

# Tópicos em Computação Gráfica

## Notas de Aula - Fascículo 02

### Dualidade e Geometria Projetiva Tridimensional

Jorge Stolfi

© 2009 Jorge Stolfi - Universidade Estadual de Campinas.

*É permitida a reprodução ou divulgação, total ou parcial, sem fins comerciais, para uso pessoal ou por entidades governamentais, desde que o texto não seja alterado, e que esta nota de autoria e copyright seja reproduzida na íntegra.*

## Sumário

<b>1</b>	<b>Dualidade</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Geometria projetiva tridimensional</b>	<b>3</b>
2.1	O espaço projetivo tridimensional . . . . .	3
2.2	Pontos . . . . .	4
2.3	O modelo esférico de $\mathbb{T}^3$ . . . . .	6
2.4	Planos . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Orientação de pontos no espaço</b>	<b>10</b>
3.1	Teste de coplanaridade . . . . .	10
3.2	Orientação de quatro pontos . . . . .	10
3.3	Orientação de quatro planos . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Operações geométricas no espaço</b>	<b>12</b>
4.1	Plano por três pontos . . . . .	12
4.2	Encontro de três planos . . . . .	13

# 1 Dualidade

Leitores atentos provavelmente notaram a semelhança entre as fórmulas da reta que passa por dois pontos e do ponto de intersecção de duas retas.

Esta semelhança é uma manifestação de um princípio muito importante, a *dualidade* entre pontos e retas do plano projetivo. Considere a função que ao ponto  $p = [w, x, y]$  associa a reta  $p^* = \langle w, x, y \rangle$ ; e à reta  $r = \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$  associa o ponto  $r^* = [\mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ .

É fácil ver que um ponto  $p$  está numa reta  $r$  se e somente se a reta  $p^*$  passa pelo ponto  $r^*$ ; e, na verdade,

$$r \diamond p = p^* \diamond r^*$$

Com um pouco mais de trabalho, pode-se concluir que

$$(p_0 \vee p_1)^* = (p_0)^* \wedge (p_1)^*$$

para quaisquer dois pontos  $p_0, p_1$ . Como  $(p^*)^* = p$ , temos também

$$(m_1 \wedge m_2)^* = (m_1)^* \vee (m_2)^*$$

para quaisquer duas linhas  $m_1, m_2$ .

A função ‘\*’ é a *dualidade canônica* de  $\mathbb{T}^2$ . Ela nos permite traduzir mecânicamente muitas fórmulas geométricas que envolvem pontos em outras fórmulas que envolvem linhas, e vice-versa. O mesmo vale para teoremas, algoritmos, e estruturas de dados. Com isto, o custo de desenvolvimento e programação de algoritmos geométricos fica substancialmente reduzido, quase que pela metade. Nos capítulos seguintes veremos alguns exemplos desta economia.

**Ex. 1.1:** Qual é o dual canônico dos seguintes objetos e conceitos:

- (a) Um ponto do aquíem.
- (b) Um ponto no infinito.
- (c) O antípoda de um ponto.
- (d) A origem do aquíem.
- (e) O eixo  $X$ .
- (f) O segmento  $p_0p_1$ .
- (g) Distância de um ponto  $p$  à origem.

## 2 Geometria projetiva tridimensional

### 2.1 O espaço projetivo tridimensional

A idéia de coordenadas homogêneas pode ser estendida para o espaço tridimensional (e, na verdade,  $n$ -dimensional) sem maiores problemas.

Essa extensão é importante, pois muitos problemas de geometria computacional, especialmente em computação gráfica, envolvem objetos tridimensionais. Entretanto, como este livro trata principalmente de problemas geométricos no plano, mencionaremos aqui apenas as idéias essenciais dessa extensão. Acreditamos que o leitor poderá facilmente preencher os detalhes que faltam.

## 2.2 Pontos

Os conceitos de geometria projetiva orientada e coordenadas homogêneas podem ser facilmente generalizados para três (ou  $n$ ) dimensões. Assim, em substituição ao espaço euclidiano clássico  $\mathbb{R}^3$ , temos o *espaço projetivo de dois lados*  $\mathbb{T}^3$ .

Os *pontos de*  $\mathbb{T}^3$  são todas as quádruplas  $[w, x, y, z]$  de números reais, exceto  $[0, 0, 0, 0]$ ; sendo que duas quádruplas  $[w', x', y', z']$  e  $[w'', x'', y'', z'']$  são o mesmo ponto se e somente se existe um real  $\alpha \neq 0$  tal que  $w' = \alpha w''$ ,  $x' = \alpha x''$ ,  $y' = \alpha y''$ , e  $z' = \alpha z''$ .

Os pontos  $[w, x, y, z]$  e  $\neg[w, x, y, z] = [-w, -x, -y, -z]$  são *antípodas* um do outro.

**Interpretação “chata” do  $\mathbb{T}^3$**  Assim como no caso bidimensional, podemos interpretar o espaço  $\mathbb{T}^3$  como sendo formado por três partes: o *aquém*, o *além*, e os *pontos no infinito*. O *aquém* e o *além* são duas cópias do  $\mathbb{R}^3$ , com origens e eixos coincidentes. Se  $w > 0$ , a quádrupla  $[w, x, y, z]$  denota o ponto de coordenadas cartesianas  $(x/w, y/w, z/w)$  do *aquém*; se  $w < 0$ , ela denota o mesmo ponto no *além*.

Reciprocamente, para toda tripla cartesiana  $(X, Y, Z)$  em  $\mathbb{R}^3$  existem dois pontos coincidentes mas distintos de  $\mathbb{T}^3$ : um ponto “vivo” no *aquém*, com coordenadas homogêneas  $[1, X, Y, Z]$  (ou  $[w, wX, wY, wZ]$  para qualquer  $w > 0$ ); e seu “fantasma”  $[-1, -X, -Y, -Z]$  no *além* (ou  $[-w, -wX, -wY, -wZ]$  para qualquer  $w > 0$ ). Esses dois pontos são *antípodas* entre si.

Por exemplo, a quádrupla homogênea  $[4, 2, 3, 1]$  representa o ponto cujas coordenadas cartesianas são  $(2/4, 3/4, 1/4)$ . As coordenadas homogêneas da origem  $(0, 0, 0)$  são  $[1, 0, 0, 0]$ .

Os pontos no infinito, que tem  $w = 0$ , formam uma cópia da esfera  $\mathbb{S}^2$ , conceitualmente com raio infinito, análoga à “esfera celeste” dos astrônomos. Essa esfera de certa forma “fecha” tanto o *aquém* quanto o *além*. Uma quádrupla  $[w, x, y, z]$  com  $w = 0$  representa por definição um ponto nessa esfera na direção do vetor cartesiano  $(x, y, z)$ . Ele pode ser interpretado como o ponto infinitamente distante, na direção do vetor  $(x, y, z)$ , visto de qualquer ponto do *aquém*. por definição, esse mesmo ponto, visto de qualquer lugar do *além*, está no infinito mas na direção oposta  $(-x, -y, -z)$ . Veja a figura 1. Note que *antípoda* desse ponto, pelo contrário, está na direção  $(-x, -y, -z)$  visto do *aquém*, e  $(x, y, z)$  visto do *além*.

Por exemplo, o ponto  $[0, 1, 1, 0]$  é o ponto no infinito na direção do vetor cartesiano  $(1, 1, 0)$ , ou  $(-1, -1, 0)$ , isto é, do bissetor dos eixos  $X$  e  $Y$ . Os pontos  $[0, 1, 0, 0]$ ,  $[0, 0, 1, 0]$ , e  $[0, 0, 0, 1]$  são os pontos no infinito nas direções dos eixos  $X$ ,  $Y$ , e  $Z$ , respectivamente.

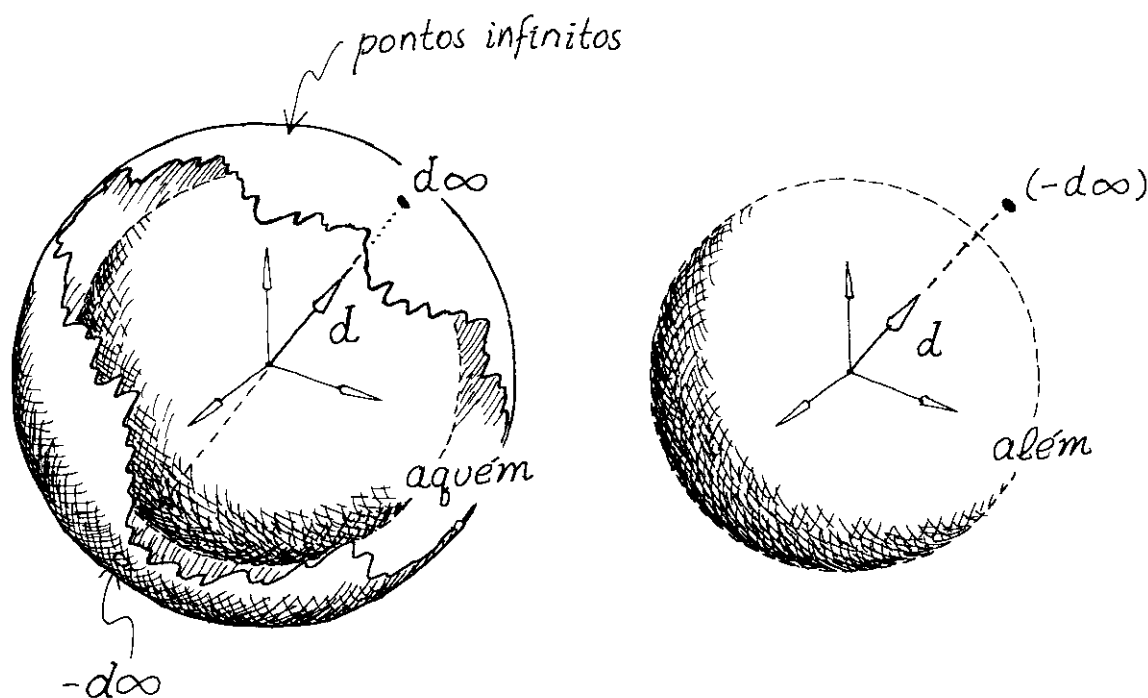


Figura 1: O espaço projetivo orientado.

Podemos pensar no aquém e no além como dois “universos paralelos” superpostos mas infinitamente distantes entre si. Mais precisamente, qualquer trajetória contínua que começa no aquém termina no além deve necessariamente passar por um ou mais pontos no infinito.

Note que a quádrupla  $[0, 0, 0, 0]$  não tem interpretação no modelo chato, pois o vetor  $(0, 0, 0)$  não tem direção definida. Mas, por definição, esta quádrupla é inválida — não é um ponto de  $\mathbb{T}^3$ .

Como veremos a seguir, a maioria dos conceitos de geometria projetiva e das fórmulas homogêneas que conhecemos para o plano  $\mathbb{T}^2$  pode ser estendida para o espaço tridimensional  $\mathbb{T}^3$  (e, na verdade,  $n$ -dimensional) de maneira quase que automática.

**Ex. 2.1:** Dê a interetação dos seguintes pontos no modelo “chato”:

- |                    |                    |                    |
|--------------------|--------------------|--------------------|
| (a) $[1, 0, 0, 0]$ | (b) $[1, 1, 0, 0]$ | (c) $[1, 0, 1, 0]$ |
| (d) $[1, 2, 3, 4]$ | (e) $[2, 5, 6, 8]$ | (f) $[2, 0, 0, 0]$ |

**Ex. 2.2:** Determine as coordenadas homogêneas dos seguintes pontos no modelo “chato”:

- |                          |  |
|--------------------------|--|
| (a) $(0, 0, 0)$ do além  | (b) $(1, 0, 0)$ do além                          |
| (c) $(0, 1, 0)$ do aquém | (d) $(5, 6, 2)$ do além                          |
| (e)                      | infinito na direção $(1, 2, 3)$ , visto do aquém |
| (f)                      | infinito na direção $(1, 2, 3)$ , visto do além  |

**Ex. 2.3:** Dê as coordenadas homogêneas dos pontos infinitos que, vistos do aquém, têm as direções dos três eixos cartesianos  $(X, Y, Z)$ .

**Ex. 2.4:** Escreva o ponto  $(1/2, 3/5, 1/6)$  em coordenadas homogêneas *inteiras*.

**Ex. 2.5:** Escreva as coordenadas homogêneas do ponto infinito cuja direção (em relação à origem do aquém) faz ângulos  $\theta_x, \theta_y, \theta_z$  com os eixos cartesianos. (Estes são chamados de *ângulos de Euler* do vetor.)

**Ex. 2.6:** Se  $v$  é um vetor de  $\mathbb{R}^3$ , sua *elevação* é o ângulo entre  $v$  e o plano  $Z = 0$ ; e seu *azimute* é o ângulo entre o eixo cartesiano  $X$  e a projeção ortogonal de  $v$  nesse plano. Escreva as coordenadas homogêneas do ponto infinito cuja direção tem azimute  $\theta$  e elevação  $\phi$ .

**Ex. 2.7:** Escreva as coordenadas homogêneas do ponto do aquém que, em relação à origem, está a distância  $r$ , azimute  $\theta$ , e elevação  $\phi$ .

**Ex. 2.8:** (a) Descreva a trajetória do ponto  $p(t) = [1, t, t^2, t^3]$  quando o parâmetro  $t$  varia de  $-\infty$  a  $+\infty$ . (b) Que ponto de  $\mathbb{T}^3$  pode ser considerado o limite de  $p(t)$  quando  $t$  tende para  $+\infty$ ? E quando  $t$  tende para  $-\infty$ ?

## 2.3 O modelo esférico de $\mathbb{T}^3$

Assim como o espaço  $\mathbb{T}^2$  pode ser modelado pela esfera bidimensional unitária  $\mathbb{S}^2$ , o espaço  $\mathbb{T}^3$  também tem seu *modelo esférico*, constituído pela esfera tridimensional unitária de  $\mathbb{R}^4$ ,

$$\mathbb{S}^3 = \{ (w, x, y, z) : w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$$

sendo que o ponto  $[w, x, y, z]$  de  $\mathbb{T}^3$  corresponde ao ponto

$$\frac{(w, x, y, z)}{\sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}}$$

de  $\mathbb{S}^3$ . Infelizmente, a esfera  $\mathbb{S}^3$  não é um objeto fácil de visualizar, e portanto este modelo não é tão útil quanto o modelo esférico de  $\mathbb{T}^2$ . Sem falar que a correspondência geométrica entre os modelos esférico e plano de  $\mathbb{T}^3$  é dada por projeção central a partir da origem do  $\mathbb{R}^4$ , em uma cópia do  $\mathbb{R}^3$  tangente à esfera  $\mathbb{S}^3$ .

Quem consegue enxergar este modelo provavelmente não precisa dele...

## 2.4 Planos

Um *plano (orientado)* de  $\mathbb{T}^3$  é uma quádrupla de *coeficientes homogêneos* reais,  $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \rangle$ , exceto  $\langle 0, 0, 0, 0 \rangle$ ; sendo que, por definição, duas quádruplas  $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \rangle$  e  $\langle \mathcal{W}', \mathcal{X}', \mathcal{Y}', \mathcal{Z}' \rangle$  são o mesmo plano se, e somente se, uma é um múltiplo positivo da outra; isto é, se e somente se existe um real  $\alpha > 0$  tal que  $\mathcal{W}' = \alpha \mathcal{W}$ ,  $\mathcal{X}' = \alpha \mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}' = \alpha \mathcal{Y}$  e  $\mathcal{Z}' = \alpha \mathcal{Z}$ .

Por definição, a *posição* de um ponto qualquer  $p = [w, x, y, z]$  em relação a um plano  $L = \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \rangle$  é o sinal

$$p \diamond L = L \diamond p = \text{sgn}(\mathcal{W}w + \mathcal{X}x + \mathcal{Y}y + \mathcal{Z}z)$$

Em particular, dizemos que  $p$  está *no* plano  $L$  se, e somente se,  $p \diamond L = 0$ , isto é, se

$$\mathcal{W}w + \mathcal{X}x + \mathcal{Y}y + \mathcal{Z}z = 0$$

Os pontos de  $\mathbb{T}^3$  que estão fora do plano  $L$  são divididos pelo mesmo em dois conjuntos separados, o *lado positivo* e o *lado negativo* do plano, que podem ser distinguidos pelo sinal da fórmula acima. Observe que o sinal da fórmula acima não se altera se multiplicarmos todos os coeficientes de  $L$  pelo mesmo real  $\alpha > 0$ . Portanto, estes dois lados são propriedades bem definidas do plano em si, e não dependem da escolha particular de coeficientes para o mesmo.

Os planos  $L = \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \rangle$  e  $M = \langle -\mathcal{W}, -\mathcal{X}, -\mathcal{Y}, -\mathcal{Z} \rangle$  são *coincidentes* (passam pelos mesmos pontos) mas são distintos pois o lado positivo de  $L$  é o lado negativo de  $M$ , e vice-versa. Dizemos que esses planos têm *orientações opostas* ou que um é o *oposto* um do outro, e denotamos isso por  $M = \neg L$ ,  $L = \neg M$ .

**Interpretação no modelo “chato”.** Se pelo menos um dos coeficientes  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$  é diferente de zero, o plano  $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \rangle$  contém o plano cartesiano cuja equação é  $\mathcal{X}X + \mathcal{Y}Y + \mathcal{Z}Z + \mathcal{W} = 0$ , acrescido dos pontos no infinito em todas as direções paralelas a este último.

Por exemplo, o plano  $\langle 2, 3, 4, 5 \rangle$  inclui o plano cartesiano com equação  $3X + 4Y + 5Z + 2 = 0$ , e mais inúmeros pontos no infinito, como  $[0, 4, -3, 0]$  e  $[0, 0, -5, 4]$ . As quádruplas de coeficientes  $\langle 0, 1, 0, 0 \rangle$ ,  $\langle 0, 0, 1, 0 \rangle$ , e  $\langle 0, 0, 0, 1 \rangle$  definem os planos  $YZ$ ,  $XZ$ , e  $XY$  (isto é,  $X = 0$ ,  $Y = 0$ , e  $Z = 0$ ), respectivamente.

Além desses *planos ordinários*, existe um *plano no infinito*  $\Omega_2 = \langle 1, 0, 0, 0 \rangle$  (ou  $\langle \mathcal{W}, 0, 0, 0 \rangle$ , para qualquer  $\mathcal{W} \neq 0$ ). É fácil verificar que este plano contém todos os pontos no infinito de  $\mathbb{T}^3$ , e nenhum ponto finito.

A quádrupla de coeficientes  $\langle 0, 0, 0, 0 \rangle$ , que não é um plano de  $\mathbb{T}^3$ , não tem nenhuma interpretação no modelo chato.

**Ex. 2.9:** Qual é a equação cartesiana do plano com coeficientes homogêneos  $\langle 2, 3, 5, 7 \rangle$ ?

**Ex. 2.10:** Quais são os coeficientes homogêneos do plano cuja equação cartesiana é  $3X - 2Y + 5Z = 6$ ?

**Ex. 2.11:** Quais são os coeficientes homogêneos dos planos cartesianos principais ( $XY$ ,  $XZ$ , e  $YZ$ )?

**Ex. 2.12:** (a) Determine as coordenadas homogêneas dos pontos onde o plano  $\langle 2, 3, 5, 7 \rangle$  cruza os eixos cartesianos  $X$ ,  $Y$ , e  $Z$ . (b) Resolva este mesmo problema para um plano genérico  $L = \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \rangle$ . O que acontece com esses pontos se o plano  $L$  é paralelo a algum dos eixos? E se ele contém algum eixo?

**Ex. 2.13:** Determine as condições algébricas sobre os coeficientes  $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \rangle$  que caracterizam:

- (a) planos perpendiculares ao eixo cartesiano  $Z$ ;
- (b) planos paralelos ao eixo  $Z$ ;
- (c) planos que contém o eixo  $Z$ ;
- (d) planos que passam pela origem do aquém.

**Ex. 2.14:** Calcule o valor das fórmulas abaixo:

- (a)  $\langle 2, 3, 5, 6 \rangle \diamond [1, 1, -1, 0]$
- (b)  $\langle 2, 3, 5, 6 \rangle \diamond [1, 1, 0, 0]$
- (c)  $\langle 2, 3, 5, 6 \rangle \diamond [1, 1, 1, 1]$
- (d)  $\langle 1, 0, 0, 0 \rangle \diamond [1, 0, 0, 0]$
- (e)  $\langle 1, 0, 0, 0 \rangle \diamond [-1, 0, 0, 0]$
- (f)  $\langle a, b, c, d \rangle \diamond [a, b, c, d]$

**Ex. 2.15:** Qual o significado geométrico da condição  $\mathcal{W} > 0$ , para um plano  $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \rangle$ ?

**Ex. 2.16:** Quais são os lados positivo e negativo de  $\Omega^2$ ?

**Ex. 2.17:** Determine três pontos infinitos, distintos e não antípodos entre si, no plano  $\langle 2, 3, 5, 6 \rangle$ .

**Orientações interna e externa de um plano.** Assim como no caso de retas de  $\mathbb{T}^2$ , a orientação de um plano de  $\mathbb{T}^3$  pode ser entendida de duas maneiras.

A *orientação externa* define qual é o lado positivo do plano. Se o plano é ordinário, ela pode ser visualizada como uma seta perpendicular ao plano que aponta do lado negativo para o lado positivo. No aquém, a orientação externa do plano  $\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \rangle$  é a direção do vetor cartesiano  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ ,

A *orientação interna* de um plano define qual é o sentido positivo de rotação em torno de qualquer ponto do plano. Se o plano é ordinário, ela pode ser visualizada como uma seta circular desenhada sobre o plano, em torno de um ponto qualquer do mesmo.

No aquém, essa seta tem sentido anti-horário quando vista de qualquer ponto no lado positivo. No além, o sentido da seta é oposto ao sentido da seta correspondente no aquém. Como a orientação externa também inverte quando passamos do aquém para o além, as duas setas satisfazem a regra da mão direita, tanto no aquém quanto no além. Veja a figura 2.



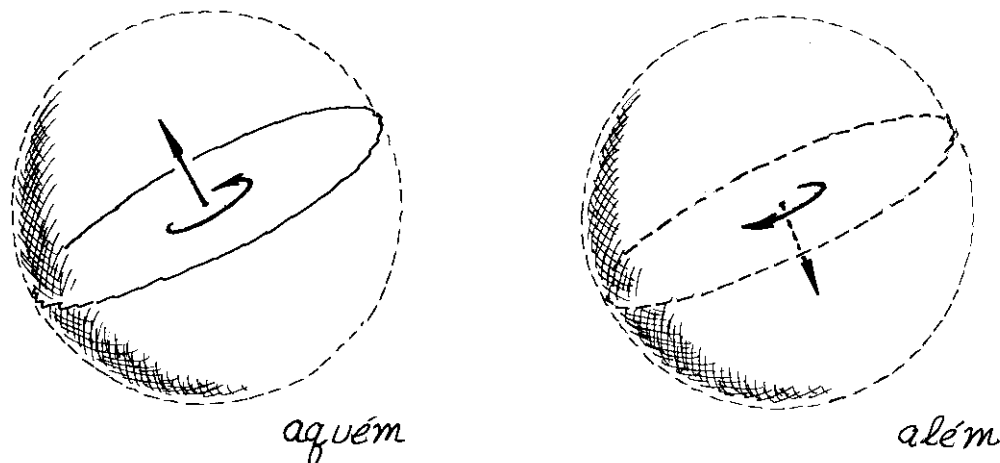


Figura 2: Orientações de um plano, no aquém e no além.

Para transferir este sentido de rotação de um ponto  $p$  para qualquer outro ponto  $q$  do plano, basta deslizar essa seta sobre o plano, de  $p$  para  $q$ , sem nunca virá-la do avesso. Verifica-se que, qualquer que seja a trajetória usada nesse processo, o sentido final da seta será o mesmo.

Note que não é possível atribuir uma orientação externa a um plano do espaço projetivo clássico (não orientado)  $\mathbb{P}^3$ , pois nesse espaço um plano  $L$  não separa os pontos que estão fora dele: todos esses pontos estão no mesmo lado em relação a  $L$ . Tampouco podemos atribuir uma orientação interna consistente a um plano de  $\mathbb{P}^3$ , pois este têm a topologia do plano projetivo não orientado  $\mathbb{P}^2$  — que não é orientável neste sentido. Ou seja, no plano  $\mathbb{P}^2$  o processo acima pode dar orientações diferentes para o ponto  $q$ , dependendo da trajetória usada. Em contraste, os planos de  $\mathbb{T}^3$  tem a topologia de  $\mathbb{T}^2$  — ou seja, da esfera  $\mathbb{S}^2$  — que é orientável.

**Ex. 2.18:** (a) Determine as orientações externa e interna do plano  $L = \langle -4, 3, 2, 1 \rangle$  no ponto  $p = [3, 2, 2, 2]$ . (b) Idem para o ponto  $q = [-3, -2, -2, -2]$ .

**Ex. 2.19:** Desenhe a posição do plano  $\langle 3, 2, 1, 1 \rangle$  em relação aos eixos cartesianos do aquém. Indique a orientação interna e externa do mesmo no aquém.

**Ex. 2.20:** Dê os coeficientes homogêneos dos 6 planos que contém as faces do cubo  $[-1 \text{ -- } +1] \times [-1 \text{ -- } +1] \times [-1 \text{ -- } +1]$  de  $\mathbb{R}^3$ , orientados de forma a deixar o cubo no lado *negativo*. Indique a orientação interna dos mesmos.

**Ex. 2.21:** Determine as coordenadas homogêneas do ponto no infinito que está na direção perpendicular ao plano ordinário  $L = \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \rangle$ , e no lado positivo do mesmo. O que acontece com sua fórmula se o plano  $L$  estiver no infinito?

## 3 Orientação de pontos no espaço

### 3.1 Teste de coplanaridade

Assim como no caso bidimensional, mostra-se que quatro pontos  $p_i = [w_i, x_i, y_i, z_i]$  ( $i = 0 \dots 3$ ) do espaço  $\mathbb{T}^3$  são coplanares — isto, é, pertencem a um mesmo plano — se e somente se

$$\begin{vmatrix} w_0 & x_0 & y_0 & z_0 \\ w_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 & z_2 \\ w_3 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (1)$$

### 3.2 Orientação de quatro pontos

Quando a fórmula (1) não é zero, seu sinal é geometricamente significativo. Dados quatro pontos  $p_0, \dots, p_3$  de  $\mathbb{T}^3$ , definimos a *orientação* dos mesmos (nessa ordem) como sendo

$$\Delta(p_0, p_1, p_2, p_3) = \operatorname{sgn} \begin{vmatrix} w_0 & x_0 & y_0 & z_0 \\ w_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 & z_2 \\ w_3 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (2)$$

Observe que, se multiplicarmos as coordenadas de um dos pontos por um fator  $\alpha > 0$ , o valor numérico do determinante acima fica multiplicado por  $\alpha$ , mas seu sinal não se altera. Portanto a orientação é uma propriedade dos pontos em si, e não depende da escolha de suas coordenadas.

**Ex. 3.1:** Determine a orientação dos quatro pontos

$$p_0 = [1, 0, 0, 0] \quad p_1 = [0, 1, 0, 0] \quad p_2 = [0, 0, 1, 0] \quad p_3 = [0, 0, 0, 1]$$

**Ex. 3.2:** Usando as propriedades de determinantes, prove que a função  $\Delta(p_0, p_1, p_2, p_3)$ , definida pela fórmula (2), é zero se e somente se os quatro pontos pertencem a um mesmo plano.

Intuitivamente, para pontos no aquém, a fórmula (2) diz se a trajetória  $p_0 \rightarrow p_1 \rightarrow p_2 \rightarrow p_3$  é uma hélice “direita” (como a da maioria dos parafusos) ou “esquerda”; isto é, se o triângulo  $p_0 \rightarrow p_1 \rightarrow p_2$  roda no sentido anti-horário quando visto de  $p_3$ . Veja a figura 3. (Esta interpretação supõe que os eixos de  $\mathbb{R}^3$  estão representados na posição costumeira, com o sentido de  $X$  para  $Y$  anti-horário quando visto de  $Z$  positivo.)

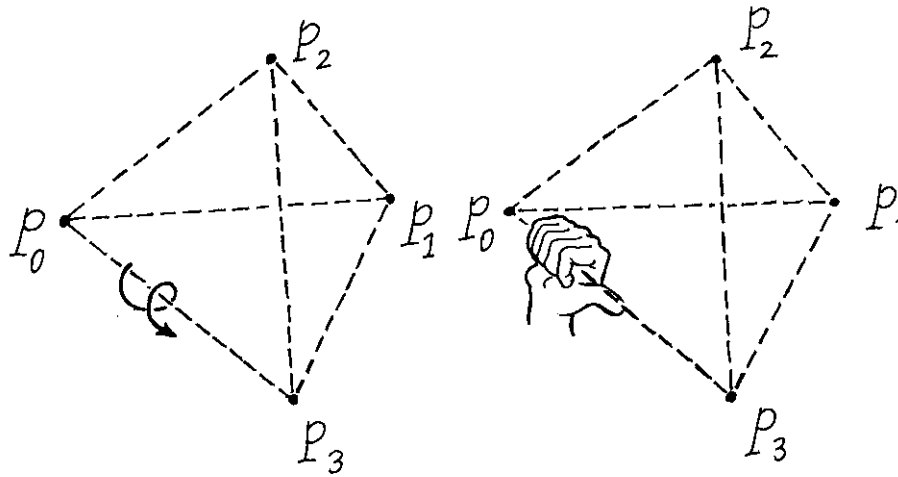


Figura 3: Orientação positiva de quatro pontos no espaço.

**Ex. 3.3:** (a) Mostre que a orientação de quatro pontos no espaço se inverte se trocarmos quaisquer dois pontos entre si. Assim, por exemplo,

$$\Delta(p_0, p_1, p_2, p_3) = -\Delta(p_0, p_3, p_2, p_1)$$

(b) Usando o resultado do item (a), mostre que uma permutação circular dos quatro pontos também inverte sua orientação; isto é,

$$\Delta(p_0, p_1, p_2, p_3) = -\Delta(p_3, p_0, p_1, p_2)$$

**Ex. 3.4:** O que acontece com o valor de  $\Delta(p_0, p_1, p_2, p_3)$  se trocarmos um dos pontos pelo seu antípoda? E se trocarmos todos os quatro pontos pelos seus antípodas? E se invertermos o sinal de apenas uma coordenda homogênea, nos quatro pontos?

### 3.3 Orientação de quatro planos

Dualmente, dados quatro planos  $L_i = \langle \mathcal{W}_i, \mathcal{X}_i, \mathcal{Y}_i, \mathcal{Z}_i \rangle$  ( $i = 0 \dots 3$ ), a condição para que eles sejam concorrentes — tenham um ponto em comum — é

$$\begin{vmatrix} \mathcal{W}_0 & \mathcal{X}_0 & \mathcal{Y}_0 & \mathcal{Z}_0 \\ \mathcal{W}_1 & \mathcal{X}_1 & \mathcal{Y}_1 & \mathcal{Z}_1 \\ \mathcal{W}_2 & \mathcal{X}_2 & \mathcal{Y}_2 & \mathcal{Z}_2 \\ \mathcal{W}_3 & \mathcal{X}_3 & \mathcal{Y}_3 & \mathcal{Z}_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

Assim como no caso de pontos, definimos a *orientação* desses quatro planos como sendo o sinal desse determinante:

$$\Delta(L_0, L_1, L_2, L_3) = \begin{vmatrix} \mathcal{W}_0 & \mathcal{X}_0 & \mathcal{Y}_0 & \mathcal{Z}_0 \\ \mathcal{W}_1 & \mathcal{X}_1 & \mathcal{Y}_1 & \mathcal{Z}_1 \\ \mathcal{W}_2 & \mathcal{X}_2 & \mathcal{Y}_2 & \mathcal{Z}_2 \\ \mathcal{W}_3 & \mathcal{X}_3 & \mathcal{Y}_3 & \mathcal{Z}_3 \end{vmatrix} \quad (4)$$

A interpretação geométrica desta função fica como um exercício para o leitor interessado 8-).

## 4 Operações geométricas no espaço

### 4.1 Plano por três pontos

Na geometria euclidiana, existe apenas um plano que passa por três pontos dados que não estejam na mesma reta. Na geometria projetiva orientada, três pontos  $p_0, p_1$  e  $p_2$  determinam dois planos, coincidentes mas opostos.

Lembramos que um terceiro ponto  $p_3$  pertence a um desses planos, e somente se,  $\Delta(p_0, p_1, p_2, p_3) = 0$ . Expandindo o determinante (1) em termos da última linha, temos

$$+ \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} w_3 - \begin{vmatrix} w_0 & y_0 & z_0 \\ w_1 & y_1 & z_1 \\ w_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} x_3 + \begin{vmatrix} w_0 & x_0 & z_0 \\ w_1 & x_1 & z_1 \\ w_2 & x_2 & z_2 \end{vmatrix} y_3 - \begin{vmatrix} w_0 & x_0 & y_0 \\ w_1 & x_1 & y_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3 = 0$$

Examinando esta fórmula, podemos ver que ela pode ser escrita como o teste  $L \diamond p_3 = 0$ , onde  $L$  é o plano

$$\left\langle + \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} w_0 & y_0 & z_0 \\ w_1 & y_1 & z_1 \\ w_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}, + \begin{vmatrix} w_0 & x_0 & z_0 \\ w_1 & x_1 & z_1 \\ w_2 & x_2 & z_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} w_0 & x_0 & y_0 \\ w_1 & x_1 & y_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right\rangle \quad (5)$$

Definimos portanto o plano (5) como sendo a *junção* dos três pontos  $p_0, p_1$  e  $p_2$ , e o denotamos por  $p_0 \vee p_1 \vee p_2$ .

**Ex. 4.1:** Usando a fórmula (5), calcule os coeficientes do plano que passa pelos três pontos  $p_0 = [1, 2, 3, 4]$ ,  $p_1 = [1, 1, 1, 1]$ ,  $p_2 = [1, 3, 2, 4]$ .

**Ex. 4.2:** Calcule os coeficientes homogêneos do plano que passa pelos pontos  $[1, 1, 0, 0]$ ,  $[1, 0, 1, 0]$ , e  $[1, 0, 0, 1]$ .

Na verdade, considerando a maneira como chegamos à fórmula acima, podemos concluir que  $(p_0 \vee p_1 \vee p_2) \diamond p_3 = \Delta(p_0, p_1, p_2, p_3)$ ; ou seja, um ponto genérico  $p_3$  está no lado positivo do plano  $p_0 \vee p_1 \vee p_2$  se, e somente se, a orientação dos quatro pontos  $p_0, \dots, p_3$  é positiva.

**Ex. 4.3:** Dê uma regra geométrica para determinar a orientação externa do plano  $p_0 \vee p_1 \vee p_2$ , definido pelas fórmulas (5), quando  $p_1, p_2$ , e  $p_3$  são pontos do aquém.

**Ex. 4.4:** Seja  $K$  o cubo  $[-1 \text{ -- } +1] \times [-1 \text{ -- } +1] \times [-1 \text{ -- } +1]$  de  $\mathbb{R}^3$ . Os vértices de  $K$  que tem um número ímpar de coordenadas negativas definem um tetraedro regular. Usando as fórmulas (5), determine os planos das faces desse tetraedro.

**Ex. 4.5:** Seja  $S$  um icosaedro cujos 12 vértices tem as coordenadas cartesianas são  $(\pm 1, \pm \phi, 0)$ ,  $(0, \pm 1, \pm \phi)$ , e  $(\pm \phi, 0, \pm 1)$ , para algum número  $\phi$  entre 1 e 2. (a) Desenhe esses vértices no espaço. (b) Determine o valor exato da constante  $\phi$ , para que os pontos  $(-1, \phi, 0)$  e  $(0, 1, \phi)$  sejam equidistantes de  $(1, \phi, 0)$ . (Isso faz com que  $S$  seja um icosaedro regular.) (c) Determine os coeficientes dos planos das faces de  $S$ . (Note que há dois tipos de faces.)

**Ex. 4.6:** Determine a fórmula para os coeficientes homogêneos do plano que é paralelo a um plano  $\pi = \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \rangle$  dado, e passa por um ponto  $[w, x, y, z]$  dado.

## 4.2 Encontro de três planos

Na geometria euclidiana, existe apenas um ponto que pertence a três planos dados que não contenham uma reta comum. Na geometria projetiva orientada, três planos dados  $L_0, L_1$  e  $L_2$  que não contém uma reta comum determinam exatamente dois pontos, antípodas entre si.

As coordenadas destes dois pontos podem ser obtidas por uma fórmula semelhante (na verdade, dual) à fórmula (5) acima. Se  $L_i = \langle \mathcal{W}_i, \mathcal{X}_i, \mathcal{Y}_i, \mathcal{Z}_i \rangle$ , um dos pontos é

$$\left[ + \begin{vmatrix} \mathcal{X}_0 & \mathcal{Y}_0 & \mathcal{Z}_0 \\ \mathcal{X}_1 & \mathcal{Y}_1 & \mathcal{Z}_1 \\ \mathcal{X}_2 & \mathcal{Y}_2 & \mathcal{Z}_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \mathcal{W}_0 & \mathcal{Y}_0 & \mathcal{Z}_0 \\ \mathcal{W}_1 & \mathcal{Y}_1 & \mathcal{Z}_1 \\ \mathcal{W}_2 & \mathcal{Y}_2 & \mathcal{Z}_2 \end{vmatrix}, + \begin{vmatrix} \mathcal{W}_0 & \mathcal{X}_0 & \mathcal{Z}_0 \\ \mathcal{W}_1 & \mathcal{X}_1 & \mathcal{Z}_1 \\ \mathcal{W}_2 & \mathcal{X}_2 & \mathcal{Z}_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \mathcal{W}_0 & \mathcal{X}_0 & \mathcal{Y}_0 \\ \mathcal{W}_1 & \mathcal{X}_1 & \mathcal{Y}_1 \\ \mathcal{W}_2 & \mathcal{X}_2 & \mathcal{Y}_2 \end{vmatrix} \right] \quad (6)$$

Por definição, este ponto é o *encontro* dos planos  $L_0, L_1$  e  $L_2$  (nessa ordem), que denotaremos por  $L_0 \wedge L_1 \wedge L_2$ .

**Ex. 4.7:** Usando as fórmulas (6), calcule os coeficientes do ponto de intersecção dos três planos  $\pi_0 = \langle 1, 2, 3, 4 \rangle$ ,  $\pi_1 = \langle 1, 1, 1, 1 \rangle$ ,  $\pi_2 = \langle 1, 3, 2, 4 \rangle$ .