

1. 248295 Seja  $x$  um número real tal que  $x + 1/x$  é inteiro. Prove por indução que, para todo natural  $n$ ,  $x^n + 1/x^n$  é um número inteiro.
  
2. 221329 Prove que todo número natural  $n$  pode ser escrito como soma ou diferença de zero ou mais potências *distintas* de 3. Por exemplo,  $7 = 3^2 - 3^1 + 3^0$ ,  $8 = 3^2 - 3^0$ ,  $13 = 3^2 + 3^1 + 3^0$ ,  $14 = 3^3 - 3^2 - 3^1 - 3^0$ , etc.
  
3. 257337 Encontre o menor inteiro  $n_0$  tal que  $(\forall n \in \mathbb{N}) n \geq n_0 \rightarrow 1000 \cdot 2^n < 3^n$ . Prove este fato por indução.
  
4. 195396 Seja  $A$  o conjunto de todas as cadeias de 3 letras minúsculas, e  $\mathcal{R}$  a relação sobre  $A$  talque  $x\mathcal{R}y$  se e somente se as cadeias  $x$  e  $y$  diferem em exatamente uma posição. Por exemplo,  $uva \mathcal{R} uma$  e  $oox \mathcal{R} ooo$ , mas  $oox \not\mathcal{R} oxo$ 
  - a) Descreva a potência  $\mathcal{R}^2$  (cuidado, não é simples).
  - b) Descreva a potência  $\mathcal{R}^3$ .
  
5. 170553 Seja  $\mathcal{R}$  a relação sobre os inteiros positivos  $\mathbb{P} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$  tal que  $x\mathcal{R}y$  se e somente se  $x$  é um fator **primo** de  $y$ .
  - a) Descreva a composição  $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R}$ .
  - b) Descreva a composição  $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1}$ .
  
6. 241727 Considere a relação  $\mathcal{R}$  sobre os inteiros positivos  $\mathbb{P} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$  tal que  $x\mathcal{R}y$  se e somente se existe um fator primo de  $x$  que divide  $y$ . Essa relação é reflexiva? Simétrica? Transitiva? Justifique.
  
7. 225912 Seja  $x$  um número inteiro qualquer. Prove por indução em  $n$  que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , a potência  $x^n$  pode ser calculada com no máximo  $\log_2(n + 1)$  multiplicações. (Note que  $(x^k)^2 = x^{2k}$  e  $x(x^k) = x^{k+1}$ .)
  
8. 183955 Mostre que, para toda fórmula  $\mathcal{F}$  do cálculo de predicados, usando qualquer conjunto de variáveis lógicas, as contantes  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{F}$ , operadores lógicos  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\neg$ , e parênteses, existe uma fórmula  $\mathcal{F}'$ , logicamente equivalente, que usa as mesmas variáveis e constantes mas apenas os operadores  $\rightarrow$  e  $\oplus$  e parênteses. Use indução completa sobre o número  $n$  de operadores lógicos da fórmula  $\mathcal{F}$ .