MC102 – Aula 26
Recursão

Instituto de Computação – Unicamp

17 de Novembro de 2016

Roteiro

Recursão – Indução

- Devemos criar uma algoritmo para resolver um determinado problema.
- Usando o método de recursão/indução, a solução de um problema pode ser expressa da seguinte forma:
  - Primeiramente, definimos a solução para casos básicos;
  - Em seguida, definimos como resolver o problema para um caso geral, utilizando-se de soluções para instâncias menores do problema.

Recursão – Indução

- Devemos criar uma algoritmo para resolver um determinado problema.
- Usando o método de recursão/indução, a solução de um problema pode ser expressa da seguinte forma:
  - Primeiramente, definimos a solução para casos básicos;
  - Em seguida, definimos como resolver o problema para um caso geral, utilizando-se de soluções para instâncias menores do problema.

Recursão – Indução

- Devemos criar uma algoritmo para resolver um determinado problema.
- Usando o método de recursão/indução, a solução de um problema pode ser expressa da seguinte forma:
  - Primeiramente, definimos a solução para casos básicos;
  - Em seguida, definimos como resolver o problema para um caso geral, utilizando-se de soluções para instâncias menores do problema.

Indução

- **Indução:** Técnica de demonstração matemática onde algum parâmetro da proposição a ser demonstrada envolve números naturais.
- Seja T uma proposição que desejamos provar como verdadeira para todos valores naturais n.
- Ao invés de provar diretamente que T é válida para todos os valores de n, basta provar as duas condições 1 e 3 a seguir:
  1. **Passo base:** PROVAR que T é válido para $n = 1$.
  2. **Hipótese de Indução:** Assumimos que T é válido para $n - 1$.
  3. **Passo de Indução:** Sabendo que T é válido para $n - 1$ devemos PROVAR que T é válido para n.

Indução

- **Indução:** Técnica de demonstração matemática onde algum parâmetro da proposição a ser demonstrada envolve números naturais.
- Seja T uma proposição que desejamos provar como verdadeira para todos valores naturais n.
- Ao invés de provar diretamente que T é válida para todos os valores de n, basta provar as duas condições 1 e 3 a seguir:
  1. **Passo base:** PROVAR que T é válido para $n = 1$.
  2. **Hipótese de Indução:** Assumimos que T é válido para $n - 1$.
  3. **Passo de Indução:** Sabendo que T é válido para $n - 1$ devemos PROVAR que T é válido para n.

Indução

- **Indução:** Técnica de demonstração matemática onde algum parâmetro da proposição a ser demonstrada envolve números naturais.
- Seja T uma proposição que desejamos provar como verdadeira para todos valores naturais n.
- Ao invés de provar diretamente que T é válida para todos os valores de n, basta provar as duas condições 1 e 3 a seguir:

  1. **Passo base:** PROVAR que T é válido para $n = 1$.
  2. **Hipótese de Indução:** Assumimos que T é válido para $n - 1$.
  3. **Passo de Indução:** Sabendo que T é válido para $n - 1$ devemos PROVAR que T é válido para n.

Indução

- **Indução:** Técnica de demonstração matemática onde algum parâmetro da proposição a ser demonstrada envolve números naturais.
- Seja T uma proposição que desejamos provar como verdadeira para todos valores naturais n.
- Ao invés de provar diretamente que T é válida para todos os valores de n, basta provar as duas condições 1 e 3 a seguir:
  1. **Passo base:** PROVAR que T é válido para $n = 1$.
  2. **Hipótese de Indução:** Assumimos que T é válido para $n - 1$.
  3. **Passo de Indução:** Sabendo que T é válido para $n - 1$ devemos PROVAR que T é válido para n.

Indução

- **Indução:** Técnica de demonstração matemática onde algum parâmetro da proposição a ser demonstrada envolve números naturais.
- Seja T uma proposição que desejamos provar como verdadeira para todos valores naturais n.
- Ao invés de provar diretamente que T é válida para todos os valores de n, basta provar as duas condições 1 e 3 a seguir:
  1. **Passo base:** PROVAR que T é válido para $n = 1$.
  2. **Hipótese de Indução:** Assumimos que T é válido para $n - 1$.
  3. **Passo de Indução:** Sabendo que T é válido para $n - 1$ devemos PROVAR que T é válido para n.

Indução

- **Indução:** Técnica de demonstração matemática onde algum parâmetro da proposição a ser demonstrada envolve números naturais.
- Seja T uma proposição que desejamos provar como verdadeira para todos valores naturais n.
- Ao invés de provar diretamente que T é válida para todos os valores de n, basta provar as duas condições 1 e 3 a seguir:
  1. **Passo base:** PROVAR que T é válido para $n = 1$.
  2. **Hipótese de Indução:** Assumimos que T é válido para $n - 1$.
  3. **Passo de Indução:** Sabendo que T é válido para $n - 1$ devemos PROVAR que T é válido para n.

Indução

- Por que a indução funciona? Por que as duas condições são suficientes?
  - Mostramos que T é valida para um caso base, como $n = 1$.
  - Com o passo da indução, automaticamente mostramos que T é válida para $n = 2$.
  - Como T é válida para $n = 2$, pelo passo de indução, T também é válida para $n = 3$, e assim por diante.

Exemplo

Teorema

A soma $S(n)$ dos primeiros n números naturais é $n(n+1)/2$

Prova.

Base: Para $n = 1$ devemos mostrar que $n(n+1)/2 = 1$. Isto é verdade:

$$1(1+1)/2 = 1.$$

Hip. de Indução: Vamos assumir que é válido para $(n-1)$, ou seja, $S(n-1) = (n-1)((n-1)+1)/2$.

Passo: Devemos mostrar que é válido para n, ou seja, devemos mostrar que $S(n) = n(n+1)/2$. Por definição, $S(n) = S(n-1) + n$ e por hipótese $S(n-1) = (n-1)((n-1)+1)/2$, logo

$$\begin{aligned} S(n) &= S(n-1) + n \\ &= (n-1)((n-1)+1)/2 + n \\ &= n(n-1)/2 + 2n/2 \\ &= n(n+1)/2 \end{aligned}$$

Exemplo

Teorema

A soma $S(n)$ dos primeiros n números naturais é $n(n+1)/2$

Prova.

Base: Para $n = 1$ devemos mostrar que $n(n+1)/2 = 1$. Isto é verdade:

$$1(1+1)/2 = 1.$$

Hip. de Indução: Vamos assumir que é válido para $(n-1)$, ou seja, $S(n-1) = (n-1)((n-1)+1)/2$.

Passo: Devemos mostrar que é válido para n, ou seja, devemos mostrar que $S(n) = n(n+1)/2$. Por definição, $S(n) = S(n-1) + n$ e por hipótese $S(n-1) = (n-1)((n-1)+1)/2$, logo

$$\begin{aligned} S(n) &= S(n-1) + n \\ &= (n-1)((n-1)+1)/2 + n \\ &= n(n-1)/2 + 2n/2 \\ &= n(n+1)/2 \end{aligned}$$

Exemplo

Teorema

A soma $S(n)$ dos primeiros n números naturais é $n(n+1)/2$

Prova.

Base: Para $n = 1$ devemos mostrar que $n(n+1)/2 = 1$. Isto é verdade:

$$1(1+1)/2 = 1.$$

Hip. de Indução: Vamos assumir que é válido para $(n-1)$, ou seja, $S(n-1) = (n-1)((n-1)+1)/2$.

Passo: Devemos mostrar que é válido para n, ou seja, devemos mostrar que $S(n) = n(n+1)/2$. Por definição, $S(n) = S(n-1) + n$ e por hipótese $S(n-1) = (n-1)((n-1)+1)/2$, logo

$$\begin{aligned} S(n) &= S(n-1) + n \\ &= (n-1)((n-1)+1)/2 + n \\ &= n(n-1)/2 + 2n/2 \\ &= n(n+1)/2 \end{aligned}$$

Recursão

- Definições recursivas de funções funcionam como o *princípio matemático da indução* que vimos anteriormente.
- A idéia é que a solução de um problema pode ser expressa da seguinte forma:
  - Definimos a solução para casos básicos;
  - Definimos como resolver o problema geral utilizando soluções do mesmo problema só que para casos menores.

Fatorial

Problema: Calcular o fatorial de um número ($n!$).
Qual o caso base e o passo da indução?

- Se n é igual a 1, então o fatorial é 1.

Qual seria o passo indutivo?

- Temos que expressar a solução para $n > 1$, supondo que já sabemos a solução para algum caso mais simples.
- $n! = n * (n-1)!$.

Este caso é trivial pois a própria definição do fatorial é recursiva.

Fatorial

Problema: Calcular o fatorial de um número ($n!$).
Qual o caso base e o passo da indução?

- Se n é igual a 1, então o fatorial é 1.

Qual seria o passo indutivo?

- Temos que expressar a solução para $n > 1$, supondo que já sabemos a solução para algum caso mais simples.
- $n! = n * (n-1)!$.

Este caso é trivial pois a própria definição do fatorial é recursiva.

Fatorial

Problema: Calcular o fatorial de um número ($n!$).
Qual o caso base e o passo da indução?

- Se n é igual a 1, então o fatorial é 1.

Qual seria o passo indutivo?

- Temos que expressar a solução para $n > 1$, supondo que já sabemos a solução para algum caso mais simples.
- $n! = n * (n-1)!$.

Este caso é trivial pois a própria definição do fatorial é recursiva.

Fatorial

Portanto, a solução do problema **pode ser expressa de forma recursiva** como:

- Se $n = 1$ então $n! = 1$.
- Se $n > 1$ então $n! = n * (n - 1)!$.

Note como aplicamos o princípio da indução:

- Sabemos a solução para um caso base: $n = 1$.
- Definimos a solução do problema geral $n!$ em termos do mesmo problema só que para um caso menor ($(n - 1)!$).

Fatorial em Python

```
def fatorial(n):
  if(n <= 1):
    return 1
  else:
    x = n-1
    r = fatorial(x) #sabendo o fatorial de n-1
    return (n*r)   #calculamos o fatorial de n
```

Fatorial

- Para solucionar o problema, é feita uma chamada para a própria função, por isso, esta função é chamada *recursiva*.
- Recursividade geralmente permite uma descrição mais clara e concisa dos algoritmos, especialmente quando o problema é recursivo por natureza.

Fatorial

- Para solucionar o problema, é feita uma chamada para a própria função, por isso, esta função é chamada *recursiva*.
- Recursividade geralmente permite uma descrição mais clara e concisa dos algoritmos, especialmente quando o problema é recursivo por natureza.

O que acontece na memória

- Precisamos entender como é feito o controle sobre as variáveis locais em chamadas recursivas.
- A memória de um sistema computacional é dividida em alguns segmentos:
  - **Espaço Estático**: Contém as variáveis globais e código do programa.
  - **Heap:** Para alocação dinâmica de memória.
  - **Pilha:** Para execução de funções.

O que acontece na memória

O que acontece na pilha:

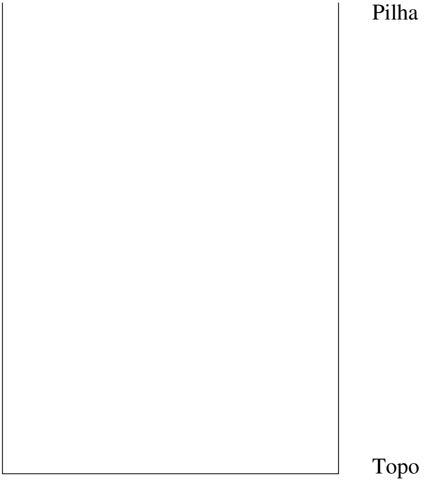
- Toda vez que uma função é invocada, suas variáveis locais são armazenadas no topo da pilha.
- Quando uma função termina a sua execução, suas variáveis locais são removidas da pilha.

Considere o exemplo:

```
def f1(a,  b):
    c=5
    return (c+a+b)

def f2(a, b):
    c = f1(b, a)
    return c

def main():
  f2(2, 3)

main()
```

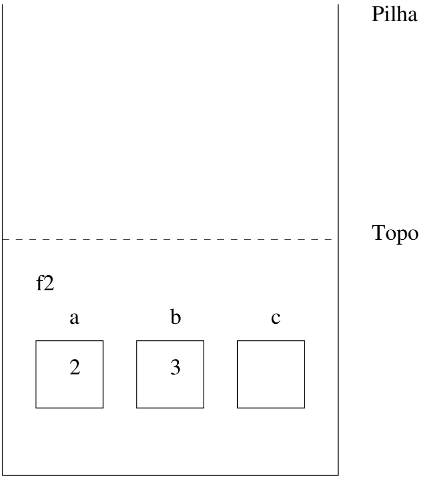
O que acontece na memória

Inicialmente a pilha está vazia.



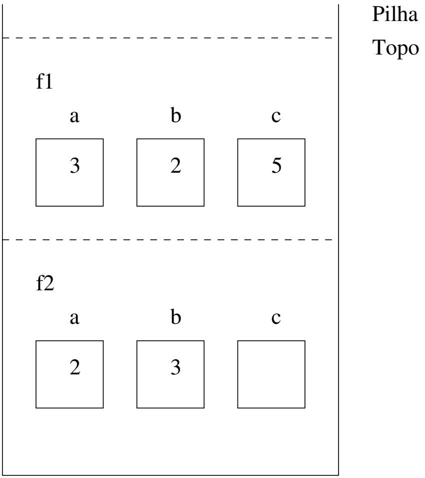
O que acontece na memória

Quando **f2(2,3)** é invocada, suas variáveis locais são alocadas no topo da pilha.



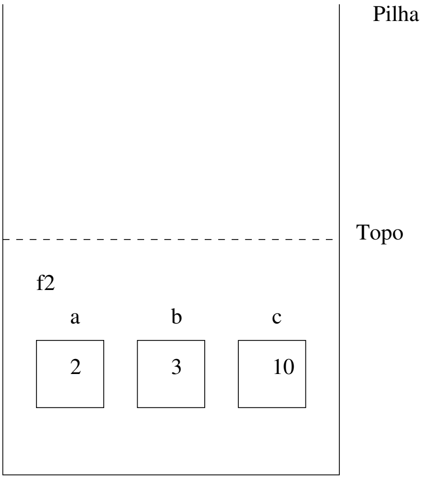
O que acontece na memória

A função **f2** invoca a função **f1(b,a)** e as variáveis locais desta são alocadas no topo da pilha sobre as de **f2**.



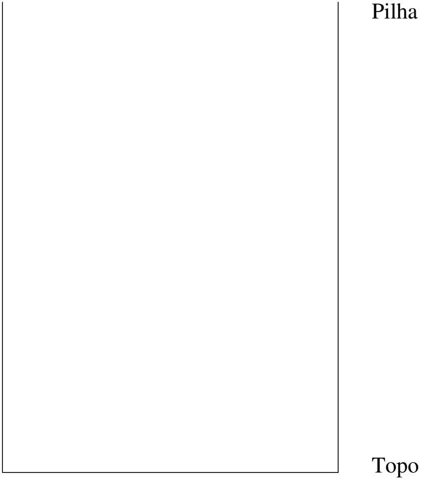
O que acontece na memória

A função **f1** termina, devolvendo 10. As variáveis locais de **f1** são removidas da pilha.



O que acontece na memória

Finalmente **f2** termina a sua execução devolvendo 10. Suas variáveis locais são removidas da pilha.



O que acontece na memória

No caso de chamadas recursivas para uma mesma função, é como se cada chamada correspondesse a uma função distinta.

- As execuções das chamadas de funções recursivas são feitas na pilha, assim como qualquer função.
- O último conjunto de variáveis alocadas na pilha, que está no topo, corresponde às variáveis da última chamada da função.
- Quando termina a execução de uma chamada da função, as variáveis locais desta são removidas da pilha.

Usando recursão em programação

Considere novamente a solução recursiva para se calcular o fatorial e assuma que seja feito a chamada **fatorial(4)**.

```
def fatorial(n):
  if(n <= 1):
    return 1
  else:
    x = n-1
    r = fatorial(x) #sabendo o fatorial de n-1
    return (n*r)   #calculamos o fatorial de n
```

O que acontece na memória

- Cada chamada da função *fatorial* cria novas variáveis locais de mesmo nome (n, x, r) .
- Portanto, várias variáveis n, x e r podem existir em um dado momento.
- Em um dado instante, o nome n (ou x ou r) refere-se à variável local ao corpo da função que está sendo executada naquele instante.

O que acontece na memória

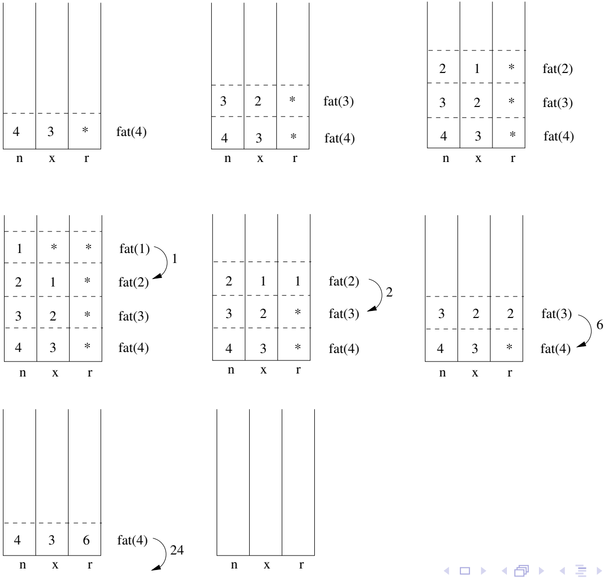
- Cada chamada da função *fatorial* cria novas variáveis locais de mesmo nome (n, x, r) .
- Portanto, várias variáveis n, x e r podem existir em um dado momento.
- Em um dado instante, o nome n (ou x ou r) refere-se à variável local ao corpo da função que está sendo executada naquele instante.

O que acontece na memória

- Cada chamada da função *fatorial* cria novas variáveis locais de mesmo nome (n, x, r) .
- Portanto, várias variáveis n, x e r podem existir em um dado momento.
- Em um dado instante, o nome n (ou x ou r) refere-se à variável local ao corpo da função que está sendo executada naquele instante.

O que acontece na memória

Estado da Pilha de execução para *fatorial(4)*.



O que acontece na memória

- É claro que as variáveis x e r são desnecessárias.

```
def fatorial2(n):
  if(n <= 1):  #Caso base
    return 1
  else:  #Passo: sabendo fat. de n-1 calculamos fat. de n
    return n * fatorial2(n-1)
```

Recursão × Iteração

- Soluções recursivas são geralmente mais concisas que as iterativas.
- Soluções iterativas em geral têm a memória limitada enquanto as recursivas, não.
- Cópia dos parâmetros a cada chamada recursiva é um custo adicional para as soluções recursivas.

Recursão × Iteração

Neste caso, uma solução iterativa é mais eficiente. Por quê?

```
def fatorial3(n):
  r = 1
  for i in range(1, n+1):
    r = r * i
  return r
```

Exemplo: Soma de elementos de uma Lista

- Dado uma lista v de inteiros, devemos calcular a soma dos seus elementos da posição 0 até $tam - 1$ onde tam é o número de elementos da lista.
- Como podemos descrever este problema de forma recursiva? Isto é, como podemos descrever este problema em função de si mesmo?
- Vamos denotar por $S(n)$ a soma dos elementos das posições 0 até $tam - 1$ da lista, e portanto devemos achar $S(tam - 1)$.
- O valor de $S(n)$ pode ser calculado com a seguinte definição recursiva:
  - Se $n = 0$ então a soma $S(0)$ é igual a $v[0]$.
  - Se $n > 0$ então a soma $S(n)$ é igual a $v[n] + S(n - 1)$.

Exemplo: Soma de elementos de uma Lista

- Dado uma lista v de inteiros, devemos calcular a soma dos seus elementos da posição 0 até $tam - 1$ onde tam é o número de elementos da lista.
- Como podemos descrever este problema de forma recursiva? Isto é, como podemos descrever este problema em função de si mesmo?
- Vamos denotar por $S(n)$ a soma dos elementos das posições 0 até $tam - 1$ da lista, e portanto devemos achar $S(tam - 1)$.
- O valor de $S(n)$ pode ser calculado com a seguinte definição recursiva:
  - Se $n = 0$ então a soma $S(0)$ é igual a $v[0]$.
  - Se $n > 0$ então a soma $S(n)$ é igual a $v[n] + S(n - 1)$.

Exemplo: Soma de elementos de uma Lista

- Dado uma lista v de inteiros, devemos calcular a soma dos seus elementos da posição 0 até $tam - 1$ onde tam é o número de elementos da lista.
- Como podemos descrever este problema de forma recursiva? Isto é, como podemos descrever este problema em função de si mesmo?
- Vamos denotar por $S(n)$ a soma dos elementos das posições 0 até $tam - 1$ da lista, e portanto devemos achar $S(tam - 1)$.
- O valor de $S(n)$ pode ser calculado com a seguinte definição recursiva:
  - Se $n = 0$ então a soma $S(0)$ é igual a $v[0]$.
  - Se $n > 0$ então a soma $S(n)$ é igual a $v[n] + S(n - 1)$.

Algoritmo em Python

```python
def soma(v, n):
  if(n == 0):
    return v[0]
  else:
    return v[n] + soma(v, n-1)
```

Algoritmo em Python

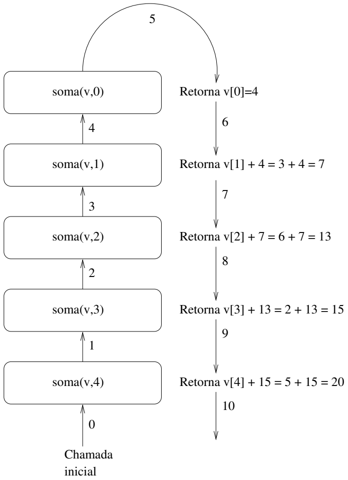
Exemplo de uso:

```
def main():
  vet = [1,2,3,4,5]
  print("A soma dos elementos de vet e: %d" %soma(vet, len(vet)-1))


def soma(v, n):
  if(n == 0):
    return v[0]
  else:
    return v[n] + soma(v, n-1)

main()
```

- Note que na chamada da função o segundo parâmetro é exatamente o índice da última posição do vetor ($tam - 1$).

Exemplo de execução

$V = (4, 3, 6, 2, 5)$



Soma do vetor recursivo

- O método recursivo sempre termina:
  - Existência de um caso base.
  - A cada chamada recursiva do método temos um valor menor de n.

Algoritmo em Python

Neste caso, a solução iterativa também seria melhor (não há criação de variáveis das chamadas recursivas):

```
def soma2(v, n):
  soma = 0
  for i in range(0, n+1):
    soma = soma + v[i]
  return soma
```

Recursão com várias chamadas

- Não há necessidade da função recursiva ter apenas uma chamada para si própria.
- A função pode fazer várias chamadas para si própria.
- A função pode ainda fazer chamadas recursivas indiretas. Neste caso a função 1, por exemplo, chama uma outra função 2 que por sua vez chama a função 1.

Fibonacci

- A série de fibonacci é a seguinte:
  - $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$.
- Queremos determinar qual é o n-ésimo número da série que denotaremos por fibo(n).
- Como descrever o n-ésimo número de fibonacci de forma recursiva?

Fibonacci

- No caso base temos:
  - Se $n = 1$ ou $n = 2$ então $\text{fibo}(n) = 1$.
- Sabendo casos anteriores podemos computar $\text{fibo}(n)$ como:
  - $\text{fibo}(n) = \text{fibo}(n-1) + \text{fibo}(n-2)$.

Algoritmo em Python

A definição anterior é traduzida diretamente em um algoritmo em Python:

```
def fibo(n):
  if(n <= 2):
    return 1
  else:
    return (fibo(n-1) + fibo(n-2))
```

Algoritmo em Python

Exemplo de uso.

```
def main():
  for i in range(1,8):
    print("O %d-esimo numero de fibonacci e: %d" %(i, fibo(i)))

def fibo(n):
  if(n <= 2):
    return 1
  else:
    return (fibo(n-1) + fibo(n-2))

main()
```

Relembrando

- Recursão é uma técnica para se criar algoritmos onde:
  1. Devemos descrever soluções para casos básicos.
  2. Assumindo a existência de soluções para casos menores, mostramos como obter a solução para o caso maior.
- Algoritmos recursivos geralmente são mais claros e concisos.
- Implementador deve avaliar clareza de código $\times$ eficiência do algoritmo.

Exercício

Mostre a execução da função recursiva **imprime** abaixo:
O que será impresso?

```
def imprime(v,i,n):
   if i==n:
     print(v[i],end=" ")
   else:
     imprime(v,i+1,n)
     print(v[i],end=" ")

vet = [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]
imprime(vet, 0, 9)
print()
```

Exercício

- Mostre o estado da pilha de memória durante a execução da função **fibo** com a chamada **fib(5)**.
- Qual versão é mais eficiente para se calcular o *n*-ésimo número de fibonacci? A recursiva ou iterativa?