Tópicos da Teoria dos Jogos em Computação

Rafael C. S. Schouery Orlando Lee Flávio K. Miyazawa
Eduardo C. Xavier

Universidade Estadual de Campinas

De 27 a 31 de Julho de 2015

Jogos de Roteamento

Cenário típico atual. Em uma grande rede de comunicação (por exemplo, Internet), um conjunto de usuários quer enviar informações através da rede.

Jogos de Roteamento

Cenário típico atual. Em uma grande rede de comunicação (por exemplo, Internet), um conjunto de usuários quer enviar informações através da rede.

- Cada usuário tem um ponto de origem, um ponto de destino e uma certa demanda (quantidade de informação) que deseja enviar da origem ao destino.

Jogos de Roteamento

Cenário típico atual. Em uma grande rede de comunicação (por exemplo, Internet), um conjunto de usuários quer enviar informações através da rede.

- Cada usuário tem um ponto de origem, um ponto de destino e uma certa demanda (quantidade de informação) que deseja enviar da origem ao destino.
- Cada usuário deseja minimizar seu custo (tempo de envio).

Jogos de Roteamento

Outra situação típica. Cada usuário (motorista) de uma grande rede de transporte (malha rodoviária) deseja sair de seu ponto de origem e chegar a seu ponto de destino minimizando seu tempo de percurso.

Jogos de Roteamento

Outra situação típica. Cada usuário (motorista) de uma grande rede de transporte (malha rodoviária) deseja sair de seu ponto de origem e chegar a seu ponto de destino minimizando seu tempo de percurso.

Características comuns

Jogos de Roteamento

Outra situação típica. Cada usuário (motorista) de uma grande rede de transporte (malha rodoviária) deseja sair de seu ponto de origem e chegar a seu ponto de destino minimizando seu tempo de percurso.

Características comuns

- Um fator relevante no custo (tempo de envio/percurso) é o tráfego (quantidade de informação, número de jogadores) nos vários trechos da(s) rota(s).

Jogos de Roteamento

Outra situação típica. Cada usuário (motorista) de uma grande rede de transporte (malha rodoviária) deseja sair de seu ponto de origem e chegar a seu ponto de destino minimizando seu tempo de percurso.

Características comuns

- Um fator relevante no custo (tempo de envio/percurso) é o tráfego (quantidade de informação, número de jogadores) nos vários trechos da(s) rota(s).
- A escolha de cada jogador (usuário) depende das escolhas dos demais jogadores.

Preço da Anarquia

Preço da Anarquia

- **Problema de Teoria dos Jogos Computacional:**
  por um lado, cada jogador (racional) tenta escolher uma rota de custo mínimo.

Preço da Anarquia

- **Problema de Teoria dos Jogos Computacional:**
  por um lado, cada jogador (racional) tenta escolher uma rota de custo mínimo.

  Por outro, podemos pensar que uma entidade central quer encontrar um estado em que as escolhas dos jogadores minimizem o tráfego total (bem-estar social ótimo).

Preço da Anarquia

- **Problema de Teoria dos Jogos Computacional:** por um lado, cada jogador (racional) tenta escolher uma rota de custo mínimo.

  Por outro, podemos pensar que uma entidade central quer encontrar um estado em que as escolhas dos jogadores minimizem o tráfego total (bem-estar social ótimo).
- **Problema:** descobrir se existe algum estado em que cada jogador está satisfeito com sua escolha:

Preço da Anarquia

- **Problema de Teoria dos Jogos Computacional:** por um lado, cada jogador (racional) tenta escolher uma rota de custo mínimo.

  Por outro, podemos pensar que uma entidade central quer encontrar um estado em que as escolhas dos jogadores minimizem o tráfego total (bem-estar social ótimo).
- **Problema:** descobrir se existe algum estado em que cada jogador está satisfeito com sua escolha: Equilíbrio.

Preço da Anarquia

- **Problema de Teoria dos Jogos Computacional:** por um lado, cada jogador (racional) tenta escolher uma rota de custo mínimo.

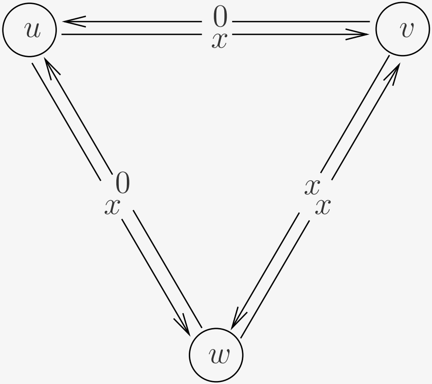
  Por outro, podemos pensar que uma entidade central quer encontrar um estado em que as escolhas dos jogadores minimizem o tráfego total (bem-estar social ótimo).
- **Problema:** descobrir se existe algum estado em que cada jogador está satisfeito com sua escolha: Equilíbrio.
- **Problema:** determinar o quão pior é este estado comparado com o custo social ótimo:

Preço da Anarquia

- **Problema de Teoria dos Jogos Computacional:** por um lado, cada jogador (racional) tenta escolher uma rota de custo mínimo.

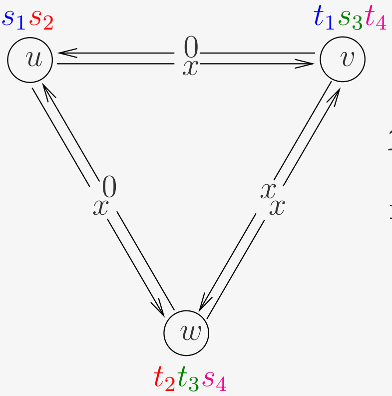
  Por outro, podemos pensar que uma entidade central quer encontrar um estado em que as escolhas dos jogadores minimizem o tráfego total (bem-estar social ótimo).
- **Problema:** descobrir se existe algum estado em que cada jogador está satisfeito com sua escolha: Equilíbrio.
- **Problema:** determinar o quão pior é este estado comparado com o custo social ótimo: Preço da Anarquia (Koutsoupias e Papadimitriou, 2009).

Jogo de Roteamento Atômico



O jogo é realizado em um grafo orientado $G = (V, E)$.
Cada aresta e está associada a uma função custo $c_e(x)$ contínua, não-negativa e não-decrescente.

Jogadores (pares OD)

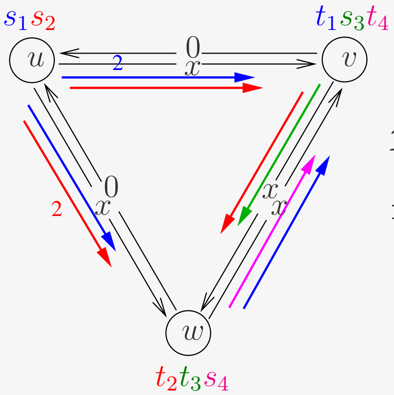


$\mathcal{I} = \{1, 2, 3, 4\}$

$\mathbf{r} = (3, 3, 1, 1)$

Conjunto de jogadores $\mathcal{I} = \{1, 2 \ldots, k\}$
Cada jogador i corresponde a um par OD (s_i, t_i).
Vetor de demandas $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_k)$.
Instância de um Jogo de Roteamento: (G, r, c)

Estratégias (fluxos)

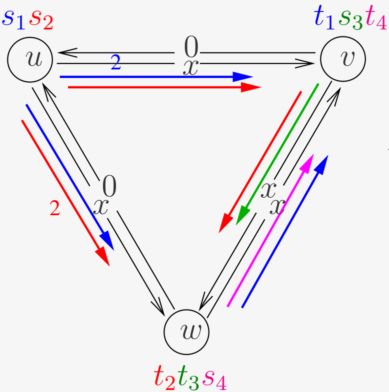


$\mathcal{I} = \{1, 2, 3, 4\}$

$\mathbf{r} = (3, 3, 1, 1)$

$\mathcal{P}^i$ denota o conjunto de todos os $s_i t_i$-caminhos na rede.
No exemplo da figura temos $\mathcal{P}^1 = \{(u, v), (u, w, v)\}$.

Estratégias (fluxos)

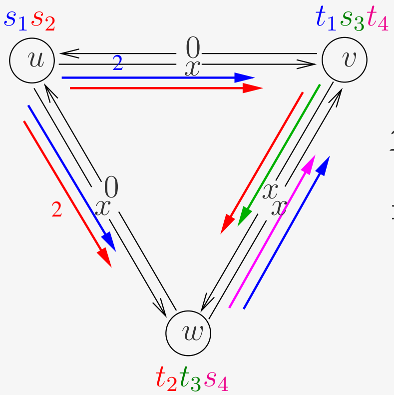


$\mathcal{I} = \{1, 2, 3, 4\}$

$\mathbf{r} = (3, 3, 1, 1)$

$\mathcal{P}^i$ denota o conjunto de todos os $s_i t_i$-caminhos na rede.
Um $s_i t_i$-fluxo é uma função $f^i : \mathcal{P}^i \mapsto \mathbb{R}_+$.
$f^i_P := f^i(P)$ é a quantidade fluxo que i manda ao longo de P.

Estratégias (fluxos)



$\mathcal{I} = \{1, 2, 3, 4\}$

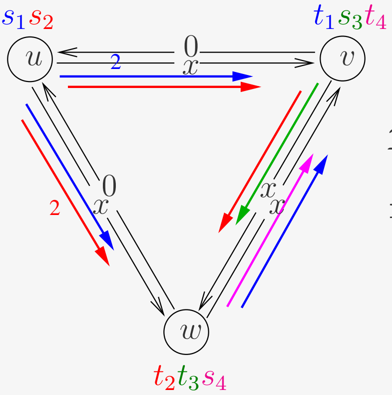
$\mathbf{r} = (3, 3, 1, 1)$

Figura: $\mathcal{P}^1 = \{(u, v), (u, w, v)\}$ $\quad f^1_{(u,v)} = 2 \quad f^1_{(u,w,v)} = 1$

Um $s_i t_i$-fluxo é viável se $\sum_{P \in \mathcal{P}^i} f^i_P = r_i$.

Fluxo $f = (f^1, \ldots, f^k)$ (perfil de estratégias).

Custo de um caminho

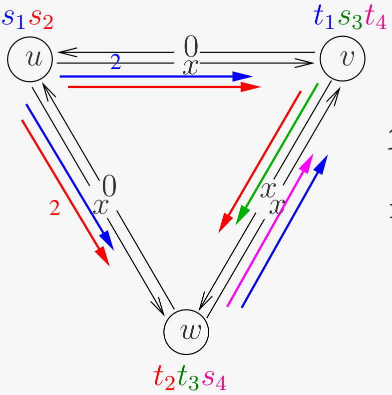


$\mathcal{I} = \{1, 2, 3, 4\}$

$\mathbf{r} = (3, 3, 1, 1)$

$s_i t_i$-Fluxo na aresta e: $f_e^i := \sum_{P \in \mathcal{P}^i : e \in P} f_P^i$
Fluxo total na aresta e: $f_e := \sum_{i \in \mathcal{I}} f_e^i = \sum_{i=1}^k f_e^i$
Custo de um caminho P: $c_P(f) := \sum_{e \in P} c_e(f_e)$

Custo de um caminho

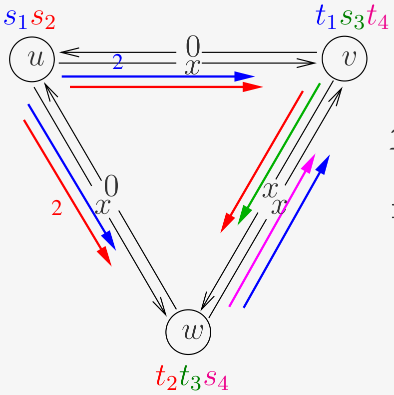


$\mathcal{I} = \{1, 2, 3, 4\}$

$\mathbf{r} = (3, 3, 1, 1)$

Custo de um caminho P: $c_P(f) := \sum_{e \in P} c_e(f_e)$
Figura: $c_{(u,v)}(f) = 2 + 1 = 3 \quad c_{(u,w,v)}(f) = (2 + 1) + (1 + 1) = 5$

Custo individual de um jogador

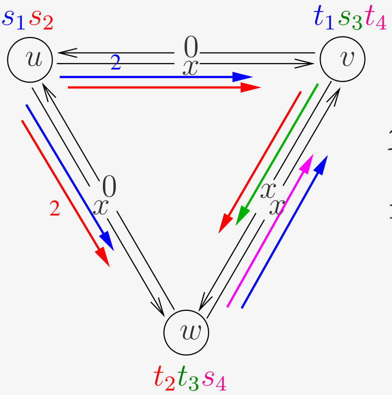


$\mathcal{I} = \{1, 2, 3, 4\}$

$\mathbf{r} = (3, 3, 1, 1)$

Custo do jogador i: $C^i(f) := \sum_{P \in \mathcal{P}^i} c_P(f) f_P^i$.
Figura: $C^1(f) = 2 \cdot c_{(u,v)}(f) + 1 \cdot c_{(u,w,v)}(f) = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 5 = 11$.

Custo social



$\mathcal{I} = \{1, 2, 3, 4\}$

$\mathbf{r} = (3, 3, 1, 1)$

Custo do fluxo f: $C(f) := \sum_{i=1}^{k} C^i(f) = \sum_{e \in E} c_e(f_e) f_e$.
Um fluxo f é ótimo se minimiza $C(f)$.
Figura: $C(f) = 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2$.

Equilíbrio de Nash em jogos atômicos

Seja $f = (f^1, \ldots, f^k)$ um fluxo.
Para um jogador i, denotamos

$$f^{(-i)} = (f^1, \ldots, f^{i-1}, f^{i+1}, \ldots, f^k)$$

e para toda estratégia $\tilde{f}^i$ de i denotamos

$$(\tilde{f}^i, f^{(-i)}) = (f^1, \ldots, f^{i-1}, \tilde{f}^i, f^{i+1}, \ldots, f^k).$$

Pela definição de equilíbrio de Nash, um fluxo f é um equilíbrio se para todo jogador i, temos que

$$C^i(f) \leq C^i(\tilde{f}^i, f^{(-i)}),$$

para toda estratégia $\tilde{f}^i$ de i.

Jogos atômicos divisíveis e indivisíveis

Jogos atômicos podem ser divididos em dois tipos:

- **Divisível:** este é o jogo como definimos até o momento.

Jogos atômicos divisíveis e indivisíveis

Jogos atômicos podem ser divididos em dois tipos:

- **Divisível:** este é o jogo como definimos até o momento.
- **Indivisível:** nesta versão, a estratégia de cada jogador i é um $s_i t_i$-fluxo f^i tal que $f^i_P = r_i$ para exatamente um caminho $P \in \mathcal{P}^i$ e $f_Q = 0$ para todo $Q \in \mathcal{P}^i \setminus \{P\}$.

Jogos atômicos divisíveis e indivisíveis

Jogos atômicos podem ser divididos em dois tipos:

- **Divisível:** este é o jogo como definimos até o momento.
- **Indivisível:** nesta versão, a estratégia de cada jogador i é um $s_i t_i$-fluxo f^i tal que $f^i_P = r_i$ para exatamente um caminho $P \in \mathcal{P}^i$ e $f_Q = 0$ para todo $Q \in \mathcal{P}^i \setminus \{P\}$.

Ou seja, no jogo atômico indivisível, cada jogador tem que enviar sua demanda ao longo de um **único** caminho.

Doravante, vamos nos restringir ao estudo de jogos atômicos indivisíveis.

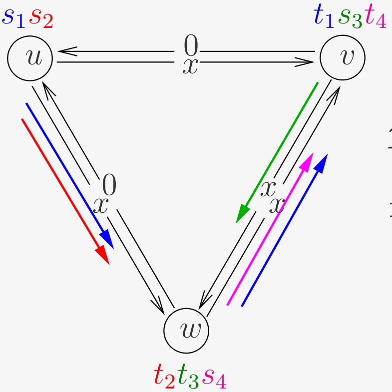
Equilíbrio em jogos atômicos indivisíveis

Lema. (Caracterização de equilíbrio)
Seja $f = (f_1, \ldots, f_k)$ um fluxo viável para (G, r, c). Então f é um equilíbrio se, e somente se, para todo jogador i e todo par $P, \tilde{P} \in \mathcal{P}^i$ com $f^i_P > 0$ temos que

$$c_P(f) \leq c_{\tilde{P}}(\tilde{f}),$$

onde $\tilde{f} = (\tilde{f}^i, f^{(-i)})$ e $\tilde{f}^i$ é o fluxo tal que $\tilde{f}^i_{\tilde{P}} = r_i$ e $\tilde{f}^i_Q = 0$ para todo $Q \in \mathcal{P}^i \setminus \{\tilde{P}\}$.

Equilíbrio

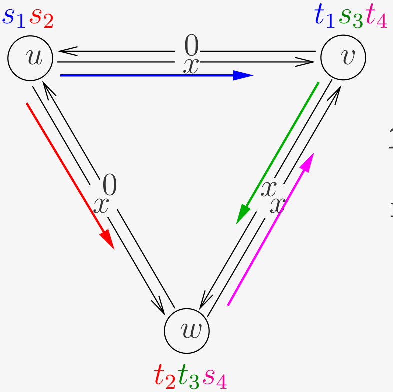


$\mathcal{I} = \{1, 2, 3, 4\}$

$\mathbf{r} = (1, 1, 1, 1)$

O fluxo f **não** é um equilíbrio pois $c_{(u,w,v)}(f) = 4 > 1 = c_{(u,v)}(\tilde{f})$, onde $\tilde{f} = (\tilde{f}^i, f^{(-1)})$, $\tilde{f}^i_{(u,v)} = 1$ e $\tilde{f}^i_{(u,w,v)} = 0$.

Equilíbrio

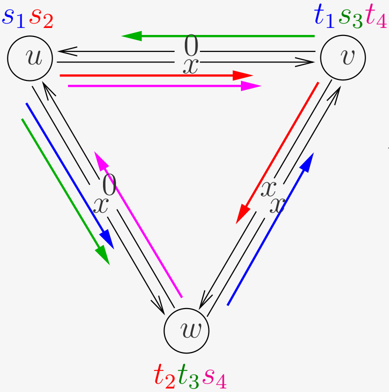


$\mathcal{I} = \{1, 2, 3, 4\}$

$\mathbf{r} = (1, 1, 1, 1)$

O fluxo f é um equilíbrio de custo $C(f) = 4$.
O fluxo f também é um fluxo ótimo.

Equilíbrio



$\mathcal{I} = \{1, 2, 3, 4\}$

$\mathbf{r} = (1, 1, 1, 1)$

O fluxo f é um equilíbrio de custo $C(f) = 10$.
Este e o anterior são os únicos equilíbrios.

Preço da Anarquia

Seja $I := (G, r, c)$ uma instância de um jogo de roteamento. Definimos $\mathrm{OPT}(I)$ como o custo de um fluxo ótimo de I e denotamos $\mathcal{E}(I)$ como o conjunto dos equilíbrios de I.

Preço da Anarquia

Seja $I := (G, r, c)$ uma instância de um jogo de roteamento. Definimos $\mathrm{OPT}(I)$ como o custo de um fluxo ótimo de I e denotamos $\mathcal{E}(I)$ como o conjunto dos equilíbrios de I.

O Preço da Anarquia de uma instância é

$$\mathrm{PoA}(I) := \frac{\max\{C(f) : f \in \mathcal{E}(I)\}}{\mathrm{OPT}(I)}$$

Preço da Anarquia

Seja $I := (G, r, c)$ uma instância de um jogo de roteamento. Definimos $\mathrm{OPT}(I)$ como o custo de um fluxo ótimo de I e denotamos $\mathcal{E}(I)$ como o conjunto dos equilíbrios de I.

O Preço da Anarquia de uma instância é

$$\mathrm{PoA}(I) := \frac{\max\{C(f) : f \in \mathcal{E}(I)\}}{\mathrm{OPT}(I)}$$

e o Preço da Anarquia de um jogo é

$$\mathrm{PoA} := \max_{I} \mathrm{PoA}(I).$$

Preço da Anarquia

Seja $I := (G, r, c)$ uma instância de um jogo de roteamento. Definimos $\mathrm{OPT}(I)$ como o custo de um fluxo ótimo de I e denotamos $\mathcal{E}(I)$ como o conjunto dos equilíbrios de I.

O Preço da Anarquia de uma instância é

$$\mathrm{PoA}(I) := \frac{\max\{C(f) : f \in \mathcal{E}(I)\}}{\mathrm{OPT}(I)}$$

e o Preço da Anarquia de um jogo é

$$\mathrm{PoA} := \max_I \mathrm{PoA}(I).$$

Para classes particulares de Jogos de Roteamento (por exemplo, restringindo a classe de funções custo), levamos em conta apenas instâncias desta classe no cálculo do Preço da Anarquia.

Preço da Estabilidade

O Preço da Estabilidade de um a instância é

$$\mathrm{PoE}(I) := \frac{\min\{C(f) : f \in \mathcal{E}(I)\}}{\mathrm{OPT}(I)}$$

Preço da Estabilidade

O Preço da Estabilidade de um a instância é

$$\mathrm{PoE}(I) := \frac{\min\{C(f) : f \in \mathcal{E}(I)\}}{\mathrm{OPT}(I)}$$

e o Preço da Estabilidade de um jogo é

$$\mathrm{PoE} := \min_I \mathrm{PoA}(I).$$

Preço da Estabilidade

O Preço da Estabilidade de um a instância é

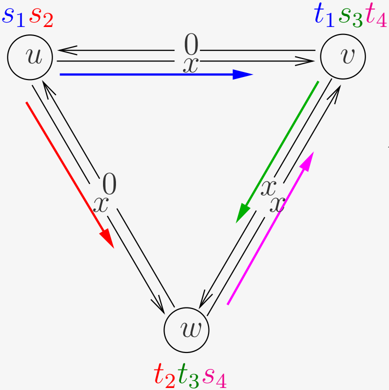
$$\mathrm{PoE}(I) := \frac{\min\{C(f) : f \in \mathcal{E}(I)\}}{\mathrm{OPT}(I)}$$

e o Preço da Estabilidade de um jogo é

$$\mathrm{PoE} := \min_{I} \mathrm{PoA}(I).$$

Para classes particulares de Jogos de Roteamento (por exemplo, restringindo a classe de funções custo), levamos em conta apenas instâncias desta classe no cálculo do Preço da Estabilidade.

Preço da Anarquia e Preço da Estabilidade



$\mathcal{I} = \{1, 2, 3, 4\}$

$\mathbf{r} = (1, 1, 1, 1)$

O fluxo ótimo tem custo 4.
Há exatamente dois equilíbrios de custos 4 e 10.
Assim, $\mathrm{PoA}(I) = 10/4 = 2.5$ e $\mathrm{PoE}(I) = 4/4 = 1$.

Problemas de interesse

Problemas de interesse

- Caracterizar quando uma instância (G, r, c) possui um equilíbrio.

Problemas de interesse

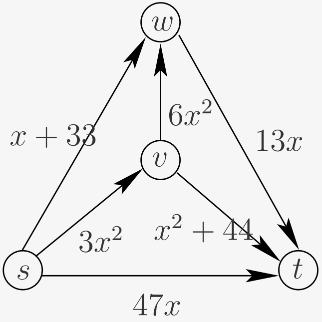
- Caracterizar quando uma instância (G, r, c) possui um equilíbrio.
- Determinar classes de demanda ou funções custo para as quais existe um equilíbrio.

Problemas de interesse

- Caracterizar quando uma instância (G, r, c) possui um equilíbrio.
- Determinar classes de demanda ou funções custo para as quais existe um equilíbrio.
- Para essas classes, determinar o Preço da Anarquia e/ou o Preço da Estabilidade.

Existência de equilíbrio

Instância de um jogo atômico devido a Goemans, Mirrokni e Vetta (2005) em que os custos são funções polinomiais e que **não** possui equilíbrio.



Jogadores 1 e 2, ambos com par OD igual a (s, t) e $r = (1, 2)$.

Existência de equilíbrio

- Como mostrar que um jogo possui um equilíbrio?

Existência de equilíbrio

- Como mostrar que um jogo possui um equilíbrio?
- Para certos tipos de jogos, isto é relativamente simples, como por exemplo jogos potenciais.

Existência de equilíbrio

- Como mostrar que um jogo possui um equilíbrio?
- Para certos tipos de jogos, isto é relativamente simples, como por exemplo jogos potenciais.
- Para este tipo de jogo, existe uma função potencial definida sobre os perfis de estratégia tal que um ótimo global desta corresponde a um equilíbrio de Nash.

Existência de equilíbrio

- Como mostrar que um jogo possui um equilíbrio?
- Para certos tipos de jogos, isto é relativamente simples, como por exemplo jogos potenciais.
- Para este tipo de jogo, existe uma função potencial definida sobre os perfis de estratégia tal que um ótimo global desta corresponde a um equilíbrio de Nash.
- Várias classes de jogos de roteamento são jogos potenciais.

Jogos potenciais

Lembre-se que denotamos um jogo na forma normal como uma tripla $(\mathcal{I}, \{\mathcal{S}_i\}_{i \in \mathcal{I}}, \{C_i\}_{i \in \mathcal{I}})$ onde $\mathcal{I}$ é o conjunto de jogadores, $\mathcal{S}_i$ é o conjunto de estratégias do jogador i e C_i é a função custo do jogador i.

Denotamos o conjunto de todos os perfis do jogo por $\mathcal{S}$.

Jogos potenciais

Lembre-se que denotamos um jogo na forma normal como uma tripla $(\mathcal{I}, \{\mathcal{S}_i\}_{i \in \mathcal{I}}, \{C_i\}_{i \in \mathcal{I}})$ onde $\mathcal{I}$ é o conjunto de jogadores, $\mathcal{S}_i$ é o conjunto de estratégias do jogador i e C_i é a função custo do jogador i.
Denotamos o conjunto de todos os perfis do jogo por $\mathcal{S}$.

Exemplo. A forma normal de um jogo de roteamento atômico é

$$(\mathcal{I}, \{\mathcal{P}^i\}_{i \in \mathcal{I}}, \{C^i\}_{i \in \mathcal{I}}).$$

(Omitimos a descrição do grafo e das demandas por simplicidade.)

Jogos potenciais

Uma função $\Phi\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ é uma função potencial para um jogo $(\mathcal{I}, (\mathcal{S}_i)_{i\in\mathcal{I}}, (C_i)_{i\in\mathcal{I}})$ se, para todo $i \in \mathcal{I}$ e para todo $s \in \mathcal{S}$, temos que:

$$C_i(s'_i, s_{-i}) - C_i(s_i, s_{-i}) \geq 0 \Leftrightarrow \Phi(s'_i, s_{-i}) - \Phi(s_i, s_{-i}) \geq 0$$

para todo $s'_i \in \mathcal{S}_i$.

Jogos potenciais

Uma função $\Phi\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ é uma função potencial para um jogo $(\mathcal{I}, (\mathcal{S}_i)_{i\in\mathcal{I}}, (C_i)_{i\in\mathcal{I}})$ se, para todo $i \in \mathcal{I}$ e para todo $s \in \mathcal{S}$, temos que:

$$C_i(s'_i, s_{-i}) - C_i(s_i, s_{-i}) \geq 0 \Leftrightarrow \Phi(s'_i, s_{-i}) - \Phi(s_i, s_{-i}) \geq 0$$

para todo $s'_i \in \mathcal{S}_i$.

Em outras palavras, a variação de custo do jogador i ao trocar a estratégia s_i por s'_i é positiva se, e somente se, a variação de potencial nos pontos correspondentes é positiva.

Jogos potenciais

Uma função $\Phi\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ é uma função potencial para um jogo $(\mathcal{I}, (\mathcal{S}_i)_{i\in\mathcal{I}}, (C_i)_{i\in\mathcal{I}})$ se, para todo $i \in \mathcal{I}$ e para todo $s \in \mathcal{S}$, temos que:

$$C_i(s'_i, s_{-i}) - C_i(s_i, s_{-i}) \geq 0 \Leftrightarrow \Phi(s'_i, s_{-i}) - \Phi(s_i, s_{-i}) \geq 0$$

para todo $s'_i \in \mathcal{S}_i$.

Em outras palavras, a variação de custo do jogador i ao trocar a estratégia s_i por s'_i é positiva se, e somente se, a variação de potencial nos pontos correspondentes é positiva.

Uma função potencial é exata se

$$\Phi(s'_i, s_{-i}) - \Phi(s_i, s_{-i}) = C_i(s'_i, s_{-i}) - C_i(s_i, s_{-i}).$$

Jogos potenciais

Um jogo finito que possui uma função potencial (exata) é chamado jogo potencial (exato). .

Teorema. Seja $(\mathcal{I}, (\mathcal{S}_i)_{i \in \mathcal{I}}, (C_i)_{i \in \mathcal{I}})$ um jogo potencial. O perfil de estratégias que minimiza sua função potencial é um equilíbrio de Nash.

Jogos potenciais

Um jogo finito que possui uma função potencial (exata) é chamado jogo potencial (exato). .

Teorema. Seja $(\mathcal{I}, (\mathcal{S}_i)_{i \in \mathcal{I}}, (C_i)_{i \in \mathcal{I}})$ um jogo potencial. O perfil de estratégias que minimiza sua função potencial é um equilíbrio de Nash.

Assim, um método para mostrar que um jogo possui equilíbrio é exibir uma função potencial para este.

Jogos atômicos com equilíbrio

Teorema. Seja (G, r, c) uma instância atômica na qual $r_i = 1$ para todo $i \in \mathcal{I}$. Então (G, r, c) possui um equilíbrio.

Ideia: mostrar que a função $\Phi(f) = \sum_{e \in E} \sum_{j=1}^{f_e} c_e(j)$ é uma função potencial exata.

Jogos atômicos com equilíbrio

Teorema. Seja (G, r, c) uma instância atômica na qual $r_i = 1$ para todo $i \in \mathcal{I}$. Então (G, r, c) possui um equilíbrio.

Ideia: mostrar que a função $\Phi(f) = \sum_{e \in E} \sum_{j=1}^{f_e} c_e(j)$ é uma função potencial exata.

Teorema. Seja (G, r, c) uma instância de um jogo atômico onde para cada $e \in E$, a função custo c_e é afim com coeficientes não-negativos. Então (G, r, c) possui um equilíbrio.

Ideia: mostrar que uma certa função Φ (mais complicada) é uma função potencial.

Preço da Anarquia

Teorema. (Awerbuch, Azar e Epstein, Christoudoulu e Koutsupias (2005))
Seja (G, r, c) uma instância atômica na qual $r_i = 1$ para todo $i \in \mathcal{I}$ e cada aresta e tem custo afim $c_e(x) = a_e(x) + b_e$ com $a_e, b_e \geq 0$. Então o preço da anarquia de (G, r, c) é no máximo $5/2$. Além disso, o limite é justo.

Preço da Anarquia

Teorema. (Awerbuch, Azar e Epstein, Christoudoulu e Koutsupias (2005))
Seja (G, r, c) uma instância atômica na qual $r_i = 1$ para todo $i \in \mathcal{I}$ e cada aresta e tem custo afim $c_e(x) = a_e(x) + b_e$ com $a_e, b_e \geq 0$. Então o preço da anarquia de (G, r, c) é no máximo $5/2$. Além disso, o limite é justo.

Teorema. (Awerbuch, Azar e Epstein (2005))
Seja (G, r, c) uma instância de um jogo atômico na qual cada aresta e tem custo afim $c_e(x) = a_e(x) + b_e$ com $a_e, b_e \geq 0$. Então o preço da anarquia de (G, r, c) é no máximo $1 + \phi \approx 2.618$ onde $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ é a razão áurea. Além disso, o limite é justo.

Jogo de Roteamento Não-Atômico

- Para cada par OD, há um número infinito (ou muito grande) de jogadores associado a este.

Jogo de Roteamento Não-Atômico

- Para cada par OD, há um número infinito (ou muito grande) de jogadores associado a este.
- Cada jogador tem uma demanda infinitesimal em relação à demanda total.

Jogo de Roteamento Não-Atômico

- Para cada par OD, há um número infinito (ou muito grande) de jogadores associado a este.
- Cada jogador tem uma demanda infinitesimal em relação à demanda total.
- Nenhum jogador sozinho consegue influenciar o fluxo (tráfego) na rede.

Jogo de Roteamento Não-Atômico

- Para cada par OD, há um número infinito (ou muito grande) de jogadores associado a este.
- Cada jogador tem uma demanda infinitesimal em relação à demanda total.
- Nenhum jogador sozinho consegue influenciar o fluxo (tráfego) na rede.
- Exemplo típico de jogos de roteamento não-atômico: usuários da Internet ou pedestres em uma grande metrópole.

Jogo de Roteamento Não-Atômico

- Para cada par OD, há um número infinito (ou muito grande) de jogadores associado a este.
- Cada jogador tem uma demanda infinitesimal em relação à demanda total.
- Nenhum jogador sozinho consegue influenciar o fluxo (tráfego) na rede.
- Exemplo típico de jogos de roteamento não-atômico: usuários da Internet ou pedestres em uma grande metrópole.
- Ao contrário, em jogos atômicos pelo menos um jogador consegue influenciar o tráfego. Diz-se que ele tem poder de mercado.

Equilíbrio de Wardrop

No equilíbrio de Nash (jogos atômicos), o custo de cada jogador é $C^i(f) := \sum_{P \in \mathcal{P}^i} c_P(f) f^i_P$.

Equilíbrio de Wardrop

No equilíbrio de Nash (jogos atômicos), o custo de cada jogador é $C^i(f) := \sum_{P \in \mathcal{P}^i} c_P(f) f_P^i$.

Isto não é conveniente para o o modelo não-atômico já que as demandas são infinitesimais e o custo individual tende a zero.

Equilíbrio de Wardrop

No equilíbrio de Nash (jogos atômicos), o custo de cada jogador é $C^i(f) := \sum_{P \in \mathcal{P}^i} c_P(f) f_P^i$.

Isto não é conveniente para o o modelo não-atômico já que as demandas são infinitesimais e o custo individual tende a zero.

Para esse modelo usa-se o Equilíbrio de Wardrop introduzido por Wardrop (1952).

Equilíbrio de Wardrop

No equilíbrio de Nash (jogos atômicos), o custo de cada jogador é $C^i(f) := \sum_{P \in \mathcal{P}^i} c_P(f) f_P^i$.

Isto não é conveniente para o o modelo não-atômico já que as demandas são infinitesimais e o custo individual tende a zero.

Para esse modelo usa-se o Equilíbrio de Wardrop introduzido por Wardrop (1952).

Neste modelo, cada jogador escolhe caminhos de custo mínimo para enviar seu fluxo.

Equilíbrio de Wardrop

Definição. (Equilíbrio de Wardrop) Seja f um fluxo viável em uma instância (G, r, c) de um jogo não-atômico. Um fluxo f é um equilíbrio em (G, r, c) se, para todo jogador $i \in \mathcal{I}$ e todo par $P, \tilde{P} \in \mathcal{P}^i$ com $f_P^i > 0$, temos que

$$c_P(f) \leq c_{\tilde{P}}(f).$$

Equilíbrio de Wardrop

Definição. (Equilíbrio de Wardrop) Seja f um fluxo viável em uma instância (G, r, c) de um jogo não-atômico. Um fluxo f é um equilíbrio em (G, r, c) se, para todo jogador $i \in \mathcal{I}$ e todo par $P, \tilde{P} \in \mathcal{P}^i$ com $f_P^i > 0$, temos que

$$c_P(f) \leq c_{\tilde{P}}(f).$$

Em um equilíbrio de Wardrop f, todos os caminhos usados por um jogador i tem custo mínimo. Em particular, todos os caminhos usados pelo jogador i têm o mesmo custo.

Equilíbrio de Wardrop

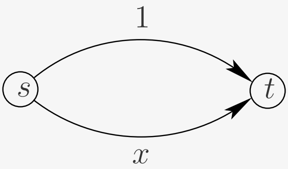
Definição. (Equilíbrio de Wardrop) Seja f um fluxo viável em uma instância (G, r, c) de um jogo não-atômico. Um fluxo f é um equilíbrio em (G, r, c) se, para todo jogador $i \in \mathcal{I}$ e todo par $P, \tilde{P} \in \mathcal{P}^i$ com $f_P^i > 0$, temos que

$$c_P(f) \leq c_{\tilde{P}}(f).$$

Em um equilíbrio de Wardrop f, todos os caminhos usados por um jogador i tem custo mínimo. Em particular, todos os caminhos usados pelo jogador i têm o mesmo custo.

Intuitivamente, cada jogador enxerga os custos da rede como sendo fixos e assim, ele escolhe apenas caminhos de custo mínimo para enviar seu fluxo.

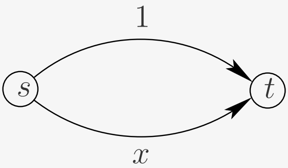
Exemplo de Pigou



Há um número infinito de jogadores com par OD (s, t) e a demanda total é 1.

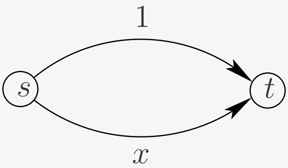
Note que a aresta inferior tem custo menor se o fluxo nela for menor que 1.

Exemplo de Pigou



O único equilíbrio é o que todos os jogadores escolhem a aresta inferior (custo $1 \cdot 1 = 1$).

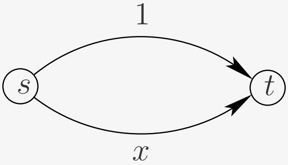
Exemplo de Pigou



O único equilíbrio é o que todos os jogadores escolhem a aresta inferior (custo $1 \cdot 1 = 1$).

A solução ótima é dividir o fluxo igualmente entre as duas arestas (custo $(1/2) \cdot 1 + (1/2) \cdot (1/2) = 3/4$).

Exemplo de Pigou

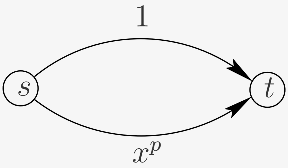


O único equilíbrio é o que todos os jogadores escolhem a aresta inferior (custo $1 \cdot 1 = 1$).

A solução ótima é dividir o fluxo igualmente entre as duas arestas (custo $(1/2) \cdot 1 + (1/2) \cdot (1/2) = 3/4$).

Assim, o Preço da Anarquia desta instância é $4/3$.

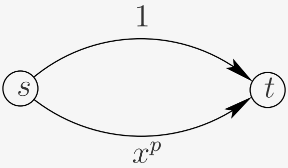
Exemplo Não-linear de Pigou



Há um número infinito de jogadores com par OD (s, t) e a demanda total é 1.

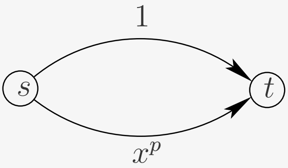
Note que a aresta inferior tem custo menor se o fluxo nela for menor que 1 ($p \geq 1$).

Exemplo Não-linear de Pigou



Como antes, o único equilíbrio é o que todos os jogadores escolhem a aresta inferior (custo $1 \cdot 1 = 1$).

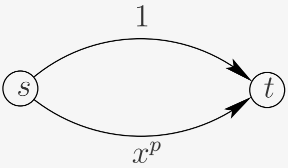
Exemplo Não-linear de Pigou



Como antes, o único equilíbrio é o que todos os jogadores escolhem a aresta inferior (custo $1 \cdot 1 = 1$).

O fluxo ótimo envia $\epsilon < 1$ unidades de fluxo pela aresta superior e tem custo $\epsilon + (1-\epsilon)^p$, onde ϵ tende a zero à medida que p tende a infinito.

Exemplo Não-linear de Pigou



Como antes, o único equilíbrio é o que todos os jogadores escolhem a aresta inferior (custo $1 \cdot 1 = 1$).

O fluxo ótimo envia $\epsilon < 1$ unidades de fluxo pela aresta superior e tem custo $\epsilon + (1 - \epsilon)^p$, onde ϵ tende a zero à medida que p tende a infinito.

Pode-se mostrar que $\epsilon = 1 - (p+1)^{1/p}$. Quando p tende a infinito, o custo do fluxo ótimo tende a zero. Logo, o preço da anarquia é ilimitado.

Equilíbrio de Wardrop

Pode-se mostrar que todo jogo de roteamento não-atômico possui um equilíbrio de Wardrop que é único em um certo sentido.

Equilíbrio de Wardrop

Pode-se mostrar que todo jogo de roteamento não-atômico possui um equilíbrio de Wardrop que é único em um certo sentido.

Ideia: considere a *função potencial*

Equilíbrio de Wardrop

Pode-se mostrar que todo jogo de roteamento não-atômico possui um equilíbrio de Wardrop que é único em um certo sentido.

Ideia: considere a *função potencial*

$$\Phi(f) = \sum_{e \in E} \int_0^{f_e} c_e(x)dx.$$

Equilíbrio de Wardrop

Pode-se mostrar que todo jogo de roteamento não-atômico possui um equilíbrio de Wardrop que é único em um certo sentido.

Ideia: considere a *função potencial*

$$\Phi(f) = \sum_{e \in E} \int_0^{f_e} c_e(x)dx.$$

É fácil ver que Φ é convexa. Usando-se cálculo variacional pode-se mostrar o seguinte.

Equilíbrio de Wardrop

Pode-se mostrar que todo jogo de roteamento não-atômico possui um equilíbrio de Wardrop que é único em um certo sentido.

Ideia: considere a *função potencial*

$$\Phi(f) = \sum_{e \in E} \int_0^{f_e} c_e(x)dx.$$

É fácil ver que Φ é convexa. Usando-se cálculo variacional pode-se mostrar o seguinte.

Proposição. Seja (G, r, c) uma instância de um jogo não-atômico. Então um fluxo viável f é um equilíbrio de Wardrop em (G, r, c) se e somente se é o mínimo global de Φ.

Equilíbrio de Wardrop

Teorema. Seja (G, r, c) uma instância de um jogo não-atômico. Então

(a) (G, r, c) possui um equilíbrio, e

(b) se f e $\tilde{f}$ são equilíbrios de (G, r, c), então $c_e(f_e) = c_e(\tilde{f}_e)$ para todo $e \in E$.

Além disso, todos os equilíbrios de um jogo não-atômico têm o mesmo custo, e portanto, o preço da anarquia é igual ao preço da estabilidade.

Equilíbrio de Wardrop

Teorema. Seja (G, r, c) uma instância de um jogo não-atômico. Então

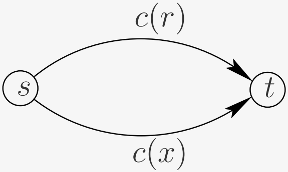
(a) (G, r, c) possui um equilíbrio, e

(b) se f e $\tilde{f}$ são equilíbrios de (G, r, c), então $c_e(f_e) = c_e(\tilde{f}_e)$ para todo $e \in E$.

Além disso, todos os equilíbrios de um jogo não-atômico têm o mesmo custo, e portanto, o preço da anarquia é igual ao preço da estabilidade.

Pergunta: qual é o Preço da Anarquia?

Preço da Anarquia

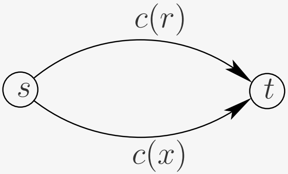


Há um número infinito de jogadores com par OD (s, t) e a demanda total na rede é r.

Suponha que as funções custo pertencem a uma classe $\mathcal{C}$.

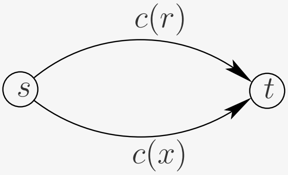
A aresta superior tem custo $c(r)$ (fixo) e a aresta inferior tem custo igual a $c(x)$ onde $c \in \mathcal{C}$.

Preço da Anarquia



O equilíbrio de Wardrop envia toda a demanda pela aresta inferior a um custo total de $rc(r)$.

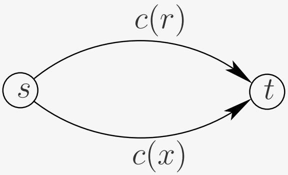
Preço da Anarquia



O equilíbrio de Wardrop envia toda a demanda pela aresta inferior a um custo total de $rc(r)$.

O fluxo ótimo envia uma certa quantidade x pela aresta inferior e tem custo total $\min_{0\leq x\leq r}\{xc(x)+(r-x)c(r)\} = \min_{x\geq 0}\{xc(x)+(r-x)c(r)\} = rc(r) - \max_{x\geq 0}\{x(c(r)-c(x))\}$.

Preço da Anarquia



Logo, o Preço da Anarquia desta instância é

$$\left(1 - \frac{\max_{x \geq 0}\{x(c(r) - c(x))\}}{rc(r)}\right)^{-1}.$$

Preço da Anarquia

Para toda função $c \in \mathcal{C}$ e todo $r \in \mathbb{R}_+$, seja

$$\beta(r, c) = \frac{1}{rc(r)} \max_{x \in \mathbb{R}_+} \{x(c(r) - c(x))\},$$

onde, por convenção, $0/0 = 0$.

Preço da Anarquia

Para toda função $c \in \mathcal{C}$ e todo $r \in \mathbb{R}_+$, seja

$$\beta(r, c) = \frac{1}{rc(r)} \max_{x \in \mathbb{R}_+} \{x(c(r) - c(x))\},$$

onde, por convenção, $0/0 = 0$.

Defina o valor de anarquia β como

$$\beta(\mathcal{C}) = \sup_{c \in \mathcal{C}} \sup_{r \in \mathbb{R}_+} \beta(r, c).$$

Preço da Anarquia

Para toda função $c \in \mathcal{C}$ e todo $r \in \mathbb{R}_+$, seja

$$\beta(r, c) = \frac{1}{rc(r)} \max_{x \in \mathbb{R}_+} \{x(c(r) - c(x))\},$$

onde, por convenção, $0/0 = 0$.

Defina o valor de anarquia β como

$$\beta(\mathcal{C}) = \sup_{c \in \mathcal{C}} \sup_{r \in \mathbb{R}_+} \beta(r, c).$$

Pelo exemplo anterior, $\text{PoA} \geq (1 - \beta(\mathcal{C}))^{-1}$.

Preço da Anarquia

Teorema. (Roughgarden, 2003)
Seja (G, r, c) uma instância de um jogo não-atômico com custos em $\mathcal{C}$. Então o preço de anarquia de (G, r, c) é no máximo $(1 - \beta(\mathcal{C}))^{-1}$.

Preço da Anarquia

Teorema. (Roughgarden, 2003)
Seja (G, r, c) uma instância de um jogo não-atômico com custos em $\mathcal{C}$. Então o preço de anarquia de (G, r, c) é no máximo $(1 - \beta(\mathcal{C}))^{-1}$.

Curiosamente, o exemplo de Pigou e este resultado mostram que o preço de anarquia não depende da topologia da rede mas apenas da classe de funções custo consideradas.

Preço da Anarquia

Teorema. (Roughgarden, 2003)
Seja (G, r, c) uma instância de um jogo não-atômico com custos em $\mathcal{C}$. Então o preço de anarquia de (G, r, c) é no máximo $(1 - \beta(\mathcal{C}))^{-1}$.

Curiosamente, o exemplo de Pigou e este resultado mostram que o preço de anarquia não depende da topologia da rede mas apenas da classe de funções custo consideradas.

É possível derivar uma fórmula explícita para $\beta(\mathcal{C})$ para classes particulares de funções custo como funções afins e polinômios de grau máximo d.

Obrigado!