



MO 446 - Introdução à Visão Computacional
MC 919 - Tópicos Especiais em Processamento Gráfico
1º Semestre de 2008

Lista 0 - Conceitos básicos e pré-requisitos de matemática

Entrega: Quinta, 06/03/2008 (em aula)

O objetivo desta lista de exercícios é se familiarizar e relembrar de algumas das ferramentas matemáticas básicas que utilizaremos durante o curso.

1. Considere $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ (vetores no espaço), onde \cdot representa o produto interno e \times o produto vetorial. Verifique que as seguintes relações são verdadeiras:

- (a) $a \times b = -b \times a$
(b) $a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c$
(c) $a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$

2. Seja $A = \begin{bmatrix} | & | & | \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$ uma matriz 3×3 ($a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^3$). Mostre que $\det(A) = a_3 \cdot (a_1 \times a_2)$.

3. Calcule os autovalores e autovetores das matrizes $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

4. Construa uma matriz com autovetores $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$, e com autovalores 1 e 2.

5. Resolva os sistemas

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 5 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

6. Explique o que é a SVD (Single Value Decomposition), relacione-a com o conceito de autovalores e autovetores e utilize um programa matemático (como o GNU-octave) para calcular a SVD de

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 5 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Seja A uma matriz quadrada, prove que $e^A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}$ (sugestão: use a expansão de Taylor).

8. Descreva a decomposição QR .