MC538/MC548 - Lista de Exercícios I

Anamaria Gomide e Jorge Stolfi

Primeiro Semestre de 2003

1. Considere o seguinte algoritmo para determinar se um grafo tem uma CLIQUE de tamanho k:

   - Passo 1: Gere todos os subconjuntos de vértices contendo exatamente k vértices (existem $O(n^k)$ subconjuntos)
   - Passo 2: Verifique se algum dos subgrafos induzidos por estes subconjuntos é completo

   Por que este não é um algoritmo polinomial para o problema da CLIQUE?

2. Desenhe um grafo obtido a partir da redução do problema SAT para o problema CLIQUE relativo à seguinte expressão:
   $(x + \bar{y} + z) \cdot (\bar{x} + y + \bar{z}) \cdot (\bar{x} + y + z) \cdot (x + \bar{y} + \bar{z})$

3. Avalie se as afirmativas abaixo são verdadeiras ou falsas. Justifique suas respostas:

   (a) Se $P = NP$ todo problema NP-Difícil é polinomial?

   (b) Se for encontrado um algoritmo polinomial para um problema qualquer NP-Difícil então ficará provado que $P = NP$

   (c) Se o complemento $\bar{\pi}$ de todo problema $\pi \in NP$ for tal que $\bar{\pi}$ também esteja em NP, então:

      i. $NP = Co - NP$ e

      ii. $P = NP$

   (d) A classe P é fechada no seu complemento, isto é, $P = Co - P$, logo:

      i. Se $P = NP$, então $NP = Co - NP$ e

      ii. $NP \neq Co - NP$ implicaria necessariamente em $P \neq NP$?

   (e) Um problema de decisão π é co-NP-Completo quando:

      i. $\pi \in Co - NP$

      ii. Todo problema de decisão $\pi' \in Co - NP$ satisfaz $\pi' \propto_p \pi$

   Então as classes NP-Completo e Co-NP-completo são disjuntas se e somente se $P \neq NP$?

4. Sejam P_1 e P_2 dois problemas tais que $P_1 \propto_p P_2$ e suponha que P_1 tem uma cota inferior $\Omega(n \log n)$. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras:
   (a) $\Omega(n \log n)$ é também cota inferior para P_2.
   (b) Todo algoritmo que resolve P_1 pode ser usado para resolver P_2.
   (c) Todo algoritmo que resolve P_2 pode ser usado para resolver P_1.
   (d) O problema P_2 pode ser resolvido no pior caso em tempo $O(n \log n)$.

5. Prove que a seguinte afirmativa é verdadeira: "Se o complemento de um problema NP-Completo está em NP, então $NP = Co - NP$".

6. Prove que os seguintes problemas estão em NP-Completo:
   (a) Dados: Um conjunto finito U, um tamanho $s(u) \in Z^+$ e um valor $v(u) \in Z^+$ para cada $u \in U$, um tamanho máximo $B \in Z^+$ e um valor (objetivo) $K \in Z^+$.
   Questão: Existe um subconjunto $U' \subseteq U$ tal que $\sum_{u \in U'} s(u) \leq B$ e $\sum_{u \in U'} v(u) \geq K$?
   (b) Dados: Um conjunto finito U de itens, um tamanho $s(u) \in Z^+$ para cada $u \in U$, um inteiro positivo (capacidade) B, e um inteiro positivo K.
   Questão: Existe uma partição de U em conjuntos disjuntos $U_1, U_2, \cdots, U_k$ tal que a soma dos tamanhos dos itens em cada U_i seja no máximo B?

7. Prove que o seguinte problema é NP-Completo: Dado um grafo não orientado $G = (V, E)$ e um inteiro k, determine se G contém uma árvore geradora T tal que cada vértice em T tem grau no máximo k.

8. Prove que o problema de cobertura de vértices (apresentado em sala de aula) é NP-Completo mesmo quando todos os vértices em G têm grau par.

9. Prove que o problema abaixo é NP-Completo:
   Dados: Uma coleção C de subconjuntos de um conjunto S e um inteiro positivo K.
   Questão: Existe um subconjunto $S' \subseteq S$ tal que $|S'| \leq K$ e S' contém pelo menos um elemento de cada subconjunto em C?

10. Prove que os seguintes problemas estão em NP-Completo:
    (a) O problema CONJUNTO DE ARESTAS DE REALIMENTAÇÃO (descrito em sala de aula).
    (b) O problema CAIXEIRO VIAJANTE (Dica: assuma que o problema CICLO HAMILTONIANO é NP-Completo).

Dicas: Caso julgue conveniente, assumir NP-Completos:

1. Os problemas NP-Completos estudados em sala de aula.

2. O problema da Partição, que pode ser descrito como:
Dados: Um conjunto finito A, um tamanho $s(a) \in Z^+$ para cada $a \in A$.
Questão: Existe um subconjunto $A' \subseteq A$ tal que $\sum_{a \in A'} s(a) = \sum_{a \in A - A'} s(a)$?