1. $\boxed{248295}$ Seja A o conjunto $\{1, 2, 3\}$. Liste todas as relações de ordem estritas possíveis sobre A. Quais são relações de ordem totais?

2. $\boxed{159955}$ Para este exercício, vamos definir uma *fórmula algébrica* como uma fórmula que usa apenas variáveis, constantes inteiras, parênteses, e as operações '$+$', '$-$', '$\times$' (multiplicação de números reais), e '$/$' (divisão de números reais). Definimos também um *polinômio* como sendo uma fórmula algébrica que não usa a divisão '$/$'. Prove que toda fórmula algébrica $\mathcal{F}$ tem uma fórmula equivalente $\mathcal{F}'$ que é ou um polinômio, ou o quociente de dois polinômios. Dica: use indução sobre o número de operações da fórmula.

3. $\boxed{160250}$

   a) Determine a potência $\mathcal{R}^n$ da relação $\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1), (5, 5)\}$ para cada n em $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

   b) Encontre uma relação $\mathcal{S}$ sobre o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tal que $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}^2$, $\mathcal{S}^3$, $\mathcal{S}^4$ são distintas, mas $\mathcal{S}^5 = \mathcal{S}$.

   c) Descreva a relação $\mathcal{S}^{237}$ onde $\mathcal{S}$ é a relação do item (b).

4. $\boxed{257337}$ Seja $\mathbb{P} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ o conjunto dos inteiros positivos. Quais das afirmações abaixo são verdadeiras? Justifique.

   a) $(\forall x \in \mathbb{P})\,(\exists y \in \mathbb{P})\,(\forall z \in \mathbb{P})\; z + x - y \leq z$

   b) $(\forall x \in \mathbb{P})\,(\forall z \in \mathbb{P})\,(\exists y \in \mathbb{P})\; z + x - y \leq z$

   c) $(\exists y \in \mathbb{P})\,(\forall x \in \mathbb{P})\,(\forall z \in \mathbb{P})\; z + x - y \leq z$

   d) $(\forall z \in \mathbb{P})\,(\exists y \in \mathbb{P})\,(\forall x \in \mathbb{P})\; z + x - y \leq z$

5. $\boxed{121092}$ Seja A o conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$.

   a) Liste todas as relações de equivalência possíveis sobre A.

   b) Encontre duas relações de equivalência $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ sobre A tais que $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ **não** é uma relação de equivalência.

   c) Se $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ são relações de equivalência sobre um conjunto X, a relação $\mathcal{T} = \mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R}\mathcal{S}$ é relação de equivalência sobre X?

6. $\boxed{155887}$ Seja $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e $\mathcal{R} = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 0)\}$. Determine:

   a) O fecho reflexivo e simétrico de $\mathcal{R}$.

b) O fecho reflexivo e transitivo de $\mathcal{R}$.

c) O fecho simétrico e transitivo de $\mathcal{R}$.

7. $\boxed{155978}$ Seja $\mathcal{R}$ a relação $\{(1,2),(2,3),(3,1),(4,5),(5,4)\}$. Prove, por indução, que $\mathcal{R}^{-3n} = \mathcal{R}^{3n}$ para todo natural n.

8. $\boxed{168107}$ Seja A o conjunto de todas as palavras finitas e não vazias formadas com as letras $\{\mathtt{A}, \mathtt{B}, \ldots, \mathtt{Z}\}$; isto é,
$A = \{\mathtt{A}, \mathtt{B}, \ldots, \mathtt{Z}, \mathtt{AA}, \mathtt{AB}, \ldots, \mathtt{CTHULHU}, \ldots\}$
Seja $\mathcal{R}$ a relação sobre A tal que $x \mathrel{\mathcal{R}} y$ se e somente se x e y diferem apenas pela troca de duas letras consecutivas. Ou seja $\mathtt{PINHO} \mathrel{\mathcal{R}} \mathtt{PNIHO}$ mas $\mathtt{SOPA} \not\mathrel{\mathcal{R}} \mathtt{SAPO}$ e $\mathtt{SAPO} \not\mathrel{\mathcal{R}} \mathtt{PAPO}$.
Descreva o fecho transitivo de $\mathcal{R}$.

9. $\boxed{168170}$ Para todo inteiro positivo n, seja $p(n)$ o menor divisor primo de n. Considere a relação $\mathcal{R}$ sobre os inteiros positivos $\mathbb{P} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $x \mathrel{\mathcal{R}} y$ se e somente se $p(x) = p(y)$. Esta relação é uma relação de equivalência? Se não for, prove por contra-exemplo; se for, descreva a classe de equivalência do inteiro 35 nessa relação.

10. $\boxed{169786}$ Diz-se que uma relação $\mathcal{R}$ sobre um conjunto A é uma *involução sobre* A se e somente se $\mathcal{R}^2 = \mathcal{I}_A$. Descreva a estrutura geral de tal relação.