MC909 – Computação Gráfica

Primeiro Semestre de 1995

Notas de Aula – Fascículo 3

Transformações Geométricas no Plano

3.1 Transformações projetivas

Dentre todas as funções que levam pontos de $\mathbb{T}^2$ para pontos de $\mathbb{T}^2$, existe uma classe importante, as *transformações projetivas*, ou *projetividades*, que se caracterizam por preservar as relações de colinearidade: isto é, se três pontos estão alinhados, suas imagens também o são, e vice-versa.

O conceito de projetividade engloba muitas transformações geométricas importantes, como as translações, rotações, e mudanças de escala, que estudaremos a seguir.

3.1.1 Caracterização algébrica

Pode-se provar que toda projetividade de $\mathbb{T}^2$ corresponde a uma transformação linear inversível das coordenadas homogêneas. Isto é, para toda projetividade F existe uma matriz real

$$\mathsf{F} = \begin{bmatrix} f_{ww} & f_{wx} & f_{wy} \\ f_{xw} & f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yw} & f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

com dimensão 3×3 e determinante não nulo, tal que

$$\begin{aligned} F([w,x,y]) &= [w,x,y]\mathsf{F} \\ &= \begin{matrix} [& wf_{ww} + xf_{xw} + yf_{yw} & \\ & wf_{wx} + xf_{xx} + yf_{yx} & \\ & wf_{wy} + xf_{xy} + yf_{yy} &] \end{matrix} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Note que, para fins desta fórmula, a tripla $[w, x, y]$ deve ser vista como um vetor linha, isto é, uma matriz 1×3.

A recíproca também é verdadeira: toda matriz 3×3 F, com determinante não nulo, define pela fórmula (3.1) uma projetividade de $\mathbb{T}^2$. Este fato é fácil de provar, usando a definição de colinearidade (equação (2.8)), e o fato que o determinante de um produto de matrizes é o produto dos seus determinantes. Veja o exercício 3.1.

Ex. 3.1: Seja F uma matriz 3×3. Prove que a função F de $\mathbb{T}^2$ para $\mathbb{T}^2$ definida pela fórmula (3.1) satisfaz

$$\Delta(F(p_0), F(p_1), F(p_2)) = \Delta(p_0, p_1, p_2) \cdot \operatorname{sgn} |\mathsf{F}|$$

O exercício 3.1 revela que as transformações projetivas se dividem em duas classes, as *positivas* e as *negativas*, conforme o sinal do determinante de sua matriz; sendo que uma projetividade positiva preserva as orientações de todos os triângulos, enquanto que uma projetividade negativa as inverte.

Note que, se aplicarmos a fórmula (3.1) a duas triplas homogêneas equivalentes, obteremos dois resultados equivalentes.

Note também que, se multiplicarmos todos os elementos da matriz F por um mesmo número $\alpha \neq 0$, a transformação projetiva F definida pela mesma não se altera. Portanto, duas matrizes F' e F'' determinam a mesma transformação se e somente se $\mathsf{F}' = \alpha\mathsf{F}''$ para algum $\alpha \neq 0$.

Ex. 3.2: Mostre que a função $F(p) = \neg p$, que leva cada ponto para seu antípoda, é uma projetividade negativa de $\mathbb{T}^2$.

Ex. 3.3: Se F é uma projetividade, qual é a relação entre $F(p)$ e $F(\neg p)$? Justifique.

Antes de estudar as propriedades gerais das projetividades, vamos conhecer alguns casos particulares, que são bastante importantes na prática.

3.1.2 Translações

Para deslocar uma figura no plano, mantendo-se sua orientação, basta somar às coordenadas cartesianas de cada um de seus pontos um mesmo vetor (X_0, Y_0). Isto é, basta aplicar a cada ponto da figura a função

$$(X, Y) \mapsto (X + X_0, Y + Y_0) = (X, Y) + (X_0, Y_0)$$

Uma função desta forma é chamada de *translação* do plano $\mathbb{R}^2$ pelo vetor (X_0, Y_0). Note que (X_0, Y_0) é também a imagem da origem $(0, 0)$.

Em termos de coordenadas homogêneas, a translação que leva a origem $[1, 0, 0]$ para o ponto $[w_0, x_0, y_0]$ (necessariamente finito) é dada pela fórmula

$$[w, x, y] \mapsto [\ ww_0,\ \ xw_0 + wx_0,\ \ yw_0 + wy_0\ ]$$

Note que as coordenadas do resultado são combinações lineares das coordenadas do argumento. Podemos portanto escrever a função acima como um produto da tripla homogênea $[w, x, y]$ (vista agora como um vetor linha do $\mathbb{R}^3$) por uma matriz 3×3:

$$[w, x, y] \mapsto [w, x, y] \begin{bmatrix} w_0 & x_0 & y_0 \\ 0 & w_0 & 0 \\ 0 & 0 & w_0 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

Note que um ponto infinito $p = [0, x, y]$ é levado para $[0, xw_0, yw_0] = [0, x, y] = p$. Ou seja, qualquer translação mantém a reta Ω fixa ponto-a-ponto. Prova-se daí que as translações também preservam todas as distâncias, direções, e ângulos de qualquer figura.

Ex. 3.4: Escreva a matriz da translação que desloca o ponto (X_0, Y_0) para o ponto (X_1, Y_1).

3.1.3 Rotações

Para rodar uma figura plana em torno da origem $(0, 0)$, por um ângulo θ em sentido anti-horário, basta aplicar a cada um de seus pontos a função

$$\begin{aligned} (X, Y) &\mapsto (X \cos\theta - Y \sin\theta, X \sin\theta + Y \cos\theta) \\ &= (X, Y) \begin{pmatrix} +\cos\theta & +\sin\theta \\ -\sin\theta & +\cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Em termos de coordenadas homogêneas, esta função é

$$[w, x, y] \mapsto [w, x, y] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & +\cos\theta & +\sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & +\cos\theta \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

Como é sabido, uma rotação por qualquer ângulo preserva todos os ângulos e distâncias entre os pontos do plano.

Ex. 3.5: Escreva as matrizes de rotação para os ângulos 45°, 60°, 90°, 180°, e −90°.

Ex. 3.6: Determine a matriz de rotação que transforma o eixo X numa reta que passa pela origem e é paralela ao vetor (X, Y).

Note que a fórmula (3.3) descreve apenas rotações cujo centro (ponto fixo) é a origem. Na seção 3.1.9 veremos como construir uma matriz de rotação cujo centro é um ponto finito arbitrário.

3.1.4 Transformações de escala

Para ampliar ou reduzir uma figura, mantendo-se sua orientação, basta multiplicar cada coordenada cartesiana de cada ponto por um fator de escala conveniente; ou seja, aplicar a cada ponto a *transformação de escala*

$$(X, Y) \mapsto (\alpha X, \beta Y)$$

O par de fatores de escala (α, β) pode ser entendido como sendo a imagem do ponto cartesiano $(1, 1)$. Em coordenadas homogêneas, esta transformação é dada por

$$[w, x, y] \mapsto [w, x, y] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

Se o fator de escala é o mesmo para as duas coordenadas, a ampliação ou redução é dita *uniforme*, e preserva todos os ângulos e direções entre os pontos do plano. Caso contrário, apenas as direções horizontais e verticais são preservadas.

Ex. 3.7: Escreva a matriz de mudança de escala que leva (X_0, Y_0) para (X_1, Y_1). (Suponha que nenhum desses números é zero.)

3.1.5 Reflexões

A transformação

$$(X, Y) \mapsto (-X, Y) \tag{3.5}$$

aplicada aos pontos de uma figura reflete a mesma em torno do eixo Y, invertendo o sentido do eixo X. É um caso particular de transformação de escala, com fatores $(-1, 1)$.

Ex. 3.8: Escreva a matriz da transformação (3.5), em coordenadas homogêneas.

A reflexão em torno do eixo X é análoga. Na seção 3.1.9 veremos como construir uma matriz de reflexão cujo eixo é uma reta ordinária qualquer.

Note que reflexões preservam distâncias, e invertem o sentido dos ângulos, preservando seu valor absoluto.

Ex. 3.9: Uma reflexão é uma projetividade positiva ou negativa?

Ex. 3.10: Que tipo de projetividade é a definida pela matriz

$$\begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

3.1.6 Cisalhamentos

A transformação

$$(X, Y) \mapsto (X + \alpha Y, Y)$$

é chamada de *cisalhamento horizontal*: Esta transformação preserva a coordenada Y do argumento, e desloca a coordenada X por uma distância proporcional à coordenada Y. (Assim, ela poderia ser usada para converter letras "romanas" em "itálicas".) Em particular, o ponto $(0, 1)$ é levado para $(\alpha, 1)$. A forma homogênea desta transformação é

$$[w, x, y] \mapsto [w, x, y] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

As transformações de *cisalhamento vertical* são definidas de modo análogo.

O cisalhamento mais geral mantém fixos os pontos de uma reta ordinária r, e desloca qualquer outro ponto finito numa direção paralela a r, sendo o deslocamento proporcional à distância de p a r. Na seção 3.1.9 veremos como construir esta matriz, dadas r e a constante de proporcionalidade.

Ex. 3.11: Construa uma matriz de cisalhamento horizontal que transforma um triângulo equilátero com base paralela ao eixo X num triângulo retângulo.

3.1.7 Composição de transformações

Se F e G são duas funções de $\mathbb{T}^2$ para $\mathbb{T}^2$, como as descritas acima, a *transformação composta* $p \mapsto G(F(p))$ equivale aplicar F e G em seqüência, nesta ordem, a cada ponto.

Observe que, na notação funcional ordinária $G(F(p))$, a ordem em que essas funções são escritas é oposta à ordem em que elas são aplicadas. Para evitar este inconveniente, adotaremos neste curso a notação funcional pós-fixa usada pelos algebristas. Ou seja, a aplicação de uma função F a um argumento x será denotada por xF, em vez de $F(x)$; e a composição de duas funções F e G, aplicadas nessa ordem, será denotada por FG, em vez de $G \circ F$. Portanto, em lugar de $F(G(x))$ escreveremos xFG, que pode ser lido tanto $(xF)G$ quanto $x(FG)$.

Compondo as transformações "básicas" vistas nas seções 3.1.2–3.1.6, podemos obter outras classes interessantes. Por exemplo, combinando rotações, translações, e reflexões obtemos as chamadas *transformações isométricas*, ou *isometrias*, ou *movimentos rígidos* do plano, que são justamente todas as funções de $\mathbb{T}^2$ em $\mathbb{T}^2$ que preservam as distâncias e ângulos entre os pontos. Se juntarmos a essas as transformações uniformes de escala, obtemos as *transformações euclidianas*, ou *similaridades*, que preservam apenas os ângulos e as razões entre distâncias. Por outro lado, se combinarmos as isometrias com os cisalhamentos horizontais e verticais, obtemos as *transformações unitárias*, que preservam áreas e o paralelismo entre retas.

Em qualquer caso, note que toda transformação F assim obtida pode ser escrita na forma $[w, x, y] \mapsto [w, x, y]\mathsf{F}$, onde F é uma matriz 3×3. A composição FG de duas transformações F e G equivale obviamente ao produto FG das matrizes correspondentes, nessa ordem.

Ex. 3.12: Seja R a rotação por 90° em torno da origem, e T a translação pelo vetor $(2, 3)$. Calcule as matrizes para as transformações $A = TR$ e $B = RT$. Explique (geometricamente) o efeito de A e B, e a diferença entre as duas.

Ex. 3.13: Mostre que uma transformação é de similaridade se e somente se sua matriz tem a forma

$$\begin{bmatrix} 1 & x_d & y_d \\ 0 & +a & +b \\ 0 & -b & +a \end{bmatrix}$$

onde a e b são números reais, não ambos nulos, e x_d, y_d são números reais quaisquer. Qual o significado geométrico desses parâmetros?

3.1.8 Transformação inversa

Toda transformação F dentre as classes descritas acima é uma bijeção de $\mathbb{T}^2$ para $\mathbb{T}^2$; portanto, ela admite uma transformação inversa F^{-1}, tal que FF^{-1} e $F^{-1}F$ são a função identidade de $\mathbb{T}^2$. Obviamente, a matriz da inversa de F é a inversa da matriz de F.

Cada uma das classes de transformações mencionadas acima é fechada também sob inversão; por exemplo, a inversa da translação por (X_0, Y_0) é a translação por $(-X_0, -Y_0)$, etc.

Ex. 3.14: Para cada uma das transformações elementares vistas acima (translações, rotações, reflexões, mudanças de escala, e cisalhamento), dê a matriz homogênea da transformação inversa.

Como sabemos, a inversa da composição FG é a composição das inversas na ordem inversa, $G^{-1}F^{-1}$.

3.1.9 Transformações conjugadas

Composição e inversão são ferramentas extremamente úteis quando queremos construir projetividades mais complexas que as descritas acima.

Para esse fim, usamos freqüentemente o idioma $G^{-1}FG$, chamado de *conjugada de F por G*. Observe que se F leva o ponto p no ponto q, sua conjugada $G^{-1}FG$ leva o ponto pG no ponto qG; e se p é um ponto fixo de F, então pG é um ponto fixo de $G^{-1}FG$.

Por exemplo, a transformação que roda o plano de 30° em torno do ponto $(3,5)$ pode ser obtida pela composição $T^{-1}RT$, onde T é a translação por $(3,5)$, e R é a rotação de 30° em torno da origem.

Ex. 3.15: Para cada uma das transformações abaixo, diga como obtê-la através da composição de projetividades simples (translações, rotações em torno da origem, mudanças de escala, reflexões nos eixos, e cisalhamentos horizontais e verticais):

(a) Reflexão em torno da reta vertical de abscissa X.

(b) Reflexão em torno da reta paralela ao vetor (X_d, Y_d) passando pela origem.

(c) Reflexão em torno da reta paralela ao vetor (X_d, Y_d) passando pelo ponto (X_p, Y_p)

(d) Mudança de eixos e escalas que transforma o retângulo cartesiano $[2 \_ 4] \times [3 \times 5]$ no retângulo $[-1 \_ +1] \times [0 \_ 1]$.

3.1.10 Efeito de projetividades em retas

Seja F uma projetividade de $\mathbb{T}^2$ e r uma reta. Por definição, a imagem de r por F é a única reta $F(r)$ tal que

$$r \diamond p = F(r) \diamond F(p)$$

para todo ponto p. Note, em particular, que p está em r se e somente se $F(p)$ está em $F(r)$.

Os coeficientes da reta $F(r)$ podem ser obtidos multiplicando-se a inversa da matriz de F pelos coeficientes de r, que devem ser considerados como um vetor coluna (isto é, uma matriz 3×1). Ou seja,

$$F(\langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle) = \mathsf{F}^{-1} \langle \mathcal{W}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle \tag{3.7}$$

Ex. 3.16: Determine a imagem do ponto $[1,1,1]$ e da reta $\langle 1,1,1\rangle$ sob uma translação pelo vetor $(2,3)$.

3.1.11 Transformações afins

Todas as transformações vistas até agora são casos particulares das *transformações afins* do plano, cuja forma cartesiana geral é

$$\begin{aligned}(X,\,Y) &\mapsto (aX+bY+e,\; cX+dY+f)\\ &= (X,\,Y)\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} + (e,\,f)\end{aligned}$$

onde $\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)$ é uma matriz real não singular, e (e,f) um vetor real. A versão homogênea é

$$[w,x,y] \mapsto [w,x,y]\begin{bmatrix} 1 & e & f\\ 0 & a & b\\ 0 & c & d\end{bmatrix} \tag{3.8}$$

É fácil verificar que as transformações afins são fechadas sob composição e inversão.

Mais ainda, toda transformação afim preserva o sinal da coordenada peso w, levando portanto pontos infinitos para pontos infinitos, e pontos finitos para pontos finitos. Ou seja, ela mantém fixos a reta Ω, o aquém, e o além de $\mathbb{T}^2$ (como conjuntos, não necessariamente ponto-a-ponto). Na verdade, estas propriedades caracterizam as transformações afins; que são, portanto, exatamente as projetividades que podem ser estudadas na geometria euclidiana (ou cartesiana), sem sair do $\mathbb{R}^2$.

Pode-se concluir também que toda transformação afim preserva o paralelismo entre retas, pois duas retas finitas são paralelas se e somente se elas encontram num ponto infinito.

Existe uma única transformação afim do plano que leva os três pontos $(0,0)$, $(1,0)$, e $(0,1)$ para três pontos dados (finitos e não colineares) $p_0=(X_0,Y_0)$, $p_1=(X_1,Y_1)$, $p_2=(X_2,Y_2)$. A matriz homogênea dessa transformação é

$$A_{p_0p_1p_2} \;\equiv\; [w,x,y]\mapsto[w,x,y]\begin{bmatrix} 1 & X_0 & Y_0\\ 0 & X_1-X_0 & Y_1-Y_0\\ 0 & X_2-X_0 & Y_2-Y_0\end{bmatrix} \tag{3.9}$$

Portanto, dados quaisquer dois triângulos abc e pqr (finitos e não-degenerados), existe uma única transformação afim do plano que leva $a \mapsto p$, $b \mapsto q$, e $c \mapsto r$, que é simplesmente a composição ${A_{abc}}^{-1} A_{pqr}$.

Ex. 3.17: Determine a matriz da transformação afim que leva

$$[1, 2, 3],\ [1, 4, 0],\ [1, 0, 4]$$

para, respectivamente,

$$[1, 2, 0], [1, -1, 1], [1, -1, -1]$$

3.1.12 Transformações projetivas gerais

A transformações afins são um subconjunto próprio das projetividades de $\mathbb{T}^2$. Em geral, uma projetividade pode levar pontos finitos para o infinito, e vice-versa. Considere por exemplo a transformação

$$[w, x, y] \mapsto [w, x, y] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x, w, y] \qquad (3.10)$$

que mantém o "pólo norte" $[0, 0, 1]$ fixo, e troca a origem $[1, 0, 0]$ com o "pólo leste" $[0, 1, 0]$. Esta projetividade troca o eixo Y com a reta no infinito Ω; portanto, ela transforma retas horizontais em retas que passam pela origem, e vice-versa. Em coordenadas cartesianas, ela equivale a

$$(X, Y) \mapsto (1/X, Y/X)$$

Note que esta fórmula é indefinida quando $X = 0$; e, reciprocamente, não existe nenhum ponto do $\mathbb{R}^2$ cuja imagem tenha $X = 0$. Portanto, este é um exemplo de transformação geométrica que é melhor estudada em $\mathbb{T}^2$ do que em $\mathbb{R}^2$.

Ex. 3.18: Considere um tabuleiro de xadrez desenhado no plano $\mathbb{T}^2$ com cantos opostos nos pontos $(-4, -4)$ e $(4, 4)$. Desenhe a imagem deste tabuleito pela projetividade (3.10).

Ex. 3.19: Determine uma projetividade que mantém a origem fixa, levando $[1, 1, 0]$ para $[0, 1, 0]$, $[1, 0, 1]$ para $[0, 0, 1]$, e $[3, 1, 1]$ para $[1, 1, 1]$.

Ex. 3.20: Determine todas as projetividades que mantém fixos os três pontos $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$, e $[0, 0, 1]$.