Rastreamento
Conceitos, Técnicas e Implementação

Siome Klein Goldenstein

siome@ic.unicamp.br

Instituto de Computação - UNICAMP

UNICAMP

Conteúdo

- Modelagem de Sistemas.
- Incertezas.
- Introdução à Rastreamento.
- Métodos de Rastreamento.

UNICAMP

Parte I: Modelagem de Sistemas

Modelagem de Sistemas

- Modelagem de Sistemas.
  - Modelagem por Estados.
  - Dinâmica de um Sistema.
- Incertezas.
- Introdução à Rastreamento.
- Métodos de Rastreamento.

UNICAMP

O que é um Sistema?

Um Sistema . . .

- é caixa preta que possui propriedades ou características distintas;

O que é um Sistema?

Um Sistema . . .

- é caixa preta que possui propriedades ou características distintas;
- possui um conjunto de propriedades mutáveis e um de propriedades constantes;

O que é um Sistema?

Um Sistema . . .

- é caixa preta que possui propriedades ou características distintas;
- possui um conjunto de propriedades mutáveis e um de propriedades constantes;
- possui um comportamento autônomo se deixado em paz;

UNICAMP

O que é um Sistema?

Um Sistema . . .

- é caixa preta que possui propriedades ou características distintas;
- possui um conjunto de propriedades mutáveis e um de propriedades constantes;
- possui um comportamento autônomo se deixado em paz;
- reage à estimulos externos.

Descrição de um Sistema

Necessitamos de uma abstração matemática para sua descrição!

O modelo matemático deve . . .

- descrevê-lo o mais precisamente o possível;

Descrição de um Sistema

Necessitamos de uma abstração matemática para sua descrição!

O modelo matemático deve . . .

- descrevê-lo o mais precisamente o possível;
- ser tratável;

Descrição de um Sistema

Necessitamos de uma abstração matemática para sua descrição!

O modelo matemático deve ...

- descrevê-lo o mais precisamente o possível;
- ser tratável;
- ser o mais simples e sucinto o possível.

UNICAMP

Estático e Dinâmico

Podemos decompor a abstração matemática de um sistema em duas partes:

1. Descrição Instantânea do sistema
2. Descrição da evolução do sistema, com e sem interferências externas.

Estados: Descrição Instantânea

Utilizamos um conjunto de n variáveis, que podem ser agrupadas e representadas em um vetor.

Estados: Descrição Instantânea

Utilizamos um conjunto de n variáveis, que podem ser agrupadas e representadas em um vetor.

O Sistema está completamente determinado no momento t através de

$$\vec{x}_t \in \mathbb{R}^n.$$

UNICAMP

Dinâmica, sem interferência

Podemos modelar o comportamento dinâmico de sistemas de dois modos:

UNICAMP

Dinâmica, sem interferência

Podemos modelar o comportamento dinâmico de sistemas de dois modos:

- Contínuo $\longrightarrow$ Sistema Dinâmico:

$$t \in \mathbb{R} \qquad \longrightarrow \qquad \frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x}_t, t).$$

Dinâmica, sem interferência

Podemos modelar o comportamento dinâmico de sistemas de dois modos:

- Contínuo $\longrightarrow$ Sistema Dinâmico:

$$t \in \mathbb{R} \qquad \longrightarrow \qquad \frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x}_t, t).$$

- Discreto $\longrightarrow$ Equações de Diferença:

$$\underset{(k \in \mathbb{N} \text{ e } \Delta T \in \mathbb{R})}{t = k.\Delta T} \qquad \longrightarrow \qquad \vec{x}_{k+1} = f(\vec{x}_k, n).$$

UNICAMP

Exemplo Contínuo I:

Movimento Contínuo Uniformemente Variado

$$x' = v \quad \text{e} \quad v' = k$$

Exemplo Contínuo I:

Movimento Contínuo Uniformemente Variado

$$x' = v \quad \text{e} \quad v' = k$$

- Aceleração constante: $a = k, \quad k \in \mathbb{R}$;

UNICAMP

Exemplo Contínuo I:

Movimento Contínuo Uniformemente Variado

$$x' = v \quad \text{e} \quad v' = k$$

- Aceleração constante: $a = k, \quad k \in \mathbb{R};$
- Velocidade: $v = kt;$

UNICAMP

Exemplo Contínuo I:

Movimento Contínuo Uniformemente Variado

$$x' = v \quad \text{e} \quad v' = k$$

- Aceleração constante: $a = k, \quad k \in \mathbb{R};$
- Velocidade: $v = kt;$
- Posição: $x = \frac{1}{2}kt^2.$

Exemplo Contínuo I:

Movimento Contínuo Uniformemente Variado

$$x' = v \quad \text{e} \quad v' = k$$

- Aceleração constante: $a = k, \quad k \in \mathbb{R};$
- Velocidade: $v = kt;$
- Posição: $x = \frac{1}{2}kt^2.$

$$\vec{x}_t = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} v \\ k \end{pmatrix}$$

Exemplo Discreto I

Logo Turtle

Exemplo Discreto I

Logo Turtle

$$\vec{x}_k = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \\ v \\ \theta' \end{pmatrix},$$

Exemplo Discreto I

Logo Turtle

$$\vec{x}_k = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \\ v \\ \theta' \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_{k+1} = \begin{pmatrix} x + \Delta T v \cos\theta \\ y + \Delta T v \sin\theta \\ \theta + \Delta T \theta' \\ v \\ \theta' \end{pmatrix}.$$

UNICAMP

Com Interferência. . .

- Contínuo $\longrightarrow$ Sistema Dinâmico:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x}_t, t).$$

- Discreto $\longrightarrow$ Equações de Diferença:

$$\vec{x}_{k+1} = f(\vec{x}_k, k).$$

Com Interferência. . .

- Contínuo $\longrightarrow$ Sistema Dinâmico:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x}_t, t).$$

- Discreto $\longrightarrow$ Equações de Diferença:

$$\vec{x}_{k+1} = f(\vec{x}_k, k).$$

Uma série de variaveis externas, $\vec{u}_t \in \mathbb{R}^m$, podem alterar a dinâmica do sistema. Podem estar tanto sob, como também fora, do controle do usuário.

UNICAMP

Com Interferência...

- Contínuo $\longrightarrow$ Sistema Dinâmico:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x}_t, \vec{u}_t, t).$$

- Discreto $\longrightarrow$ Equações de Diferença:

$$\vec{x}_{k+1} = f(\vec{x}_k, \vec{u}_k, k).$$

Uma série de variaveis externas, $\vec{u}_t \in \mathbb{R}^m$, podem alterar a dinâmica do sistema. Podem estar tanto sob, como também fora, do controle do usuário.

UNICAMP

Exemplo Contínuo I:

Bala de Canhão

X

$$\vec{x}_t = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ v_x \\ v_y \\ a_y \end{pmatrix} \qquad \frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \\ a_y \\ -g \end{pmatrix}$$

Se temos p_{x0}, p_{y0}, θ_0, e v_0,

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} p_{x0} \\ p_{y0} \\ v_0 \cos\theta_0 \\ v_0 \sin\theta_0 \\ -g \end{pmatrix}$$

Parte II: Estados e Incertezas

Modelagem de Sistemas

- Modelagem de Sistemas.
- Estados como Incertezas.
- Introdução à Rastreamento.
- Métodos de Rastreamento.

UNICAMP

Incertezas

É necessário representar incertezas.

Incertezas

É necessário representar incertezas.

- Intervalos;

Incertezas

É necessário representar incertezas.

- Intervalos;
- Variáveis Aleatórias ...

UNICAMP

Incertezas

É necessário representar incertezas.

- Intervalos;
- Variáveis Aleatórias ...
  - com distribuição paramétrica;

UNICAMP

Incertezas

É necessário representar incertezas.

- Intervalos;
- Variáveis Aleatórias . . .
  - com distribuição paramétrica;
  - com distribuição não-paramétrica.

UNICAMP

Definições Básicas

- Espaço de Amostragem;
- Evento;
- Medida de Probabilidade.

Espaço de Amostragem

Um conjunto Ω de objetos ω.

Exemplos:

- Os seis lados de um dado.
- Alguns pontos sobre uma reta.
- O intervalo fechado $[0, 1]$ dos Reais.
- Todos os pontos do plano $\mathbb{R}^2$.
- Todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

UNICAMP

Evento

Um subconjunto de amostras de Ω. Utiliza-se geralmente letras maiusculas $(A, B, \ldots)$, com uma de£nição concisa:

$$A = \{\omega : \text{condição necessária sobre } \omega\}$$

Evento

Um subconjunto de amostras de Ω. Utiliza-se geralmente letras maiusculas $(A, B, \ldots)$, com uma de£nição concisa:

$$A = \{\omega : \text{condição necessária sobre } \omega\}$$

- $\Omega \triangleq$ lados do dado, e $A = \{\omega : \text{num}(\omega) < 5\}$.

UNICAMP

Evento

Um subconjunto de amostras de Ω. Utiliza-se geralmente letras maiusculas $(A, B, \ldots)$, com uma de£nição concisa:

$$A = \{\omega : \text{condição necessária sobre } \omega\}$$

- $\Omega \triangleq$ lados do dado, e $A = \{\omega : \text{num}(\omega) < 5\}$.
- $\Omega \triangleq \mathbb{R}^2$, e $A = \{\omega : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

UNICAMP

Evento

Um subconjunto de amostras de Ω. Utiliza-se geralmente letras maiusculas $(A, B, \ldots)$, com uma de£nição concisa:

$$A = \{\omega : \text{condição necessária sobre } \omega\}$$

- $\Omega \triangleq$ lados do dado, e $A = \{\omega : \mathrm{num}(\omega) < 5\}$.
- $\Omega \triangleq \mathbb{R}^2$, e $A = \{\omega : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
- $\Omega \triangleq f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, e
  $A = \{\omega : 2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt \leq 2.5\}$.

UNICAMP

Eventos: Algumas Definições I

Complemento de A:

$$A' \triangleq \{\omega : \omega \textbf{ não } \text{está em } A\}.$$

Eventos: Algumas Definições II

União de A e B :

$$A \cup B \triangleq \{\omega : \omega \text{ está em } A \textbf{ ou } \text{está em } B\}.$$

Eventos: Algumas Definições III

Interseção de A e B :

$$AB \triangleq \{\omega : \omega \text{ está em } A \textbf{ e } \text{está em } B\}.$$

Eventos: Propriedades I

$$A \cup A' = \Omega,$$

$$AA' = \emptyset = \Omega',$$

$$A\Omega = A.$$

Eventos: Propriedades II

$$(AB)' = A' \cup B',$$

$$(A \cup B)' = A'B',$$

$$A \cup B = (AB') \cup (AB) \cup (A'B).$$

UNICAMP

Eventos: Propriedades III

- Comutativa $\begin{cases} A \cup B = B \cup A \\ AB = BA \end{cases}$
- Associativa $\begin{cases} A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \\ A(BC) = (AB)C \end{cases}$
- Distributiva $\begin{cases} A(B \cup C) = (AB) \cup (AC) \\ A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C). \end{cases}$

UNICAMP

Medida de Probabilidade

Associação de números Reais com eventos em Ω.

- $\Omega \triangleq$ lados do dado e $A_i \triangleq \{\omega : \omega = \text{Lado}_i\}$, $P[A_i] \triangleq \frac{1}{6}$,
- $\Omega \triangleq [0,1]$ e $A_l \triangleq \{\omega : 0 < q \leq< l\}, l \leq 1$, $P[A_l] = l$.
- $\Omega \triangleq f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $A_x \triangleq \{\omega : 0 \leq f(0) \leq x\}$, $P[A_x] = 1 - e^{-x}$.

UNICAMP

Propriedades da Medida

1. $P[\Omega] = 1$.
2. Cada evento A_i está associado a um único número $P[A_i]$ tal que $0 \leq P[A_i] \leq 1$.
3. Se $AB = \emptyset$, então $P[A \cup B] = P[A] + P[B]$.

Ω Finito	Ω em $\mathbb{R}$
$P[A] = \sum_I P_i$	$P[A] = \int_I f(\omega)d(\omega)$
$\sum_{i=1}^{k} = 1$	$\int_{i=-\infty}^{\infty} f(\omega)d\omega = 1$

Exemplos de Ω na Reta

Probabilidade Condicional

$$P[A|B] \triangleq \frac{P[AB]}{P[B]}$$

quando $P[B] \neq 0$. Quando $P[A]$ também é não zero

$$P[AB] = P[A|B]P[B] = P[B|A]P[A].$$

Como a interseção de B consigo próprio é ainda B:

$$P[B|B] = 1.$$

Independência Estatística

A e B são **independentes** quando

$$P[A, B] = P[A]P[B].$$

o que é equivalente a $P[A|B] = P[A]$.

Para três eventos A, B e C, são necessárias:

$$P[A, B] = P[A]P[B]$$
$$P[B, C] = P[B]P[C]$$
$$P[A, C] = P[A]P[C]$$
$$P[A, B, C] = P[A]P[B]P[C].$$

UNICAMP

Variáveis Aleatórias

Uma função que mapeia Ω em $\mathbb{R}$.

Função de Distribuição

$$F_x(\alpha) \triangleq P[\{\omega : x(\omega) \leq \alpha\}]$$

1. $F_x(\alpha) \geq 0; \quad$ para $-\infty < \alpha < \infty$.
2. $F_x(-\infty) = 0$.
3. $F_x(+\infty) = 1$.
4. Se $a > b, \quad F_x(a) \geq F_x(b)$.
5. Se $a > b, \quad F_x(a) - F_x(b) = P[\{\omega : b < x(\omega) \leq a\}]$.

UNICAMP

Função de Distribuição II

É uma função monotonicamente crescente, que vai de 0 a 1.

Exemplo do dado:

Função de Distribuição Conjunta

Quando temos mais de um mapeamento de Ω em $\mathbb{R}$, temos um conjunto coexistente de variáveis aleatórias $\{x_i\}$.

$$F_{x_1,x_2}(\alpha_1,\alpha_2) \triangleq P[\{\omega : x_1(\omega) \leq \alpha_1, x_2(\omega) \leq \alpha_2\}]$$

1. $F_{x_1,x_2}(\alpha_1,\alpha_2) \leq 0$.
2. $F_{x_1,x_2}(-\infty,\alpha) = F_{x_1,x_2}(\alpha,-\infty) = 0$.
3. $F_{x_1,x_2}(\infty,\infty) = 1$.
4. $F_{x_1,x_2}(\infty,\alpha) = F_{x_2}(\alpha)$.
5. $F_{x_1,x_2}(\alpha,\infty) = F_{x_1}(\alpha)$.
6. $a_1 > b_1$ e $a_2 > b_2 \rightarrow F_{x_1,x_2}(a_1,a_2) \geq F_{x_1,x_2}(a_1,b_2) \geq F_{x_1,x_2}(b_1,b_2)$.

UNICAMP

Densidade de Probabilidade

$$p_x(\alpha) \triangleq \frac{dF_x(\alpha)}{d\alpha}$$

$$F_x(a) = \int_{-\infty}^{\alpha} p_x(\beta) d\beta.$$

É necessário um pouco mais de cuidado para lidar com descontinuidades em F_x.

Exemplos de distribuições em $\mathbb{R}$

- Exponencial;
- Rayleigh;
- Uniforme;
- Cauchy;
- Gaussiana

UNICAMP

Transformações de VAs I

$$y = f(x) \quad \Longrightarrow \quad y(\omega) = f(x(\omega)).$$

Soma com uma constante:

$$\begin{aligned} y &= x + a \\ P[\{\omega : y(\omega) \leq \alpha\}] &= P[\{\omega : x(\omega) \leq \alpha - a\}] \\ F_y(\alpha) &= F_x(\alpha - a) \\ p_y(\alpha) &= p_x(\alpha - a). \end{aligned}$$

UNICAMP

Transformações de VAs II

Multiplicação por uma constante:

$$
\begin{aligned}
y &= bx \\
P[\{\omega : y(\omega) \leq \alpha\}] &= P\left[\left\{\omega : x(\omega) \leq \frac{\alpha}{b}\right\}\right] \\
F_y(\alpha) &= F_x\left(\frac{\alpha}{b}\right) \\
p_y(\alpha) &= \frac{1}{|b|} p_x\left(\frac{\alpha}{b}\right).
\end{aligned}
$$

UNICAMP

Transformações de VAs III

Soma de duas Variáveis Aleatórias:

$$z = x + y.$$

Quando $y = \beta \implies z = x + \beta \implies p_z(\gamma) = p_x(\gamma - \beta)$, ou também

$$p_z(\gamma|y = \beta) = p_x(\gamma - \beta|y = \beta)$$

Calculamos então densidade conjunta,

$$\begin{aligned} p_{z,y}(\gamma, \beta) &= p_z(\gamma|y = \beta)p_y(\beta) \\ &= p_x(\gamma - \beta|y = \beta)p_y(\beta) \\ &= p_{x,y}(\gamma - \beta, \beta). \end{aligned}$$

UNICAMP

Transformações de VAs IV

Soma de duas Variáveis Aleatórias:

$$z = x + y.$$

Integrando em y para achar p_z:

$$p_z(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{x,y}(\gamma - \beta, \beta) d\beta.$$

que quando x e y são independentes,x

$$p_z(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} p_x(\gamma - \beta) p_y(\beta) d\beta.$$

UNICAMP

Valor Esperado (Esperança)

$$E[x] = \sum_j x_j P[x_j]$$

$$E[x] \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \alpha p_x(\alpha) d\alpha.$$

Teorema Fundamental da Esperança

$$x = g(y)$$

$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} g(\beta) p_y(\beta) d\beta$$

$$\overline{x} = E[g(y)] = \overline{g(y)}$$

UNICAMP

Momentos de x

O n-ésimo momento central de x é defindo por

$$E[(x - \overline{x})^n] \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha - \overline{x})^n p_x(\alpha) d\alpha.$$

Em $\mathbb{R}$:

- Primeiro Momento, Média.
- Segundo Momento, Variancia (dispersão).
- Terceiro Momento (simetria).

Gaussiana em $\mathbb{R}^n$

Em $\mathbb{R}^2$,

$$p_{x_1,x_2}(\alpha_1,\alpha_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{(\alpha_1^2 - 2\rho\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2)}{2(1-\rho^2)}\right].$$

Em $\mathbb{R}^n$, construimos uma matriz de covariância

$$\Lambda_x = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n1} & \cdots & \lambda_{nn} \end{pmatrix} \implies p_x(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\Lambda_x|^{\frac{1}{2}}} \exp(-\frac{1}{2}\alpha\Lambda_x^{-1}\alpha^\top).$$

UNICAMP

Transformação Linear

$$y = Ax$$

onde $y \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $A \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.

Já que a densidade da soma de variaveis aleatórias independentes é a convolução de suas densidades,

$$\Lambda_y = A \Lambda_x A^\top.$$

UNICAMP

Parte III: Conceitos Básicos

Modelagem de Sistemas

- Modelagem de Sistemas.
- Incertezas.
- Introdução à Rastreamento.
  - Representação Probabilistica.
  - Bayes em Ação.
- Métodos de Rastreamento.

UNICAMP

Representação Probabilistica

1. Modelo probabilistico da dinâmica do sistema.
2. Observação do estado do sistema.
3. Correção (fusão de dados).

UNICAMP

Modelo da Dinâmica

Se, no instante de tempo i, nosso sistema é representado pelo vetor de estado $\vec{x}_i \in \mathbb{R}^n$, a dinâmica pode ser descrita como

$$P\left(\vec{x}_i\right) = P\left(\vec{x}_i | \vec{x}_0, \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{i-1}\right).$$

Uma forma de modelar a dinâmica de forma mais simples é

$$P\left(\vec{x}_i\right) = P\left(\vec{x}_i | \vec{x}_{i-1}\right).$$

UNICAMP

Observação

No caso do modelo determinístico,

$$\vec{y}_i = g\left(\vec{x}_i\right),$$

e no caso probabilistico,

$$P\left(\vec{y}_i\right) = P\left(\vec{y}_i | \vec{x}_i\right).$$

O que precisamos é:

$$P\left(\vec{x}_i\right) = P\left(\vec{x}_i | \vec{y}_i\right).$$

UNICAMP

Etapa de Predição

$\vec{x}_i$ depende de tudo que foi observado até então,

$$P\left(\vec{x}_i\right) = P\left(\vec{x}_i | \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_i\right).$$

A predição de $P'\left(\vec{x}_i\right)$ é

$$\begin{aligned}
P'\left(\vec{x}_i\right) &\triangleq P\left(\vec{x}_i | \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_{i-1}\right) \\
&= \int P\left(\vec{x}_i, \vec{x}_{i-1} | \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_{i-1}\right) d\vec{x}_{i-1} \\
&= \int P\left(\vec{x}_i | \vec{x}_{i-1}, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_{i-1}\right) P\left(\vec{x}_{i-1} | \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_{i-1}\right) d\vec{x}_{i-1} \\
&= \int P\left(\vec{x}_i | \vec{x}_{i-1}\right) P(\vec{x}_{i-1}) d\vec{x}_{i-1}.
\end{aligned}$$

UNICAMP

Etapa de Correção - I

Combina as informações de $P'(\vec{x}_i)$ e de $P(\vec{x}_i|\vec{y}_i)$ para achar

$$P(\vec{x}_i) \triangleq P(\vec{x}_i|\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_i)$$

Etapa de Correção - II

$$
\begin{aligned}
P\left(\vec{x}_i\right) \triangleq P\left(\vec{x}_i | \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_i\right) &= \frac{P\left(\vec{x}_i, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_i\right)}{P\left(\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_i\right)} \\
&= \frac{P\left(\vec{y}_i | \vec{x}_i, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_{i-1}\right) P\left(\vec{x}_i, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_{i-1}\right)}{P\left(\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_i\right)} \\
&= \frac{P\left(\vec{y}_i | \vec{x}_i, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_{i-1}\right) P\left(\vec{x}_i | \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_{i-1}\right) P\left(\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_{i-1}\right)}{P\left(\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_i\right)} \\
&= \frac{P\left(\vec{y}_i | \vec{x}_i\right) P\left(\vec{x}_i | \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_{i-1}\right) P\left(\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_{i-1}\right)}{\int P\left(\vec{x}_i, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_i\right) d\vec{x}_i}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{P\left(\vec{x}_i\right) = \frac{P\left(\vec{y}_i | \vec{x}_i\right) P\left(\vec{x}_i | \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_{i-1}\right)}{\int P\left(\vec{y}_i | \vec{x}_i\right) P\left(\vec{x}_i | \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_{i-1}\right) d\vec{x}_i}}
$$

UNICAMP

Parte IV: Filtros Preditivos

Modelagem de Sistemas

- Modelagem de Sistemas.
- Incertezas.
- Introdução à Rastreamento.
- Métodos de Rastreamento.
  - Filtro de Kalman.
  - Filtro de Particulas.
  - Filtro *Unscented*.

UNICAMP

Estimando um valor

Temos um resistor, com valor de fábrica

$$x = 15\Omega \pm 10\%.$$

Utilizaremos diversos multímetros para fazer leituras deste valor ...

UNICAMP

Varias medidas determinínsitcas de uma mesma quantidade...

- Após a primeira medida: $\hat{m}_1 = y_1$.

Varias medidas determinísitcas de uma mesma quantidade...

- Após a primeira medida: $\hat{m}_1 = y_1$.
- Após a segunda medida: $\hat{m}_2 = \frac{y_1+y_2}{2}$.

Varias medidas determinísitcas de uma mesma quantidade...

- Após a primeira medida: $\hat{m}_1 = y_1$.
- Após a segunda medida: $\hat{m}_2 = \frac{y_1+y_2}{2}$.
- Após a terceira medida: $\hat{m}_3 = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$.

Varias medidas determinínísitcas de uma mesma quantidade...

- Após a primeira medida: $\hat{m}_1 = y_1$.
- Após a segunda medida: $\hat{m}_2 = \frac{y_1+y_2}{2}$.
- Após a terceira medida: $\hat{m}_3 = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$.
- $\ldots$

UNICAMP

Varias medidas determinísitcas de uma mesma quantidade...

- Após a primeira medida: $\hat{m}_1 = y_1$.
- Após a segunda medida: $\hat{m}_2 = \frac{y_1+y_2}{2}$.
- Após a terceira medida: $\hat{m}_3 = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$.
- $\ldots$
- Após n medidas : $\boxed{\hat{m}_n = \dfrac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}.}$

UNICAMP

Recursivamente

- Após a primeira medida: $\hat{m}_1 = y_1$.

UNICAMP

Recursivamente

- Após a primeira medida: $\hat{m}_1 = y_1$.
- Após a segunda medida: $\hat{m}_2 = \frac{1}{2}\hat{m}_1 + \frac{1}{2}y_2$.

UNICAMP

Recursivamente

- Após a primeira medida: $\hat{m}_1 = y_1$.
- Após a segunda medida: $\hat{m}_2 = \frac{1}{2}\hat{m}_1 + \frac{1}{2}y_2$.
- Após a terceira medida: $\hat{m}_3 = \frac{2}{3}\hat{m}_2 + \frac{1}{3}y_3$.

UNICAMP

Recursivamente

- Após a primeira medida: $\hat{m}_1 = y_1$.
- Após a segunda medida: $\hat{m}_2 = \frac{1}{2}\hat{m}_1 + \frac{1}{2}y_2$.
- Após a terceira medida: $\hat{m}_3 = \frac{2}{3}\hat{m}_2 + \frac{1}{3}y_3$.
- $\ldots$

UNICAMP

Recursivamente

- Após a primeira medida: $\hat{m}_1 = y_1$.
- Após a segunda medida: $\hat{m}_2 = \frac{1}{2}\hat{m}_1 + \frac{1}{2}y_2$.
- Após a terceira medida: $\hat{m}_3 = \frac{2}{3}\hat{m}_2 + \frac{1}{3}y_3$.
- $\ldots$
- Após n medidas : $\boxed{\hat{m}_n = \frac{n-1}{n}\hat{m}_{n-1} + \frac{1}{n}y_n.}$

Usando Distribuições

Usando distriuições Gaussianas:

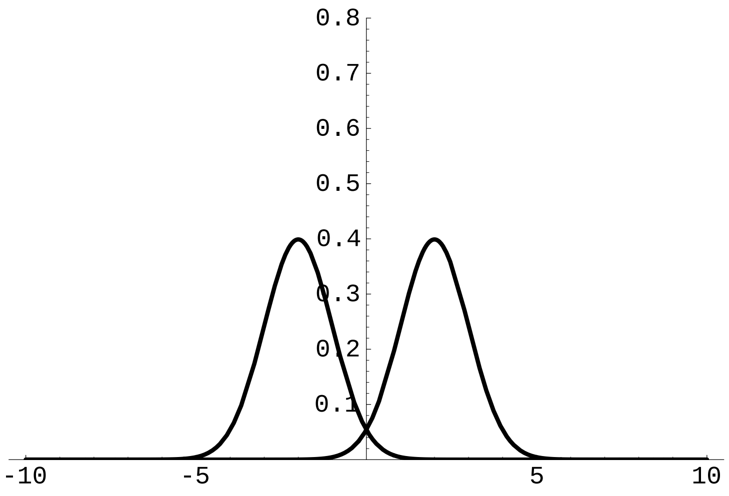
$$N(-2,1) \quad \text{e} \quad N(2,1)$$

UNICAMP

Usando Distribuições

Usando distriuições Gaussianas:

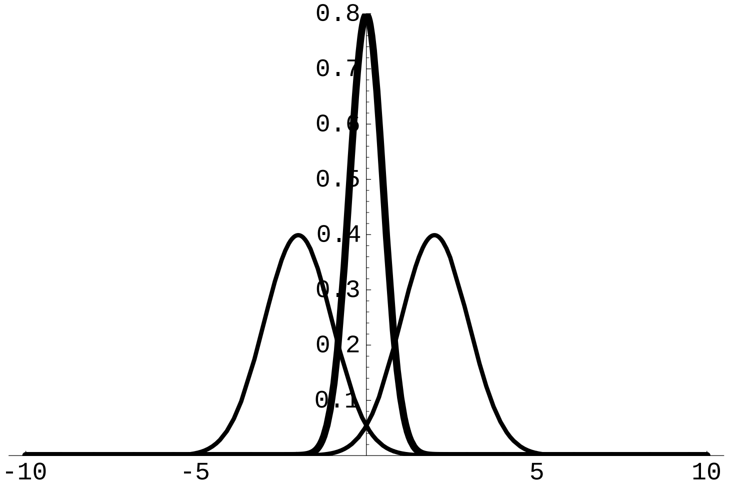
$$N(-2,1) \quad \text{e} \quad N(2,1)$$



Usando Distribuições

Usando distriuições Gaussianas:

$N(-2,1) \quad \text{e} \quad N(2,1)$



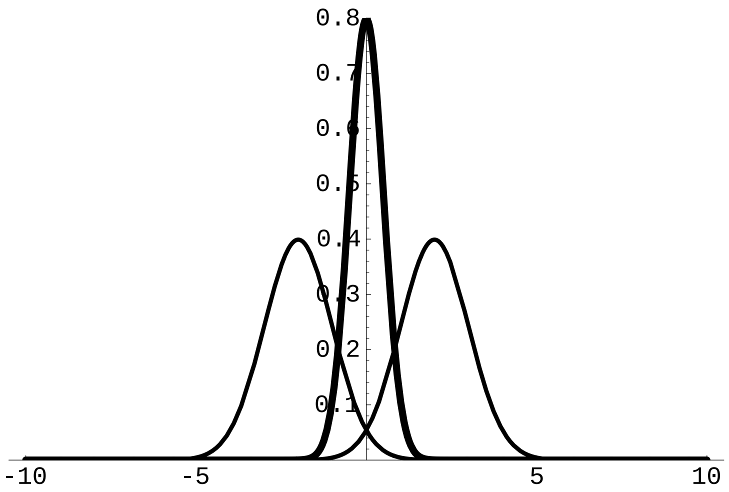
$N(0, \frac{1}{2})$

Usando Distribuições

Usando distriuições Gaussianas:

$N(-2, 1) \quad \text{e} \quad N(2, 1)$

$N(-2, 1) \quad \text{e} \quad N(2, 3)$

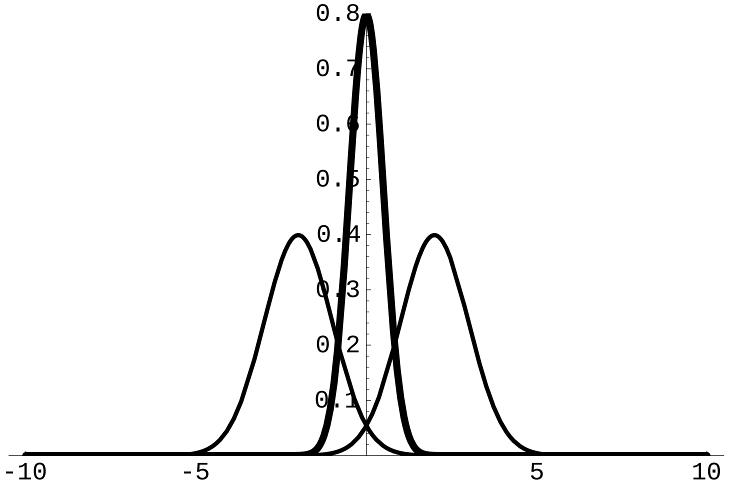


$N(0, \frac{1}{2})$

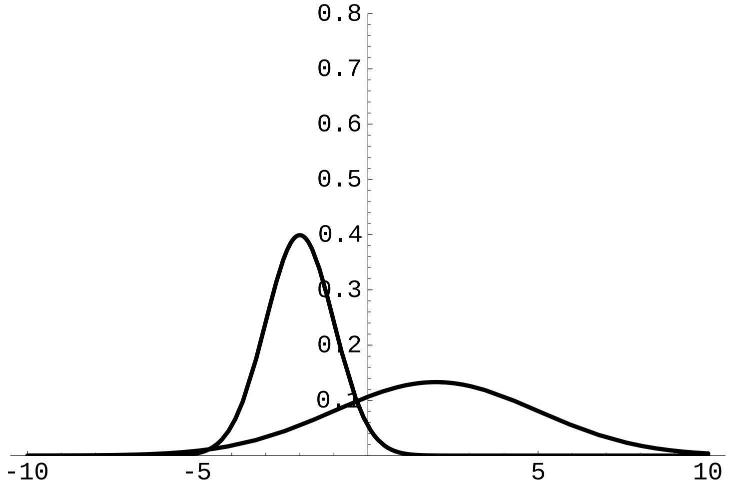
Usando Distribuições

Usando distriuições Gaussianas:

$N(-2,1) \quad \text{e} \quad N(2,1)$



$N(-2,1) \quad \text{e} \quad N(2,3)$

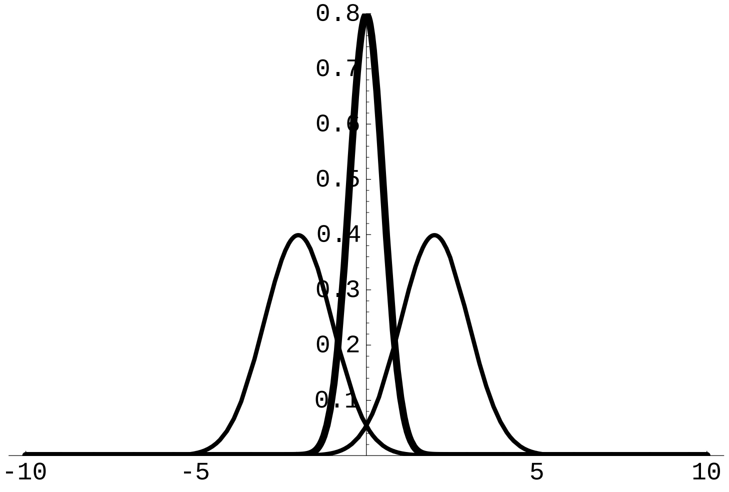


$N(0, \frac{1}{2})$

Usando Distribuições

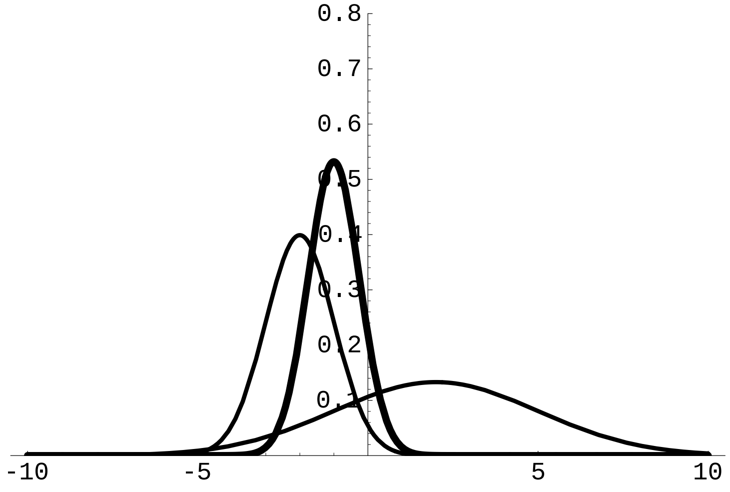
Usando distriuições Gaussianas:

$$N(-2,1) \quad \text{e} \quad N(2,1)$$



$$N(0,\frac{1}{2})$$

$$N(-1,1) \quad \text{e} \quad N(2,3)$$



$$N(-1,\frac{3}{4})$$

Kalman Filter

$$\begin{cases} \vec{x}_k & = \Phi_{k-1}\vec{x}_{k-1} + \vec{w}_{k-1} \\ \vec{z}_k & = H_k \vec{x}_k + v_k \end{cases}$$

- $\vec{x}_k$ é o vetor de estados, de dimensão n, e Φ_k é a matriz de transição ($n \times n$).

Kalman Filter

$$\begin{cases} \vec{x}_k &= \Phi_{k-1}\vec{x}_{k-1} + \vec{w}_{k-1} \\ \vec{z}_k &= H_k\vec{x}_k + v_k \end{cases}$$

- $\vec{x}_k$ é o vetor de estados, de dimensão n, e Φ_k é a matriz de transição ($n \times n$).
- $\vec{w}_k$ é um ruído branco de dimensão n com covariância $E[\vec{w}_k\vec{w}_i^\top] = \begin{cases} Q_k, & i = k \\ 0 & i \neq k. \end{cases}$

Kalman Filter

$$\begin{cases} \vec{x}_k &= \Phi_{k-1}\vec{x}_{k-1} + \vec{w}_{k-1} \\ \vec{z}_k &= H_k\vec{x}_k + v_k \end{cases}$$

- $\vec{x}_k$ é o vetor de estados, de dimensão n, e Φ_k é a matriz de transição ($n \times n$).
- $\vec{w}_k$ é um ruído branco de dimensão n com covariância $E[\vec{w}_k\vec{w}_i^\top] = \begin{cases} Q_k, & i = k \\ 0 & i \neq k. \end{cases}$
- $\vec{z}_k$ é o vetor observações (dim. m), e H_k é a matriz de observação ideal ($m \times n$).

UNICAMP

Kalman Filter

$$\begin{cases} \vec{x}_k &= \Phi_{k-1}\vec{x}_{k-1} + \vec{w}_{k-1} \\ \vec{z}_k &= H_k \vec{x}_k + v_k \end{cases}$$

- $\vec{x}_k$ é o vetor de estados, de dimensão n, e Φ_k é a matriz de transição ($n \times n$).
- $\vec{w}_k$ é um ruído branco de dimensão n com covariância $E[\vec{w}_k \vec{w}_i^\top] = \begin{cases} Q_k, & i = k \\ 0 & i \neq k. \end{cases}$
- $\vec{z}_k$ é o vetor observações (dim. m), e H_k é a matriz de observação ideal ($m \times n$).
- $\vec{v}_k$ é um ruído branco de dimensão m com covariância $E[\vec{v}_k \vec{v}_i^\top] = \begin{cases} R_k, & i = k \\ 0 & i \neq k. \end{cases}$

UNICAMP

Predição

Para predição utilizamos apenas a primeira equação do sistema:

$$\vec{x}'_k = \Phi_{k-1}\vec{x}_{k-1} + \vec{w}_{k-1}$$

onde $\hat{x}_{k-1} = E[\vec{x}_{k-1}]$, $P_{k-1} = E[(\vec{x}_{k-1} - \hat{x}_{k-1})(\vec{x}_{k-1} - \hat{x}_{k-1})^\top]$.

Qual é o valor de $\hat{x}'_k$ e de P'_k?

UNICAMP

Predição

Para predição utilizamos apenas a primeira equação do sistema:

$$\vec{x}'_k = \Phi_{k-1}\vec{x}_{k-1} + \vec{w}_{k-1}$$

onde $\hat{x}_{k-1} = E[\vec{x}_{k-1}]$, $P_{k-1} = E[(\vec{x}_{k-1} - \hat{x}_{k-1})(\vec{x}_{k-1} - \hat{x}_{k-1})^\top]$.

Qual é o valor de $\hat{x}'_k$ e de P'_k?

$$\hat{x}'_k = \Phi_{k-1}\hat{x}_{k-1}$$

$$P'_k = \Phi_{k-1}P_{k-1}\Phi^\top_{k-1} + Q_{k-1}$$

UNICAMP

Correção

Temos uma observação: Gaussiana com média y_k e covariância R_k.
Melhor estimativa será uma "média ponderada"

$$\vec{x}_k \sim (1-K)\text{predição} + K\,\text{observação}$$

reinterpretamos como

Correção

Temos uma observação: Gaussiana com média y_k e covariância R_k.
Melhor estimativa será uma "média ponderada"

$$\vec{x}_k \sim (1-K)\text{predição} + K\,\text{observação}$$

reinterpretamos como

$$\vec{x}_k \sim \text{predição} + K(\text{observação} - \text{predição})$$

UNICAMP

Correção II

Efetivamente

$$\boxed{\hat{x}_k = \hat{x}'_k + K_k(\vec{y}_k - H_k\hat{x}'_k)}$$

e

$$P_k = (I - K_k H_k)P'_k$$

Correção II

Efetivamente

$$\boxed{\hat{x}_k = \hat{x}'_k + K_k(\vec{y}_k - H_k\hat{x}'_k)}$$

e

$$P_k = (I - K_kH_k)P'_k$$

Para obtermos estabilidade numérica:

$$\boxed{P_k = (I - K_k)P'_k(I - K_k)^\top + K_kR_kK_k^\top}$$

UNICAMP

Filtro de Kalman

1. Predição:

$$\hat{x}'_k = \Phi_{k-1}\hat{x}'_{k-1}$$
$$P'_k = \Phi_{k-1}P_{k-1}\Phi_{k-1}^\top$$

UNICAMP

Filtro de Kalman

1. Predição:

$$\hat{x}'_k = \Phi_{k-1}\hat{x}'_{k-1}$$
$$P'_k = \Phi_{k-1}P_{k-1}\Phi^{\top}_{k-1}$$

2. Peso: $P'_k H^{\top}_k \left(H_k P'_k H^{\top}_k + R_k\right)^{-1}$

UNICAMP

Filtro de Kalman

1. Predição:
$$\hat{x}'_k = \Phi_{k-1}\hat{x}'_{k-1}$$
$$P'_k = \Phi_{k-1}P_{k-1}\Phi^\top_{k-1}$$

2. Peso: $P'_k H^\top_k \left(H_k P'_k H^\top_k + R_k\right)^{-1}$

3. Correção:
$$\hat{x}_k = \hat{x}'_{k-1} + K_k(\vec{y}_k - H_k\hat{x}'_{k-1})$$
$$P_k = (I - K_k)P'_k(I - K_k)^\top + K_k R_k K^\top_k$$

UNICAMP

Voltando ao exemplo trivial

Estimar um valor estático a partir de múltiplas medidas.

$$\begin{cases} x_k = x_{k-1} + w_k \\ y_k = x_k + v_k \end{cases}$$

Exemplo trivial

Predição: $$\hat{x}'_k = \hat{x}_{k-1}$$ $$P'_k = P_{k-1} + Q$$

Peso: $$K_k = \frac{P'_k}{P'_k + R}$$

Correção: $$\hat{x}_k = \hat{x}'_k + K_k(y_k - \hat{x}'_k)$$ $$P_k = (I - K_k)P'_k x$$