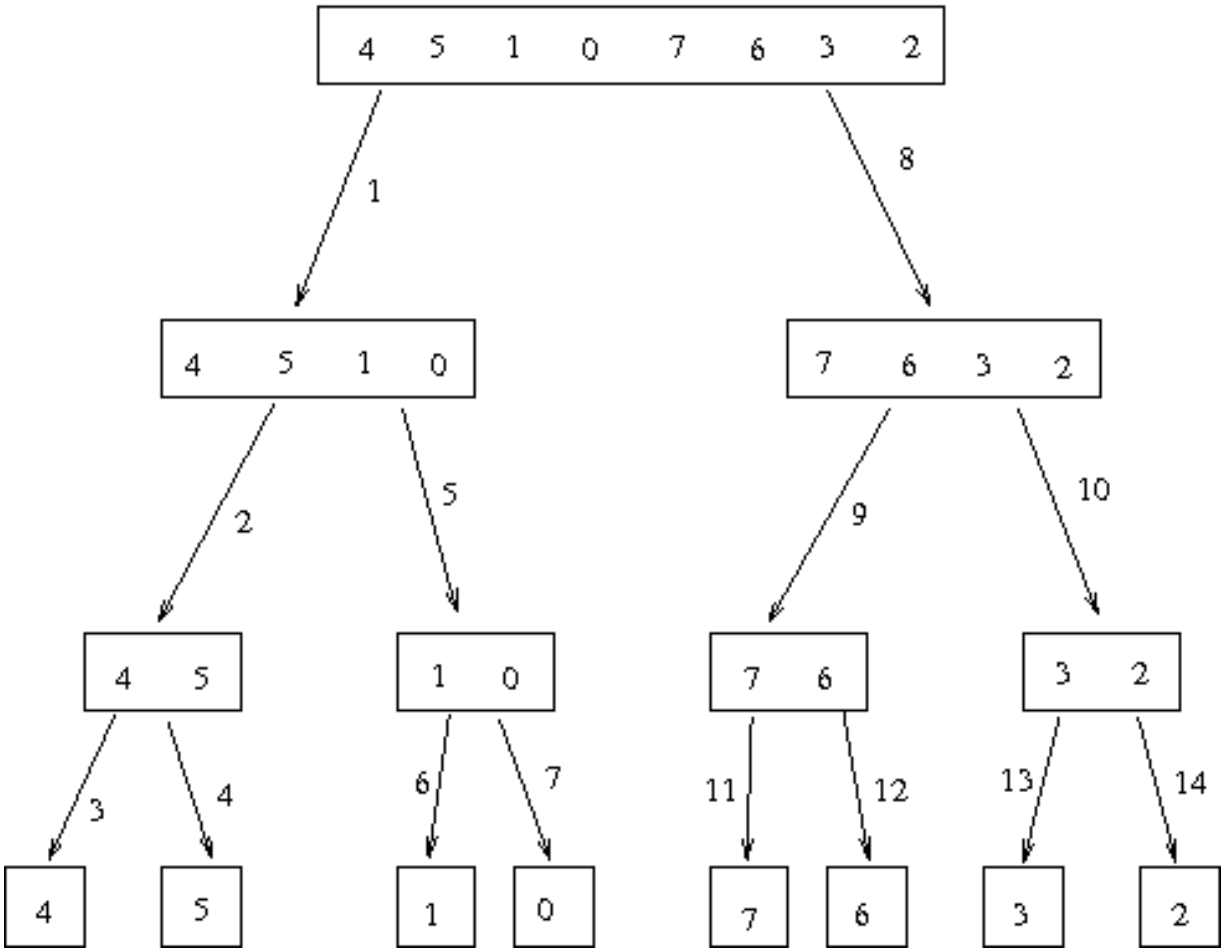
- O merge-sort resolve de forma recursiva dois sub-problemas, cada um contendo uma metade da lista original.
- Com a resposta das chamadas recursivas podemos chamar a função **merge** para obter uma lista ordenada.

Merge-Sort

```
def mergeSort(v, ini, fim, aux):
  meio = (fim+ini)//2
  if(ini < fim): #lista tem pelo menos 2 elementos
                 #para ordenar
    mergeSort(v, ini, meio, aux)
    mergeSort(v, meio+1, fim, aux)
    merge(v, ini, meio, fim, aux)
```

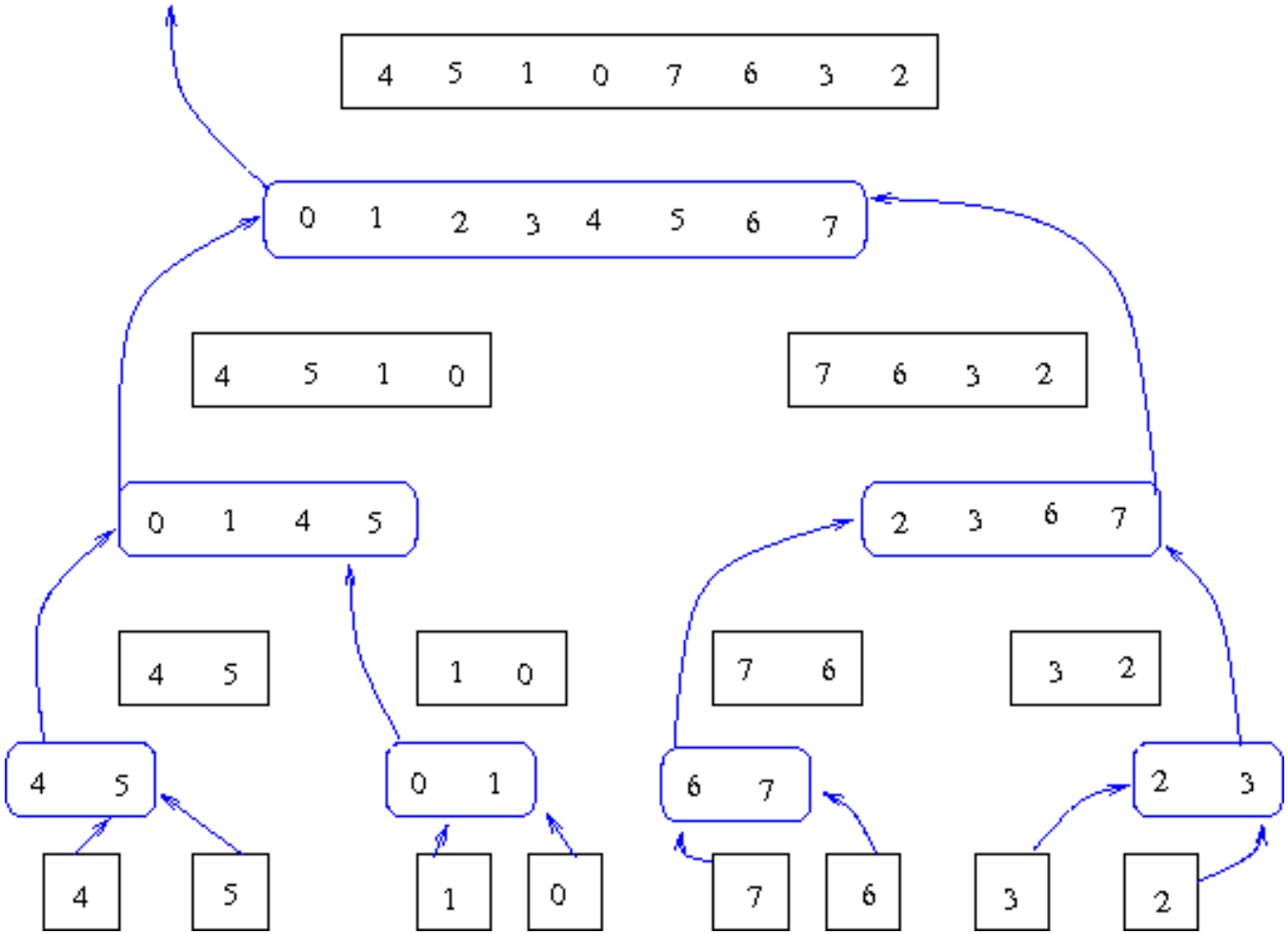
Merge-Sort

Abaixo temos um exemplo com a ordem de execução das chamadas recursivas.



Merge-Sort

Abaixo temos o retorno do exemplo anterior.



Merge-Sort: Exemplo de uso

- Note que só criamos 2 listas, **v** a ser ordenada e **aux** do mesmo tamanho de **v**.
- Somente estas duas listas existirão durante todas as chamadas recursivas.

```
def main():
    v = [12, 90, 47, -9, 78, 45, 78, 3323, 1, 2, 34, 20]
    aux = [0 for i in range(12)]    #tem o mesmo tamanho de v
    print(v)
    mergeSort(v, 0, 11, aux)
    print(v)
```

Exercícios

1. Mostre passo a passo a execução da função merge considerando dois sub-vetores: $(3, 5, 7, 10, 11, 12)$ e $(4, 6, 8, 9, 11, 13, 14)$.
2. Faça uma execução Passo-a-Passo do Merge-Sort para o vetor: $(30, 45, 21, 20, 6, 715, 100, 65, 33)$.
3. Reescreva o algoritmo Merge-Sort para que este passe a ordenar um vetor em ordem decrescente.
4. Considere o seguinte problema: Temos como entrada um vetor de inteiros v (não necessariamente ordenado), e um inteiro x. Desenvolva um algoritmo que determina se há dois números em v cuja soma seja x. Tente fazer o algoritmo o mais eficiente possível. Utilize um dos algoritmos de ordenação na sua solução.