Rastreamento

Conceitos, Técnicas e Implementação

Siome Klein Goldenstein

siome@ic.unicamp.br

Instituto de Computação - UNICAMP

Conteúdo

- Modelagem de Sistemas.
- Introdução à Rastreamento.
- Métodos de Rastreamento.

UNICAMP

Parte II: Estados e Incertezas

Modelagem de Sistemas

- Modelagem de Sistemas.
- Estados como Incertezas.
- Introdução à Rastreamento.
- Métodos de Rastreamento.

Incertezas

É necessário representar incertezas.

Incertezas

É necessário representar incertezas.

- Intervalos;

UNICAMP

Incertezas

É necessário representar incertezas.

- Intervalos;
- Variáveis Aleatórias . . .

Incertezas

É necessário representar incertezas.

- Intervalos;
- Variáveis Aleatórias . . .
  - com distribuição paramétrica;

Incertezas

É necessário representar incertezas.

- Intervalos;
- Variáveis Aleatórias . . .
  - com distribuição paramétrica;
  - com distribuição não-paramétrica.

UNICAMP

Definições Básicas

- Espaço de Amostragem;
- Evento;
- Medida de Probabilidade.

UNICAMP

Espaço de Amostragem

Um conjunto Ω de objetos ω.

Exemplos:

- Os seis lados de um dado.
- Alguns pontos sobre uma reta.
- O intervalo fechado $[0, 1]$ dos Reais.
- Todos os pontos do plano $\mathbb{R}^2$.
- Todas as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

UNICAMP

Evento

Um subconjunto de amostras de Ω. Utiliza-se geralmente letras maiusculas $(A, B, \ldots)$, com uma definição concisa:

$$A = \{\omega : \text{condição necessária sobre } \omega\}$$

Evento

Um subconjunto de amostras de Ω. Utiliza-se geralmente letras maiusculas $(A, B, \ldots)$, com uma definição concisa:

$$A = \{\omega : \text{condição necessária sobre } \omega\}$$

- $\Omega \triangleq$ lados do dado, e $A = \{\omega : \text{num}(\omega) < 5\}$.

Evento

Um subconjunto de amostras de Ω. Utiliza-se geralmente letras maiusculas $(A, B, \ldots)$, com uma definição concisa:

$$A = \{\omega : \text{condição necessária sobre } \omega\}$$

- $\Omega \triangleq$ lados do dado, e $A = \{\omega : \text{num}(\omega) < 5\}$.
- $\Omega \triangleq \mathbb{R}^2$, e $A = \{\omega : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

UNICAMP

Evento

Um subconjunto de amostras de Ω. Utiliza-se geralmente letras maiusculas $(A, B, \ldots)$, com uma definição concisa:

$$A = \{\omega : \text{condição necessária sobre } \omega\}$$

- $\Omega \triangleq$ lados do dado, e $A = \{\omega : \text{num}(\omega) < 5\}$.
- $\Omega \triangleq \mathbb{R}^2$, e $A = \{\omega : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
- $\Omega \triangleq f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, e
  $A = \{\omega : 2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt \leq 2.5\}$.

UNICAMP

Eventos: Algumas Definições I

Complemento de A:

$$A' \triangleq \{\omega : \omega \textbf{ não} \text{ está em } A\}.$$

Eventos: Algumas Definições II

União de A e B :

$$A \cup B \triangleq \{\omega : \omega \text{ está em } A \textbf{ ou } \text{está em } B\}.$$

Eventos: Algumas Definições III

Interseção de A e B :

$$AB \triangleq \{\omega : \omega \text{ está em } A \textbf{ e } \text{está em } B\}.$$

Eventos: Propriedades I

$$A \cup A' = \Omega,$$

$$AA' = \emptyset = \Omega',$$

$$A\Omega = A.$$

UNICAMP

Eventos: Propriedades II

$$(AB)' = A' \cup B',$$

$$(A \cup B)' = A'B',$$

$$A \cup B = (AB') \cup (AB) \cup (A'B).$$

Eventos: Propriedades III

- Comutativa $\begin{cases} A \cup B = B \cup A \\ AB = BA \end{cases}$
- Associativa $\begin{cases} A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \\ A(BC) = (AB)C \end{cases}$
- Distributiva $\begin{cases} A(B \cup C) = (AB) \cup (AC) \\ A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C). \end{cases}$

UNICAMP

Medida de Probabilidade

Associação de números Reais com eventos em Ω.

- $\Omega \triangleq$ lados do dado e $A_i \triangleq \{\omega : \omega = \text{Lado}_i\}$, $P[A_i] \triangleq \frac{1}{6}$,
- $\Omega \triangleq [0,1]$ e $A_l \triangleq \{\omega : 0 < q \leq < l\}, l \leq 1$, $P[A_l] = l$.
- $\Omega \triangleq f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $A_x \triangleq \{\omega : 0 \leq f(0) \leq x\}$, $P[A_x] = 1 - e^{-x}$.

UNICAMP

Propriedades da Medida

1. $P[\Omega] = 1$.
2. Cada evento A_i está associado a um único número $P[A_i]$ tal que $0 \leq P[A_i] \leq 1$.
3. Se $AB = \emptyset$, então $P[A \cup B] = P[A] + P[B]$.

Ω Finito	Ω em $\mathbb{R}$
$P[A] = \sum_I P_i$	$P[A] = \int_I f(\omega)d(\omega)$
$\sum_{i=1}^{k} = 1$	$\int_{i=-\infty}^{\infty} f(\omega)d\omega = 1$

UNICAMP

Exemplos de Ω na Reta

Probabilidade Condicional

$$P[A|B] \triangleq \frac{P[AB]}{P[B]}$$

quando $P[B] \neq 0$. Quando $P[A]$ também é não zero

$$P[AB] = P[A|B]P[B] = P[B|A]P[A].$$

Como a interseção de B consigo próprio é ainda B:

$$P[B|B] = 1.$$

Independência Estatística

A e B são **independentes** quando

$$P[A, B] = P[A]P[B].$$

o que é equivalente a $P[A|B] = P[A]$.

Para três eventos A, B e C, são necessárias:

$$P[A, B] = P[A]P[B]$$
$$P[B, C] = P[B]P[C]$$
$$P[A, C] = P[A]P[C]$$
$$P[A, B, C] = P[A]P[B]P[C].$$

Variáveis Aleatórias

Uma função que mapeia Ω em $\mathbb{R}$.

Função de Distribuição

$$F_x(\alpha) \triangleq P[\{\omega : x(\omega) \leq \alpha\}]$$

1. $F_x(\alpha) \geq 0; \quad$ para $-\infty < \alpha < \infty$.
2. $F_x(-\infty) = 0$.
3. $F_x(+\infty) = 1$.
4. Se $a > b, \quad F_x(a) \geq F_x(b)$.
5. Se $a > b, \quad F_x(a) - F_x(b) = P[\{\omega : b < x(\omega) \leq a\}]$.

UNICAMP

Função de Distribuição II

É uma função monotonicamente crescente, que vai de 0 a 1.

Exemplo do dado:

Função de Distribuição Conjunta

Quando temos mais de um mapeamento de Ω em $\mathbb{R}$, temos um conjunto coexistente de variáveis aleatórias $\{x_i\}$.

$$F_{x_1,x_2}(\alpha_1,\alpha_2) \triangleq P[\{\omega : x_1(\omega) \leq \alpha_1, x_2(\omega) \leq \alpha_2\}]$$

1. $F_{x_1,x_2}(\alpha_1,\alpha_2) \leq 0$.
2. $F_{x_1,x_2}(-\infty,\alpha) = F_{x_1,x_2}(\alpha,-\infty) = 0$.
3. $F_{x_1,x_2}(\infty,\infty) = 1$.
4. $F_{x_1,x_2}(\infty,\alpha) = F_{x_2}(\alpha)$.
5. $F_{x_1,x_2}(\alpha,\infty) = F_{x_1}(\alpha)$.
6. $a_1 > b_1$ e $a_2 > b_2 \rightarrow F_{x_1,x_2}(a_1,a_2) \geq F_{x_1,x_2}(a_1,b_2) \geq F_{x_1,x_2}(b_1,b_2)$.

UNICAMP

Densidade de Probabilidade

$$p_x(\alpha) \triangleq \frac{dF_x(\alpha)}{d\alpha}$$

$$F_x(a) = \int_{-\infty}^{\alpha} p_x(\beta) d\beta.$$

É necessário um pouco mais de cuidado para lidar com descontinuidades em F_x.

Exemplos de distribuições em $\mathbb{R}$

- Exponencial;
- Rayleigh;
- Uniforme;
- Cauchy;
- Gaussiana

UNICAMP

Transformações de VAs I

$$y = f(x) \quad \Longrightarrow \quad y(\omega) = f(x(\omega)).$$

Soma com uma constante:

$$\begin{aligned} y &= x + a \\ P[\{\omega : y(\omega) \leq \alpha\}] &= P[\{\omega : x(\omega) \leq \alpha - a\}] \\ F_y(\alpha) &= F_x(\alpha - a) \\ p_y(\alpha) &= p_x(\alpha - a). \end{aligned}$$

UNICAMP

Transformações de VAs II

Multiplicação por uma constante:

$$
\begin{aligned}
y &= bx \\
P[\{\omega : y(\omega) \leq \alpha\}] &= P\left[\left\{\omega : x(\omega) \leq \frac{\alpha}{b}\right\}\right] \\
F_y(\alpha) &= F_x\left(\frac{\alpha}{b}\right) \\
p_y(\alpha) &= \frac{1}{|b|} p_x\left(\frac{\alpha}{b}\right).
\end{aligned}
$$

UNICAMP

Transformações de VAs III

Soma de duas Variáveis Aleatórias:

$$z = x + y.$$

Quando $y = \beta \implies z = x + \beta \implies p_z(\gamma) = p_x(\gamma - \beta)$, ou também

$$p_z(\gamma|y = \beta) = p_x(\gamma - \beta|y = \beta)$$

Calculamos então densidade conjunta,

$$\begin{aligned} p_{z,y}(\gamma, \beta) &= p_z(\gamma|y = \beta)p_y(\beta) \\ &= p_x(\gamma - \beta|y = \beta)p_y(\beta) \\ &= p_{x,y}(\gamma - \beta, \beta). \end{aligned}$$

UNICAMP

Transformações de VAs IV

Soma de duas Variáveis Aleatórias:

$$z = x + y.$$

Integrando em y para achar p_z:

$$p_z(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{x,y}(\gamma - \beta, \beta) d\beta.$$

que quando x e y são independentes,x

$$p_z(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} p_x(\gamma - \beta) p_y(\beta) d\beta.$$

UNICAMP

Valor Esperado (Esperança)

$$E[x] = \sum_j x_j P[x_j]$$

$$E[x] \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \alpha p_x(\alpha) d\alpha.$$

UNICAMP

Teorema Fundamental da Esperança

$$x = g(y)$$

$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} g(\beta) p_y(\beta) d\beta$$

$$\overline{x} = E[g(y)] = \overline{g(y)}$$

UNICAMP

Momentos de x

O n-ésimo momento central de x é defindo por

$$E[(x-\overline{x})^n] \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha-\overline{x})^n p_x(\alpha) d\alpha.$$

Em $\mathbb{R}$:

- Primeiro Momento, Média.
- Segundo Momento, Variancia (dispersão).
- Terceiro Momento (simetria).

Gaussiana em $\mathbb{R}^n$

Em $\mathbb{R}^2$,

$$p_{x_1,x_2}(\alpha_1,\alpha_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{(\alpha_1^2 - 2\rho\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2)}{2(1-\rho^2)}\right].$$

Em $\mathbb{R}^n$, construimos uma matriz de covariância

$$\Lambda_x = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n1} & \cdots & \lambda_{nn} \end{pmatrix} \Longrightarrow p_x(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\Lambda_x|^{\frac{1}{2}}} \exp(-\frac{1}{2}\alpha\Lambda_x^{-1}\alpha^\top).$$

UNICAMP

Transformação Linear

$$y = Ax$$

onde $y \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $A \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.

Já que a densidade da soma de variaveis aleatórias independentes é a convolução de suas densidades,

$$\Lambda_y = A\Lambda_x A^\top.$$

UNICAMP