Tópicos em Computação Gráfica

Notas de Aula - Fascículo 03
Transformações projetivas do plano

Jorge Stolfi

Sumário

1 Transformações projetivas do plano

Dentre todas as funções que levam pontos de $\mathbb{T}^2$ para pontos de $\mathbb{T}^2$, existe uma classe importante, as *transformações projetivas*, ou *projetividades*, que se caracterizam por preservar as relações de colinearidade; isto é, se três pontos estão alinhados, suas imagens pela função também estão alinhadas, e vice-versa.

Ex. 1.1: Mostre que a função $F(p) = \neg p$, que leva cada ponto para seu antípoda, é uma projetividade de $\mathbb{T}^2$.

O conceito de projetividade engloba muitas transformações geométricas importantes, como as translações, rotações, e mudanças de escala, que estudaremos a seguir.

1.1 Caracterização algébrica

Pode-se provar que toda projetividade de $\mathbb{T}^2$ corresponde a uma transformação linear inversível das coordenadas homogêneas. Isto é, para toda projetividade F de $\mathbb{T}^2$ existe uma matriz real

$$\mathsf{F} = \begin{bmatrix} \mathsf{F}_{ww} & \mathsf{F}_{wx} & \mathsf{F}_{wy} \\ \mathsf{F}_{xw} & \mathsf{F}_{xx} & \mathsf{F}_{xy} \\ \mathsf{F}_{yw} & \mathsf{F}_{yx} & \mathsf{F}_{yy} \end{bmatrix}$$

com dimensão 3×3 e determinante não nulo, tal que,para todo ponto $p = [w, x, y]$,

$$\begin{aligned} F(P) &= [w, x, y]\,\mathsf{F} \\ &= \begin{array}{ll} [& w\mathsf{F}_{ww} + x\mathsf{F}_{xw} + y\mathsf{F}_{yw} \\ & w\mathsf{F}_{wx} + x\mathsf{F}_{xx} + y\mathsf{F}_{yx} \\ & w\mathsf{F}_{wy} + x\mathsf{F}_{xy} + y\mathsf{F}_{yy} \quad] \end{array} \end{aligned} \tag{1}$$

Note que, para fins desta fórmula, a tripla $[w, x, y]$ deve ser considerada um vetor linha, isto é, uma matriz 1×3. Note também que, se aplicarmos a fórmula (1) a duas triplas homogêneas equivalentes (que diferem apenas por um fator de escala $\alpha > 0$), obteremos duas triplas equivalentes. Ou seja, a imagem de um ponto não depende da escolha de suas coordenadas.

A recíproca também é verdadeira: toda matriz 3×3 F, com determinante não nulo, define pela fórmula (1) uma projetividade de $\mathbb{T}^2$. Este fato é fácil de provar, usando o teste de colinearidade Δ, e o fato de que o determinante de um produto de matrizes é o produto dos seus determinantes. Veja o exercício 1.2.

Ex. 1.2: Seja F uma matriz 3×3. Prove que a função F de $\mathbb{T}^2$ para $\mathbb{T}^2$ definida pela fórmula (1) satisfaz

$$\Delta(F(p_0), F(p_1), F(p_2)) = \Delta(p_0, p_1, p_2) \cdot \operatorname{sgn} |\mathsf{F}|$$

O exercício 1.2 revela que as transformações projetivas de $\mathbb{T}^2$ se dividem em duas classes, as *positivas* e as *negativas*, confome o sinal do determinante de sua matriz; sendo que uma projetividade positiva preserva a orientação de quaisquer três pontos, enquanto que uma projetividade negativa inverte a orientação de quaisquer três pontos.

O exercício 1.2 também explica porque o determinante da matriz F deve ser diferente de zero: pois, caso contrário, a função levaria três pontos não colineares ($\Delta \neq 0$) para três pontos colineares ($\Delta = 0$). Pode-se provar também que, nesse caso, a função F levaria algum ponto válido de $\mathbb{T}^2$ para a tripla inválida $[0, 0, 0]$.

É fácil ver que multiplicar todos os elementos da matriz F por um mesmo número $\alpha \neq 0$ equivale a multiplicar por α as coordenadas homogêneas do produto $p\mathsf{F}$, para qualquer tripla homogênea p. Ou seja, esta operação não altera a projetividade F definida pela matriz. Pode-se provar que a recíproca também vale; ou seja, que duas matrizes F' e F'' determinam a mesma projetividade se e somente se $\mathsf{F}' = \alpha\mathsf{F}''$ para algum $\alpha \neq 0$.

Ex. 1.3: Seja F a projetividade de $\mathbb{T}^2$ que leva cada ponto para seu antípoda; ou seja, tal que $F(p) = \neg p$ para todo p. (a) Encontre a matriz F desta projetividade. (b) Esta projetividade é positiva ou negativa?

Antes de estudar as propriedades gerais das projetividades, vamos conhecer alguns casos particulares, que são bastante importantes na prática.

1.2 Transformações importantes

1.2.1 Translações

Na geometria cartesiana, para deslocar uma figura no plano basta somar às coordenadas de cada um de seus pontos um mesmo vetor (X_0, Y_0). Isto é, basta aplicar a cada ponto da figura a função

$$(X, Y) \mapsto (X + X_0, Y + Y_0) = (X, Y) + (X_0, Y_0)$$

Esta operação mantém a forma e a orientação da figura, mudando apenas sua posição. Verifica-se que ela também preserva todas as distâncias, direções, e ângulos entre os pontos da figura.

Uma função desta forma é chamada de *translação* do plano $\mathbb{R}^2$ pelo vetor (X_0, Y_0). Note que (X_0, Y_0) é também a imagem da origem $(0, 0)$.

Em termos de coordenadas homogêneas, a translação que leva a origem $[1, 0, 0]$ para o ponto $[w_0, x_0, y_0]$ (necessariamente finito) é dada pela fórmula

$$[w, x, y] \mapsto [\ ww_0,\ \ xw_0 + wx_0,\ \ yw_0 + wy_0\ ]$$

Note que as coordenadas do resultado são combinações lineares das coordenadas do argumento. Podemos portanto escrever a função acima como um produto da tripla homogênea $[w, x, y]$ (vista agora como um vetor linha do $\mathbb{R}^3$) por uma matriz 3×3:

$$[w, x, y] \mapsto [w, x, y] \begin{bmatrix} w_0 & x_0 & y_0 \\ 0 & w_0 & 0 \\ 0 & 0 & w_0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Ex. 1.4: Escreva a matriz da translação que desloca uma figura qualquer por 2 unidades na direção X e 5 unidades na direção Y.

Ex. 1.5: Escreva a matriz da translação que desloca o ponto (X_0, Y_0) para o ponto (X_1, Y_1).

Note que a translação geral (2) leva o ponto no infinito $p = [0, x, y]$ para $[0, xw_0, yw_0] = [0, x, y] = p$. Ou seja, qualquer translação mantém os pontos no infinito fixos, eportanto mantém a reta Ω fixa

1.2.2 Rotações

Na geometria cartesiana, para rodar uma figura plana em torno da origem $(0, 0)$, por um ângulo θ em sentido anti-horário, basta aplicar a cada um de seus pontos a função

$$\begin{aligned}(X, Y) &\mapsto (X\cos\theta - Y\sin\theta, X\sin\theta + Y\cos\theta)\\ &= (X, Y)\begin{pmatrix} +\cos\theta & -\sin\theta \\ +\sin\theta & +\cos\theta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Em termos de coordenadas homogêneas, esta função é

$$[w, x, y] \mapsto [w, x, y]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & +\cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & +\sin\theta & +\cos\theta \end{bmatrix} \tag{3}$$

Ex. 1.6: Escreva as matrizes de rotação para os ângulos $45°$, $60°$, $90°$, $180°$, e $-90°$.

Ex. 1.7: Determine a matriz de rotação que transforma o eixo X na reta pela origem paralela ao vetor (X, Y).

Como é sabido, a rotação de uma figura preserva todos os ângulos e distâncias entre os pontos da mesma.

1.2.3 Mudanças de escala

Para ampliar ou reduzir uma figura, mantendo-se sua orientação, basta multiplicar cada coordenada cartesiana de cada ponto por um fator de escala conveniente; ou seja, aplicar a cada ponto a *transformação de escala*

$$(X, Y) \mapsto (\alpha X, \beta Y) \tag{4}$$

O par de fatores de escala (α, β) pode ser entendido como sendo a imagem do ponto cartesiano $(1, 1)$. Note que esta transformação mantém fixa a origem $(0, 0)$. Em coordenadas homogêneas, ela é dada por

$$[w, x, y] \mapsto [w, x, y]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} \tag{5}$$

Se o fator de escala é o mesmo para as duas coordenadas, a ampliação ou redução é dita *uniforme*, e preserva todos os ângulos e direções entre os pontos do plano. Caso contrário, apenas as direções horizontais e verticais são preservadas.

Ex. 1.8: Escreva a matriz de mudança de escala que leva o ponto (X_0, Y_0) para o ponto (X_1, Y_1) (suponha que nenhum desses números é zero.)

1.2.4 Reflexões

De modo geral, a *reflexão* do plano R^2 relativa a uma reta R troca cada ponto p do plano com o ponto p' que está á mesma distância de R mas no outro lado dela, e tal que o segmento de reta pp' é perpendicular a L. Uma reflexão preserva distâncias entre pontos da figura, e inverte o sentido dos ângulos, preservando seu valor absoluto.

Em coordenadas cartesianas, se a reta L é o eixo Y, a refexão consiste em negar a coordenada X,mantendo a coordenada Y fixa:

$$(X, Y) \mapsto (-X, Y)$$

Em termos de coordenadas homogêneas, essa reflexão nega a coordenada x, mantendo as demais. Ela pode ser expressa portanto pela matriz

$$[w, x, y] \mapsto [w, x, y] \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Note que esta reflexão é um caso particular de transformação de escala, com fatores $(-1, 1)$. A reflexão em torno do eixo Y é análoga.

Ex. 1.9: Mostre que a função $F(p) = \neg p$, que leva cada ponto para seu antípoda, é uma projetividade negativa de $\mathbb{T}^2$.

1.2.5 Cisalhamentos

A transformação

$$(X, Y) \mapsto (X + \alpha Y, Y)$$

é chamada de *cisalhamento horizontal*: Esta transformação preserva a coordenada Y de todos os pontos, e desloca a coordenada X por uma distância proporcional à coordenada Y. (Assim, ela poderia ser usada para converter letras “romanas” em “itálicas”.) Em particular, o ponto $(0, 1)$ é levado para $(\alpha, 1)$. A forma homogênea desta transformação é

$$[w, x, y] \mapsto [w, x, y] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

As transformações de *cisalhamento vertical* são definidas de modo análogo. Cisalhamentos não preservam nem distâncias nem ngulos, exceto diferenças de coordenada Y e distâncias entre pontos com mesma coordenada Y. No entanto, eles preservam a área de qualquer figura, e o paralelismo (ou não) entre quaiquer duas retas.

1.3 Composição de projetividades

Se F e G são duas funções de $\mathbb{T}^2$ para $\mathbb{T}^2$, como as descritas acima, a *composição de F com G* é a função H tal que $H(p) = \mapsto G(F(p))$, para todo ponto p de $\mathbb{T}^2$. Ou seja, aplicar H a um ponto equivale aplicar F e G em seqüência, nesta ordem, a cada ponto.

A composição H acima é geralmente denotada por $G \circ F$. Observe que, tanto nesta notação quanto na fórmula $G(F(p))$, a ordem em que as funções são escritas é oposta à ordem em que elas são aplicadas. Para evitar este inconveniente, adotaremos neste curso a *notação funcional posfixa*, usada por muitos algebristas. Nessa notação, o resultado de uma função F aplicada a um argumento x será denotado por xF, em vez de $F(x)$; e a composição de duas funções F e G, aplicadas nessa ordem, será denotada por FG, em vez de $G \circ F$. Portanto, em lugar de $F(G(x))$ escreveremos xFG, que pode ser lido tanto $(xF)G$ quanto $x(FG)$.

É fácil ver que, se F e G são duas transformações projetivas, a matriz da composição FG é o produto FG das matrizes correspondentes, nessa ordem. A imagem $pFG = G(F(p))$ de um ponto p de $\mathbb{T}^2$ pode portanto ser calculada pelo produto $p\mathsf{FG}$ do vetor 1×3 e duas matrizes 3×3; que pode ser calculada na ordem $(p\mathsf{F})\mathsf{G}$ ou $p(\mathsf{FG})$, com o mesmo resultado.

Ex. 1.10: Seja R a rotação por 90° em torno da origem, e T a translação pelo vetor $(2, 3)$. Calcule as matrizes para as transformações $A = TR$ e $B = RT$. Explique (geometricamente) o efeito de A e B, e a diferença entre as duas.

Ex. 1.11: Sejam F e G duas transformações projetivas de $\mathbb{T}^2$, e p um ponto de $\mathbb{T}^2$. (a) Conte o número de operações aritméticas necessárias para calcular a imagem $pFG = G(F(p))$ pela fórmula $(p\mathsf{F})\mathsf{G}$ e pela fórmula $p(\mathsf{FG})$. (b) suponha que queremos calcular a imagem $G(F(p))$ para n pontos p distintos, mas com as mesmas transformações F e G. Dependendo do valor de n, qual das duas fórmulas é mais eficiente?

Cada uma das classes de transformações da seção 1.2 fechada em relação à composição de funções. Isto é, a aplicação de duas translações seguidas equivale a uma única translação; duas rotações em torno da origem equivalem a uma rotação; dois cisalhamentos horizontais equivalem a um único cisalhamento horizontal; e assim por diante. Na verdade, dentro de cada classe a composição é comutativa: $FG = GF$.

Entretanto, se F e G são transformações de classes diferentes, a composição FG pode não pode pertencer a nenhuma das classes acima, e nem sempre é comutativa.

Ex. 1.12: Seja F uma rotação de 45 graus em torno da origem, e G é uma ampliação não-uniforme. Descreva os efeitos das composições FG e GF aplicadas ao quadrado $[-1, +1] \times [-1, +1]$ de $\mathbb{R}^2$.

1.4 Transformação inversa

Toda projetividade é obrigatoriamente uma bijeção de $\mathbb{T}^2$ para $\mathbb{T}^2$, e portanto ela admite uma função inversa F^{-1}, também de $\mathbb{T}^2$ para $\mathbb{T}^2$, tal que FF^{-1} e $F^{-1}F$ são a função identidade de $\mathbb{T}^2$. Além disso, pela definição de projetividade, a função F^{-1} também deve preservar a colinearidade de pontos. Ou seja, inf F também é uma projetividade.

Pode-se verificar que uma das classes de transformações da seção 1.2 acima é fechada sob inversão; por exemplo, a inversa da translação por (X_0, Y_0) é a translação por $(-X_0, -Y_0)$, a inversa da rotação por θ é a rotação por $-\theta$, e assim por diante.

É óbvio que a matriz da inversa de F é a inversa da matriz de F.

Ex. 1.13: Para cada uma das transformações elementares vistas acima (translações, rotações, reflexões, mudanças de escala, e cisalhamento), dê a matriz homogênea da transformação inversa.

É fácil ver também que a inversa da composição FG de duas funções é a composição das funções inversas, na ordem inversa — isto é, $G^{-1}F^{-1}$.

Composição e inversão são ferramentas extremamente úteis quando queremos construir projetividades mais complexas que as descritas acima. Por exemplo, para construir a matriz que roda o plano de 30° em torno do ponto $(3, 5)$, basta calcular o produto das matrizes $\mathsf{T}^{-1}\mathsf{R}\mathsf{T}$, onde T é a translação por $(3, 5)$, e R é a rotação de 30° em torno da origem.

Ex. 1.14: Para cada uma das transformações abaixo, diga como obtê-la através da composição de projetividades simples (translações, rotações em torno da origem, mudanças de escala, reflexões nos eixos, e cisalhamentos horizontais e verticais):

(a) Reflexão em torno da reta vertical de abscissa X.

(b) Reflexão em torno da reta paralela ao vetor (X_d, Y_d) passando pela origem.

(c) Reflexão em torno da reta paralela ao vetor (X_d, Y_d) passando pelo ponto (X_p, Y_p)

(d) Mudança de eixos e escalas que leva o retângulo cartesiano $[2 \_ 4] \times [3 \times 5]$ para o retângulo $[-1 \_ +1] \times [0 \_ 1]$.

1.5 Efeito de projetividades em retas

Seja F uma projetividade de $\mathbb{T}^2$ e r uma reta. Por definição, a imagem de r por F é a única reta $F(r)$ tal que

$$r \diamond p = F(r) \diamond F(p)$$

para todo ponto p. Note, em particular, que p está em r se e somente se $F(p)$ está em $F(r)$.

Esta definição permite aplicar a dualidade à definição de trnasformação projetiva. Ou seja, podemos definir uma projetividade como sendo uma função das retas de $\mathbb{T}^2$ para as retas de $\mathbb{T}^2$ que preserva a concorrência de retas: isto é, se três retas possuem um ponto em comum, então suas imagens também possuem, e vice versa.

Os coeficientes da reta $F(r)$ podem ser obtidos multiplicando-se a *inversa* da matriz de F pelos coeficientes de r, que devem ser considerados como um vetor coluna (isto é, uma matriz 3×1). Ou seja,

$$F(\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle) = \mathsf{F}^{-1} \left\langle \begin{array}{c} \mathcal{W} \\ \mathcal{X} \\ \mathcal{Y} \end{array} \right\rangle \tag{8}$$

Ex. 1.15: Determine a imagem do ponto $[1, 1, 1]$ e da reta $\langle 1, 1, 1\rangle$ sob uma translação pelo vetor $(2, 3)$.

Ex. 1.16: Determine a imagem da origem $[1, 0, 0]$ e da linha no infinito $\Omega = \langle 1, 0, 0\rangle$ sob a transformação projetiva plana

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(Dica: considere os pontos em que Ω corta os eixos X e Y.)

Ex. 1.17: Determine a fórmula para a imagem de uma linha genérica $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}\rangle$ por uma transformação projetiva genérica F com matriz

$$\mathsf{F} = \begin{bmatrix} \mathsf{F}_{ww} & \mathsf{F}_{wx} & \mathsf{F}_{wy} \\ \mathsf{F}_{xw} & \mathsf{F}_{xx} & \mathsf{F}_{xy} \\ \mathsf{F}_{yw} & \mathsf{F}_{yx} & \mathsf{F}_{yy} \end{bmatrix}$$

A resposta deve ser uma fórmula sem divisões.

1.6 Subgrupos de projetividades

As transformações projetivas de $\mathbb{T}^2$ formam aquilo que em matemática se chama de *grupo*: um conjunto de objetos (as projetividades) com uma operação binária associativa (composição) que possui um elemento neutro (a função identidade do $\mathbb{T}^2$) e tal que cada elemento tem um elemento inverso (a transformação inversa). Em linguagem matemática, esse grupo é isomorfo ao quociente $\mathcal{P}/\equiv$, onde $\mathcal{P}$ é o grupo formado pelas matrizes 3×3 não singulares, com a operação de produto de matrizes; e $\equiv$ é a relação de equivalência $\mathsf{F} \equiv \mathsf{F}' \leftrightarrow (\exists\alpha > 0)\mathsf{F}' = \alpha\mathsf{F}$.

Cmo vimos, cada uma das classes de transformações da seção 1.2 é fechada sob composição e sob inversão. Portnato, cada uma dessas classes constitui um *subgrupo* do grupo das transformações projetivas: um subconjunto de um grupo que é fechado pelas operações do grupo. Há infinitos subgrupos do grupo de projetividades, incluindo subgrupos infinitos e incontáveis (como o conjunto de todas as translações) subgrupos infinitos mas contáveis (como o conjunto das translações com deslocamentos inteiros) e subgrupos finitos (como as rotações por $2\pi/n$ radianos, n inteiro).

Compondo trasformações de classes diferentes podemos obter outros subgrupos interessantes. Por exemplo, combinando rotações, translações, e reflexões, de todas as maneiras possíveis, obtemos as chamadas *isometrias*, ou *movimentos rígidos* do plano, que são justamente todas as funções de $\mathbb{T}^2$ em $\mathbb{T}^2$ que preservam as distâncias e ngulos entre os pontos. Se juntarmos a essas as transformações uniformes de escala, obtemos as *transformações euclidianas*, ou *similaridades*, que preservam apenas os ângulos e as razões entre distâncias. Por outro lado, se combinarmos as isometrias com os cisalhamentos horizontais e verticais, obtemos as *transformações unitárias*, que preservam áreas e o paralelismo entre retas.

Note que a composição de projetividades nem sempre é comutativa nestes subgrupos maiores. Por exemplo, se F é uma translação por um vetor não nulo, e G é uma rotação por um ângulo que não é múltiplo de 2π, as transformações FG e GF serão diferentes. Para verificar este fato, basta considerar o efeito das duas composições sobre a origem $(0, 0)$.

Ex. 1.18: Mostre que uma transformação é de similaridade se e somente se sua matriz tem a forma

$$\begin{bmatrix} 1 & x_d & y_d \\ 0 & +a & +b \\ 0 & -b & +a \end{bmatrix}$$

onde a e b são números reais, não ambos nulos, e x_d, y_d são números reais quaisquer. Qual o significado geométrico desses parâmetros?

Ex. 1.19: Seja $\mathcal{G}$ o conjunto de todas as translações de $\mathbb{T}^2$ que levam a origem $[1, 0, 0]$ para algum ponto $[1, x, y]$ com coordenadas x e y inteiras. Mostre que $\mathcal{G}$ é um subgrupo das transformações projetivas de $\mathbb{T}^2$ (ou seja, que ele fechado sob composição e inversão).

Ex. 1.20: Seja θ um ângulo qualquer, e $\mathcal{H}_\theta$ o conjunto de todas as rotações de $\mathbb{T}^2$ cujo ângulo de rotação (em radianos) é um múltiplo inteiro de θ. (a) Mostre que $\mathcal{H}_\theta$ é um subgrupo das transformações projetivas de $\mathbb{T}^2$. (b) Mostre que $\mathcal{H}_\theta$ é um conjunto finito sempre que θ é um múltiplo racional de 2π (ou seja, $\theta/(2\pi) = m/n$ onde m e n são inteiros, com n diferente de zero). (c) Mostre que quando $\theta/(2\pi)$ é irracional, $\mathcal{H}_\theta$ é infinito, mas ainda assim é um subconjunto *próprio* do conjunto de todas as rotações de de $\mathbb{T}^2$.

Ex. 1.21: Encontre um subgrupo finito de projetividades de $\mathbb{T}^2$ que não seja formado por rotações, reflexões, e passagem para os antípodas.

1.7 Transformações afins

Todas as transformações vistas nas seção 1.2 mantém a reta Ω fixa (como conjunto, não necessariamente ponto-a-ponto); ou seja, levam pontos finitos para pontos finitos, e pontos infinitos para pontos infinito. Além disso, elas mantém o sinal da coordenada w, e portanto nunca levam pontos do aquém para o além, ou vice-versa. As transformações projetivas com essa propriedade formam um subgrupo importante, as *transformações afins* do plano. Elas são na verdade o menor subgrupo que contém todas as operações vistas acima.

Como uma transformação afim leva pontos do aquém para pontos do aquém, ela também é uma transformação do $\mathbb{R}^2$ para o $\mathbb{R}^2$, e portanto pode ser definida na geometria euclidiana (ou cartesiana). Aliás, as transformações afins são justamente as únicas projetividades que podem ser estudadas na geometria euclidiana, sem sair dos limites do $\mathbb{R}^2$.

Em coordenadas cartesianas, a forma geral de uma transformação afim do $\mathbb{R}^2$ é

$$\begin{aligned} (X, Y) &\mapsto (aX + bY + e, cX + dY + f) \\ &= (X, Y)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (e, f) \end{aligned}$$

onde $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ é uma matriz real não singular, e (e, f) um vetor real. A versão homogênea é

$$[w, x, y] \mapsto [w, x, y] \begin{bmatrix} 1 & e & f \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{bmatrix} \tag{9}$$

onde a, b, c, d, e, f são números reais com a mesma condição acima, isto é, que $ad - bf$ seja diferente de zero.

É fácil verificar que as transformações afins são fechadas sob composição e inversão. Uma vez que duas retas finitas são paralelas se e somente se elas encontram num ponto infinito, concluimos que que toda transformação afim preserva o paralelismo entre retas.

Ex. 1.22: Na geometria cartesiana, pode-se provar que a área de um triângulo de $\mathbb{R}^2$ cujos vértices são os pontos $p_1 = (X_1, Y_1)$, $p_2 = (X_2, Y_2)$, e $p_3 = (X_3, Y_3)$ é

$$A(p_1, p_2, p_3) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & X_1 & Y_1 \\ 1 & X_2 & Y_2 \\ 1 & X_3 & Y_3 \end{vmatrix} \tag{10}$$

exceto que o sinal de $A(p_1, p_2, p_3)$ é positivo ou negativo, conforme a orientação dos três pontos. Encontre uma fórmula para $A(p_1, p_2, p_3)$ em termos das coordenadas *homogêneas* $[w_i, x_i, y_i]$ dos três pontos, com apenas uma operação de divisão.

Ex. 1.23: Seja F a transformação afim genérica da equação (10). Mostre que, para quaisquer pontos p_1, p_2, p_3, a área do triângulo $F(p_1)F(p_2)F(p_3)$ é sempre K vezes a área do triângulo $p_1p_2p_3$, onde $K = ad - bc$.

Ex. 1.24: Seja $\mathcal{H}$ o conjunto de todas as transformações projetivas de $\mathbb{T}^2$ (não apenas translações) que preservam a área de qualquer figura e levam qualquer ponto $[1, x, y]$ com coordenadas x e y inteiras para outro ponto $[1, x', y']$ com coordenadas x' e y' também inteiras. (a) Mostre que este conjunto é um subgrupo das transformações projetivas de $\mathbb{T}^2$. (b) Encontre uma transformação neste subgrupo que seja uma isometria mas não seja uma translação. (c) Encontre uma transformação neste subgrupo que não seja

1.8 Construindo transformações afins.

Existe uma única transformação afim do plano que leva os três pontos $(0, 0)$, $(1, 0)$, e $(0, 1)$ para três pontos dados (finitos e não colineares) $p_0 = (X_0, Y_0)$, $p_1 = (X_1, Y_1)$, $p_2 = (X_2, Y_2)$. A matriz homogênea dessa transformação é

$$A_{p_0p_1p_2} \;\equiv\; [w, x, y] \mapsto [w, x, y] \begin{bmatrix} 1 & X_0 & Y_0 \\ 0 & X_1 - X_0 & Y_1 - Y_0 \\ 0 & X_2 - X_0 & Y_2 - Y_0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Esta matriz é uma transformação projetiva válida contanto que o determinante

$$\begin{vmatrix} X_1 - X_0 & Y_1 - Y_0 \\ X_2 - X_0 & Y_2 - Y_0 \end{vmatrix} \tag{12}$$

seja diferente de zero. Pode-se verificar que esta condição é violada se, e somente se, os três pontos dados são colineares — caso em que não existe projetividade de $\mathbb{T}^2$ com a propriedade desejada.

Segue daí que, dados quaisquer dois triângulos abc e pqr (finitos, e nenhum deles contido em uma reta), existe uma única transformação afim do plano que leva $a \mapsto p$, $b \mapsto q$, e $c \mapsto r$. Essa transformação é simplesmente a composição ${A_{abc}}^{-1} A_{pqr}$.

Ex. 1.25: Determine a matriz da transformação afim que leva os pontos

$$[1, 2, 3],\ [1, 4, 0],\ [1, 0, 4]$$

para

$$[1, 2, 0], [1, -1, 1], [1, -1, -1]$$

1.9 Transformações projetivas gerais

A transformações afins são um subconjunto próprio das projetividades de $\mathbb{T}^2$. Em geral, projetividade pode levar pontos finitos para o infinito, e vice-versa. Considere por exemplo a transformação

$$[w, x, y] \mapsto [w, x, y] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x, w, y]$$

que mantém o "pólo norte" $[0, 0, 1]$ fixo, e troca a origem $[1, 0, 0]$ com o "pólo leste" $[0, 1, 0]$. Esta projetividade troca o eixo Y com a reta no infinito Ω; portanto, ela transforma retas horizontais em retas que passam pela origem, e vice-versa. Em termos de coordenadas cartesianas, esta transformação é

$$(X, Y) \mapsto (1/X, Y/X)$$

Note que esta fórmula é indefinida quando $X = 0$; e, reciprocamente, não existe nenhum ponto do $\mathbb{R}^2$ cuja imagem tenha $X = 0$. Como este exemplo mostra, transformações projetivas não-afins — que levam pontos finitos para o infinito, ou vice-versa — só podem ser estudadas convenientemente no plano projetivo $\mathbb{T}^2$, em termos de coordenadas homogêneas.

Observe que as linhas da matriz de uma transformação projetiva F são as imagens dos pontos $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$, e $[0, 0, 1]$ por F. A soma das linhas é a imagem do ponto $[1, 1, 1]$.

Ex. 1.26: Determine a matriz 4×4 da transformação projetiva que mantém fixos os pontos $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$ e $[0, 0, 1]$ e move o ponto $[1, 1, 1]$ para $[2, 3, 6]$. (Lembre-se de que o mesmo ponto pode ter infinitas triplas homogêneas diferentes.)