1. $\boxed{199333}$ Seja $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números inteiros maiores que 1, isto é $\mathbb{Q} = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Considere a relação $\mathcal{R}$ sobre $\mathbb{Q}$ tal que $x \mathrel{\mathcal{R}} y$ se e somente se $x < y$ e x é divisor de y.

   a) $\mathcal{R}$ é uma relação de ordem sobre $\mathbb{Q}$? Uma relação de ordem estrita sobre $\mathbb{Q}$? Uma relação de ordem total sobre $\mathbb{Q}$?

   b) Quem são os elementos mínimos, máximos, minimais e maxmais de $\mathbb{Q}$ sobre $\mathcal{R}$?

   c) Idem para a relação inversa $\mathcal{R}^{-1}$.

2. $\boxed{198303}$ Seja $\mathbb{P}$ o conjunto de todas as palavras de 4 letras sobre o alfabeto maiúsculo $A = \{\mathtt{A}, \mathtt{B}, \mathtt{C}, \ldots, \mathtt{Z}\}$. Para cada uma das relações sobre $\mathbb{P}$ abaixo, determine se é relação de equivalência.

   a) $\mathcal{R}$ tal que $x \mathrel{\mathcal{R}} y$ se e somente se a primeira letra de x é igual à primeira letra de y.

   b) $\mathcal{S}$ tal que $x \mathrel{\mathcal{S}} y$ se e somente se a primeira letra de x é igual à ultima letra de y.

   c) $\mathcal{T}$ tal que $x \mathrel{\mathcal{T}} y$ se e somente se a primeira letra de x é igual à primeira letra de y, **ou** a última letra de x é igual à ultima letra de y.

3. $\boxed{177967}$ Seja $\mathbb{P}$ o conjunto dos inteiros maiores que 1, $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Seja $\mathcal{R}$ a relação sobre $\mathbb{P}$ tal que $x \mathrel{\mathcal{R}} y$ se e somente se $y = x^2$. Seja $\mathcal{S}$ o fecho transitivo de $\mathcal{R}$.

   a) Descreva a relação $\mathcal{S}$. Ela é uma relação de ordem sobre $\mathbb{P}$? Uma relação de ordem estrita sobre $\mathbb{P}$? Uma relação de ordem total sobre $\mathbb{P}$?

   b) Seja A o conjunto dos inteiros de 2 a 99, incluindo ambos. Quem são os elementos mínimos, máximos, minimais, e maximais de A sob $\mathcal{S}$?

   b) Determine um subconjunto infinito X de $\mathbb{P}$ tal que a restrição de $\mathcal{S}$ a X seja uma ordem total sobre X.

4. $\boxed{187793}$ Sejam A e B dois conjuntos quaiquer, e $\mathcal{R}$ uma relação de A para B. Seja $\mathcal{S}$ a relação $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R}\mathcal{R}^{-1}$.

   a) A relação $\mathcal{S}$ é sempre uma relação de equivalência sobre A?

   b) Mesma pergunta, mas supondo que $\mathrm{Dom}(\mathcal{S}) = A$.

   c) Mesma pergunta, mas supondo que $\mathrm{Dom}(\mathcal{S}) = A$ e, para qualquer x em A e quaisquer y, z em B, $(x \mathrel{\mathcal{R}} y \wedge x \mathrel{\mathcal{R}} z) \to y = z$.

5. $\boxed{\texttt{197588}}$ Seja $\mathcal{R}$ uma relação sobre um conjunto A, e seja $\mathcal{S}$ a relação complementar, $(A \times A) \setminus \mathcal{R}$. Prove que $\mathcal{R}$ é uma relação de ordem sobre A se e somente se $\mathcal{S}$ é uma relação de ordem estrita sobre A.