

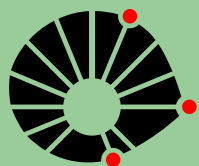
# Rastreamento

## *Conceitos, Técnicas e Implementação*

Siome Klein Goldenstein

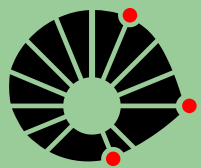
`siome@ic.unicamp.br`

Instituto de Computação - UNICAMP

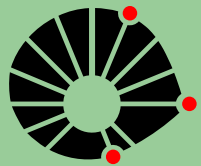


# Conteúdo

- Modelagem de Sistemas.
- Introdução à Rastreamento.
- Métodos de Rastreamento.

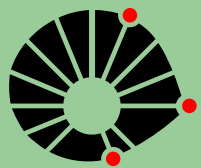


# Parte II: Estados e Incertezas



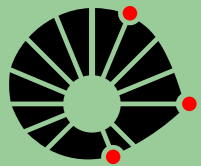
# Modelagem de Sistemas

- Modelagem de Sistemas.
- Estados como Incertezas.
- Introdução à Rastreamento.
- Métodos de Rastreamento.



# Incertezas

É necessário representar incertezas.



# Incertezas

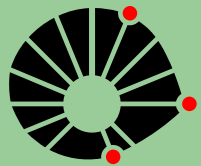
É necessário representar incertezas.

- Intervalos;

# Incertezas

É necessário representar incertezas.

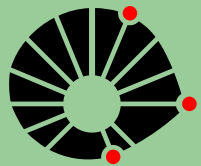
- Intervalos;
- Variáveis Aleatórias ...



# Incertezas

É necessário representar incertezas.

- Intervalos;
- Variáveis Aleatórias ...
  - ◆ com distribuição paramétrica;

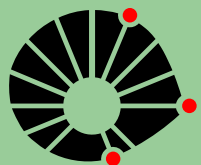




# Incertezas

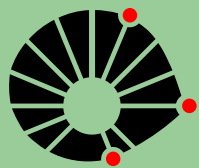
É necessário representar incertezas.

- Intervalos;
- Variáveis Aleatórias ...
  - ◆ com distribuição paramétrica;
  - ◆ com distribuição não-paramétrica.



# Definições Básicas

- Espaço de Amostragem;
- Evento;
- Medida de Probabilidade.

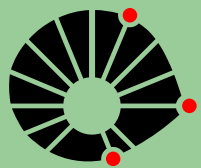


# Espaço de Amostragem

Um conjunto  $\Omega$  de objetos  $\omega$ .

Exemplos:

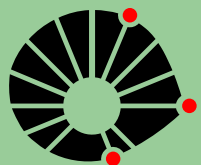
- Os seis lados de um dado.
- Alguns pontos sobre uma reta.
- O intervalo fechado  $[0, 1]$  dos Reais.
- Todos os pontos do plano  $\mathbb{R}^2$ .
- Todas as funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .



# Evento

Um subconjunto de amostras de  $\Omega$ . Utiliza-se geralmente letras maiúsculas ( $A, B, \dots$ ), com uma definição concisa:

$$A = \{\omega : \text{condição necessária sobre } \omega\}$$



# Evento

Um subconjunto de amostras de  $\Omega$ . Utiliza-se geralmente letras maiúsculas ( $A, B, \dots$ ), com uma definição concisa:

$$A = \{\omega : \text{condição necessária sobre } \omega\}$$

- $\Omega \triangleq$  lados do dado, e  $A = \{\omega : \text{num}(\omega) < 5\}$ .



# Evento

Um subconjunto de amostras de  $\Omega$ . Utiliza-se geralmente letras maiúsculas ( $A, B, \dots$ ), com uma definição concisa:

$$A = \{\omega : \text{condição necessária sobre } \omega\}$$

- $\Omega \triangleq$  lados do dado, e  $A = \{\omega : \text{num}(\omega) < 5\}$ .
- $\Omega \triangleq \mathbb{R}^2$ , e  $A = \{\omega : x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

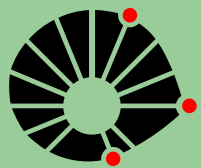


# Evento

Um subconjunto de amostras de  $\Omega$ . Utiliza-se geralmente letras maiúsculas ( $A, B, \dots$ ), com uma definição concisa:

$$A = \{\omega : \text{condição necessária sobre } \omega\}$$

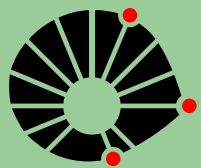
- $\Omega \triangleq$  lados do dado, e  $A = \{\omega : \text{num}(\omega) < 5\}$ .
- $\Omega \triangleq \mathbb{R}^2$ , e  $A = \{\omega : x^2 + y^2 \leq 1\}$ .
- $\Omega \triangleq f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , e  
 $A = \{\omega : 2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt \leq 2.5\}$ .



# Eventos: Algumas Definições I

Complemento de  $A$ :

$$A' \triangleq \{\omega : \omega \text{ não está em } A\}.$$

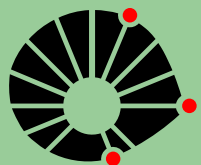




# Eventos: Algumas Definições II

União de  $A$  e  $B$  :

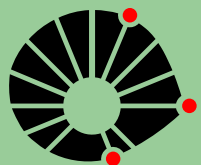
$$A \cup B \triangleq \{\omega : \omega \text{ está em } A \text{ ou está em } B\}.$$



# Eventos: Algumas Definições III

Interseção de  $A$  e  $B$  :

$$AB \triangleq \{\omega : \omega \text{ está em } A \text{ e está em } B\}.$$

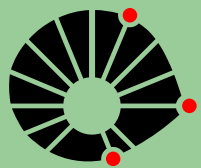


# Eventos: Propriedades I

$$A \cup A' = \Omega,$$

$$AA' = \emptyset = \Omega',$$

$$A\Omega = A.$$

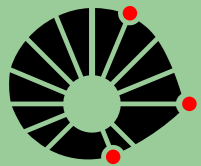


# Eventos: Propriedades II

$$(AB)' = A' \cup B',$$

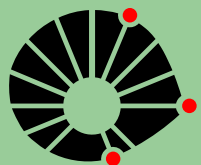
$$(A \cup B)' = A'B',$$

$$A \cup B = (AB') \cup (AB) \cup (A'B).$$



# Eventos: Propriedades III

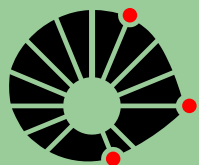
- Comutativa  $\begin{cases} A \cup B = B \cup A \\ AB = BA \end{cases}$
- Associativa  $\begin{cases} A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \\ A(BC) = (AB)C \end{cases}$
- Distributiva  $\begin{cases} A(B \cup C) = (AB) \cup (AC) \\ A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C). \end{cases}$



# Medida de Probabilidade

Associação de números Reais com eventos em  $\Omega$ .

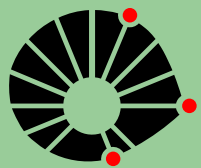
- $\Omega \triangleq$  lados do dado e  $A_i \triangleq \{\omega : \omega = \text{Lado}_i\}$ ,  
 $P[A_i] \triangleq \frac{1}{6}$ ,
- $\Omega \triangleq [0, 1]$  e  $A_l \triangleq \{\omega : 0 < \omega \leq l\}, l \leq 1$ ,  
 $P[A_l] = l$ .
- $\Omega \triangleq f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $A_x \triangleq \{\omega : 0 \leq f(\omega) \leq x\}$ ,  
 $P[A_x] = 1 - e^{-x}$ .



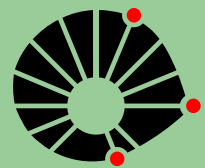
# Propriedades da Medida

1.  $P[\Omega] = 1$ .
2. Cada evento  $A_i$  está associado a um único número  $P[A_i]$  tal que  $0 \leq P[A_i] \leq 1$ .
3. Se  $AB = \emptyset$ , então  $P[A \cup B] = P[A] + P[B]$ .

$\Omega$ Finito	$\Omega$ em $\mathbb{R}$
$P[A] = \sum_I P_i$	$P[A] = \int_I f(\omega) d(\omega)$
$\sum_{i=1}^k = 1$	$\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) d\omega = 1$



# Exemplos de $\Omega$ na Reta





# Probabilidade Condicional

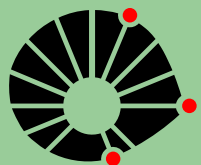
$$P[A|B] \triangleq \frac{P[AB]}{P[B]}$$

quando  $P[B] \neq 0$ . Quando  $P[A]$  também é não zero

$$P[AB] = P[A|B]P[B] = P[B|A]P[A].$$

Como a interseção de  $B$  consigo próprio é ainda  $B$ :

$$P[B|B] = 1.$$



# Independência Estatística

$A$  e  $B$  são independentes quando

$$P[A, B] = P[A]P[B].$$

o que é equivalente a  $P[A|B] = P[A]$ .

Para três eventos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , são necessárias:

$$P[A, B] = P[A]P[B]$$

$$P[B, C] = P[B]P[C]$$

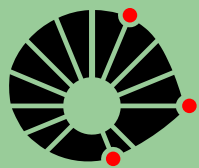
$$P[A, C] = P[A]P[C]$$

$$P[A, B, C] = P[A]P[B]P[C].$$



# Variáveis Aleatórias

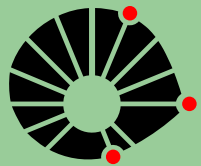
Uma função que mapeia  $\Omega$  em  $\mathbb{R}$ .



# Função de Distribuição

$$F_x(\alpha) \triangleq P[\{\omega : x(\omega) \leq \alpha\}]$$

1.  $F_x(\alpha) \geq 0$ ; para  $-\infty < \alpha < \infty$ .
2.  $F_x(-\infty) = 0$ .
3.  $F_x(+\infty) = 1$ .
4. Se  $a > b$ ,  $F_x(a) \geq F_x(b)$ .
5. Se  $a > b$ ,  $F_x(a) - F_x(b) = P[\{\omega : b < x(\omega) \leq a\}]$ .



# Função de Distribuição II

É uma função monotonicamente crescente, que vai de 0 a 1.

Exemplo do dado:



# Função de Distribuição Conjunta

Quando temos mais de um mapeamento de  $\Omega$  em  $\mathbb{R}$ , temos um conjunto coexistente de variáveis aleatórias  $\{x_i\}$ .

$$F_{x_1, x_2}(\alpha_1, \alpha_2) \triangleq P[\{\omega : x_1(\omega) \leq \alpha_1, x_2(\omega) \leq \alpha_2\}]$$

1.  $F_{x_1, x_2}(\alpha_1, \alpha_2) \leq 0$ .
2.  $F_{x_1, x_2}(-\infty, \alpha) = F_{x_1, x_2}(\alpha, -\infty) = 0$ .
3.  $F_{x_1, x_2}(\infty, \infty) = 1$ .
4.  $F_{x_1, x_2}(\infty, \alpha) = F_{x_2}(\alpha)$ .
5.  $F_{x_1, x_2}(\alpha, \infty) = F_{x_1}(\alpha)$ .
6.  $a_1 > b_1$  e  $a_2 > b_2 \rightarrow F_{x_1, x_2}(a_1, a_2) \geq F_{x_1, x_2}(a_1, b_2) \geq F_{x_1, x_2}(b_1, b_2)$ .

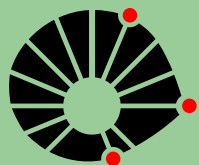


# Densidade de Probabilidade

$$p_x(\alpha) \triangleq \frac{dF_x(\alpha)}{d\alpha}$$

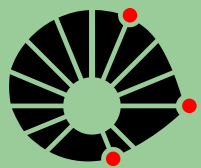
$$F_x(a) = \int_{-\infty}^a p_x(\beta) d\beta.$$

É necessário um pouco mais de cuidado para lidar com descontinuidades em  $F_x$ .



# Exemplos de distribuições em $\mathbb{R}$

- Exponencial;
- Rayleigh;
- Uniforme;
- Cauchy;
- Gaussiana





# Transformações de VAs I

$$y = f(x) \implies y(\omega) = f(x(\omega)).$$

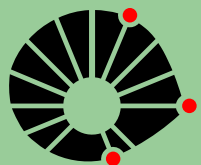
Soma com uma constante:

$$y = x + a$$

$$P[\{\omega : y(\omega) \leq \alpha\}] = P[\{\omega : x(\omega) \leq \alpha - a\}]$$

$$F_y(\alpha) = F_x(\alpha - a)$$

$$p_y(\alpha) = p_x(\alpha - a).$$



# Transformações de VAs II

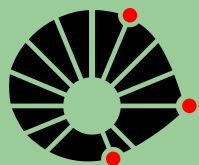
Multiplicação por uma constante:

$$y = bx$$

$$P[\{\omega : y(\omega) \leq \alpha\}] = P\left[\left\{\omega : x(\omega) \leq \frac{\alpha}{b}\right\}\right]$$

$$F_y(\alpha) = F_x\left(\frac{\alpha}{b}\right)$$

$$p_y(\alpha) = \frac{1}{|b|} p_x\left(\frac{\alpha}{b}\right).$$



# Transformações de VAs III

Soma de duas Variáveis Aleatórias:

$$z = x + y.$$

Quando  $y = \beta \implies z = x + \beta \implies p_z(\gamma) = p_x(\gamma - \beta)$ , ou também

$$p_z(\gamma|y = \beta) = p_x(\gamma - \beta|y = \beta)$$

Calculamos então densidade conjunta,

$$\begin{aligned} p_{z,y}(\gamma, \beta) &= p_z(\gamma|y = \beta)p_y(\beta) \\ &= p_x(\gamma - \beta|y = \beta)p_y(\beta) \\ &= p_{x,y}(\gamma - \beta, \beta). \end{aligned}$$



# Transformações de VAs IV

Soma de duas Variáveis Aleatórias:

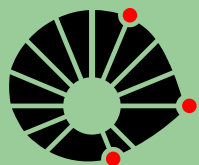
$$z = x + y.$$

Integrando em  $y$  para achar  $p_z$ :

$$p_z(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{x,y}(\gamma - \beta, \beta) d\beta.$$

que quando  $x$  e  $y$  são independentes,  $x$

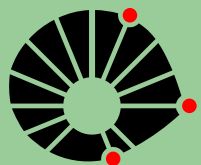
$$p_z(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} p_x(\gamma - \beta) p_y(\beta) d\beta.$$



# Valor Esperado (Esperança)

$$E[x] = \sum_j x_j P[x_j]$$

$$E[x] \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \alpha p_x(\alpha) d\alpha.$$

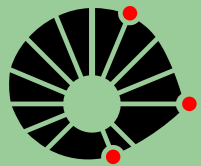


# Teorema Fundamental da Esperança

$$x = g(y)$$

$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} g(\beta) p_y(\beta) d\beta$$

$$\bar{x} = E[g(y)] = \overline{g(y)}$$



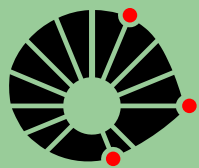
# Momentos de $x$

O  $n$ -ésimo momento central de  $x$  é definido por

$$E[(x - \bar{x})^n] \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha - \bar{x})^n p_x(\alpha) d\alpha.$$

Em  $\mathbb{R}$ :

- Primeiro Momento, Média.
- Segundo Momento, Variância (dispersão).
- Terceiro Momento (simetria).



# Gaussiana em $\mathbb{R}^n$

Em  $\mathbb{R}^2$ ,

$$p_{x_1, x_2}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{(\alpha_1^2 - 2\rho\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2)}{2(1-\rho^2)}\right].$$

Em  $\mathbb{R}^n$ , construímos uma matriz de covariância

$$\Lambda_x = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n1} & \cdots & \lambda_{nn} \end{pmatrix} \implies p_x(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\Lambda_x|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha\Lambda_x^{-1}\alpha^\top\right).$$





# Transformação Linear

$$y = Ax$$

onde  $y \in \mathbb{R}^m$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $A \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ .

Já que a densidade da soma de variáveis aleatórias independentes é a convolução de suas densidades,

$$\Lambda_y = A\Lambda_x A^\top.$$

