Tópicos da Teoria dos Jogos em Computação

Rafael C. S. Schouery Orlando Lee Flávio K. Miyazawa
Eduardo C. Xavier

Universidade Estadual de Campinas

De 27 a 31 de Julho de 2015

Jogos Cooperativos

Jogadores

Jogos Cooperativos

Jogadores

- Maximizam sua utilidade como em jogos não cooperativos.

Jogos Cooperativos

Jogadores

- Maximizam sua utilidade como em jogos não cooperativos.
- Podem agir não só individualmente mas também em grupo, formando uma coalizão.

Jogos Cooperativos

Em jogos anteriores, jogador

Jogos Cooperativos

Em jogos anteriores, jogador

- Muda de estratégia apenas se for vantajoso para si.

Jogos Cooperativos

Em jogos anteriores, jogador

- Muda de estratégia apenas se for vantajoso para si.
- Não tem benefício ao mudar de estratégia sozinho, quando em Equilíbrio de Nash

Jogos Cooperativos

Em jogos anteriores, jogador

- Muda de estratégia apenas se for vantajoso para si.
- Não tem benefício ao mudar de estratégia sozinho, quando em Equilíbrio de Nash

Jogos cooperativos: Jogadores

Jogos Cooperativos

Em jogos anteriores, jogador

- Muda de estratégia apenas se for vantajoso para si.
- Não tem benefício ao mudar de estratégia sozinho, quando em Equilíbrio de Nash

Jogos cooperativos: Jogadores

- Podem fazer coalizão (cooperar) e mudar em conjunto suas estratégias, se for vantajoso para a coalizão

Jogos Cooperativos

Def.: Um *jogo cooperativo com utilidades transferíveis* (UT) consiste de um par (A, v) onde

Jogos Cooperativos

Def.: Um *jogo cooperativo com utilidades transferíveis* (UT) consiste de um par (A, v) onde

- A é um conjunto de n jogadores (agentes)

Jogos Cooperativos

Def.: Um *jogo cooperativo com utilidades transferíveis* (UT) consiste de um par (A, v) onde

- A é um conjunto de n jogadores (agentes)
- $v(S)$, para cada $S \subseteq A$, é a utilidade a ser distribuída para a possível coalizão S

Jogos Cooperativos

Def.: Um *jogo cooperativo com utilidades transferíveis* (UT) consiste de um par (A, v) onde

- A é um conjunto de n jogadores (agentes)
- $v(S)$, para cada $S \subseteq A$, é a utilidade a ser distribuída para a possível coalizão S
- Assume-se que $v(\emptyset) = 0$.

Jogos Cooperativos

Exemplo:

Ana (A), Bia (B), e Célia (C) querem comprar sorvete

Jogos Cooperativos

Exemplo:

Ana (A), Bia (B), e Célia (C) querem comprar sorvete

- A possui R$7,00

Jogos Cooperativos

Exemplo:

Ana (A), Bia (B), e Célia (C) querem comprar sorvete

- A possui R$7,00
- B possui R$8,00

Jogos Cooperativos

Exemplo:

Ana (A), Bia (B), e Célia (C) querem comprar sorvete

- A possui R\$7,00
- B possui R\$8,00
- C possui R\$8,00

Jogos Cooperativos

Exemplo:

Ana (A), Bia (B), e Célia (C) querem comprar sorvete

- A possui R\$7,00
- B possui R\$8,00
- C possui R\$8,00

Há dois potes de sorvete:

Jogos Cooperativos

Exemplo:

Ana (A), Bia (B), e Célia (C) querem comprar sorvete

- A possui R$7,00
- B possui R$8,00
- C possui R$8,00

Há dois potes de sorvete:

- de 700 gr. custa R$15,00

Jogos Cooperativos

Exemplo:

Ana (A), Bia (B), e Célia (C) querem comprar sorvete

- A possui R$7,00
- B possui R$8,00
- C possui R$8,00

Há dois potes de sorvete:

- de 700 gr. custa R$15,00
- de 1000 gr. custa R$20,00

Jogos Cooperativos

Exemplo:

Ana (A), Bia (B), e Célia (C) querem comprar sorvete

- A possui R$7,00
- B possui R$8,00
- C possui R$8,00

Há dois potes de sorvete:

- de 700 gr. custa R$15,00
- de 1000 gr. custa R$20,00

Função de mapeamento de utilidade:

$$
\begin{array}{lll}
v(\emptyset) = 0 & & \\
v(\{A\}) = 0 & v(\{B\}) = 0 & v(\{C\}) = 0 \\
v(\{A,B\}) = 700 & v(\{A,C\}) = 700 & v(\{B,C\}) = 700 \\
v(\{A,B,C\}) = 1000 & &
\end{array}
$$

Jogos Cooperativos

Questão central: como dividir o resultado $v(A)$ do jogo entre os jogadores de forma ``justa''?.

Jogos Cooperativos

Questão central: como dividir o resultado $v(A)$ do jogo entre os jogadores de forma ``justa''?.

- Definimos $\psi\colon \mathbb{R}^{2^{|A|}} \rightarrow \mathbb{R}^{|A|}$ como uma função de compartilhamento que mapeia a função de utilidade do jogo (A, v) para um vetor real $\alpha \in \mathbb{R}^{|A|}$.

Jogos Cooperativos

Questão central: como dividir o resultado $v(A)$ do jogo entre os jogadores de forma ``justa''?.

- Definimos $\psi\colon \mathbb{R}^{2^{|A|}} \to \mathbb{R}^{|A|}$ como uma função de compartilhamento que mapeia a função de utilidade do jogo (A, v) para um vetor real $\alpha \in \mathbb{R}^{|A|}$.
- Cada posição α_j deste vetor indica quanto ganha o jogador j, ou melhor, qual a parte que cabe ao jogador j do valor total $v(A)$ do jogo.

Jogos Cooperativos

Questão central: como dividir o resultado $v(A)$ do jogo entre os jogadores de forma ``justa''?.

- Definimos $\psi\colon \mathbb{R}^{2^{|A|}} \rightarrow \mathbb{R}^{|A|}$ como uma função de compartilhamento que mapeia a função de utilidade do jogo (A, v) para um vetor real $\alpha \in \mathbb{R}^{|A|}$.
- Cada posição α_j deste vetor indica quanto ganha o jogador j, ou melhor, qual a parte que cabe ao jogador j do valor total $v(A)$ do jogo.
- Por simplificação escrevemos $\psi(v)_j = \alpha_j$.

Jogos Cooperativos

Propriedades interessantes para função de compartilhamento ψ (onde $\psi_j(v) = \alpha_j$):

Jogos Cooperativos

Propriedades interessantes para função de compartilhamento ψ (onde $\psi_j(v) = \alpha_j$):

Def.: Dado jogo cooperativo (A, v), o conjunto de *pagamentos* pré-imputáveis são aqueles em

$$\left\{ \alpha \in \mathbb{R}^{|A|} \ : \ \sum_{j \in A} \alpha_j = v(A) \right\}.$$

Jogos Cooperativos

Propriedades interessantes para função de compartilhamento ψ (onde $\psi_j(v) = \alpha_j$):

Def.: Dado jogo cooperativo (A, v), o conjunto de *pagamentos pré-imputáveis* são aqueles em

$$\left\{\alpha \in \mathbb{R}^{|A|} \; : \; \sum_{j \in A} \alpha_j = v(A)\right\}.$$

São *eficientes* no sentido econômico pois distribuem entre os jogadores todo o valor possível

Jogos Cooperativos

Propriedades interessantes para função de compartilhamento ψ:

Jogos Cooperativos

Propriedades interessantes para função de compartilhamento ψ:

Def.: Jogadores i e j são *intercambiáveis* se as contribuições deles são sempre iguais para as coalizões que não os contém. I.e, $\forall S \subset A \setminus \{i, j\}$, temos $v(S \cup i) = v(S \cup j)$.

Jogos Cooperativos

Propriedades interessantes para função de compartilhamento ψ:

Def.: Jogadores i e j são *intercambiáveis* se as contribuições deles são sempre iguais para as coalizões que não os contém. I.e, $\forall S \subset A \setminus \{i, j\}$, temos $v(S \cup i) = v(S \cup j)$.

Def.: Uma função de compartilhamento ψ satisfaz a *simetria* se para i e j intercambiáveis então $\psi_i(v) = \psi_j(v)$.

Jogos Cooperativos

Propriedades interessantes para função de compartilhamento ψ:

Def.: Jogadores i e j são *intercambiáveis* se as contribuições deles são sempre iguais para as coalizões que não os contém. I.e, $\forall S \subset A \setminus \{i, j\}$, temos $v(S \cup i) = v(S \cup j)$.

Def.: Uma função de compartilhamento ψ satisfaz a *simetria* se para i e j intercambiáveis então $\psi_i(v) = \psi_j(v)$.

I.e., dois jogadores intercambiáveis devem receber o mesmo pagamento.

Jogos Cooperativos

Propriedades interessantes para função de compartilhamento ψ:

Jogos Cooperativos

Propriedades interessantes para função de compartilhamento ψ:

Def.: Um jogador é *dummy* se o que ele acrescenta para cada possível coalizão é exatamente o seu valor individual.

I.e., j é *dummy* se $v(S \cup j) = v(S) + v(j)$ para todo $S \subset A \setminus \{j\}$

Jogos Cooperativos

Propriedades interessantes para função de compartilhamento ψ:

Def.: Um jogador é *dummy* se o que ele acrescenta para cada possível coalizão é exatamente o seu valor individual.

I.e., j é *dummy* se $v(S \cup j) = v(S) + v(j)$ para todo $S \subset A \setminus \{j\}$

Def.: Uma função de pagamento ψ satisfaz a propriedade do jogador *dummy* se $\psi_j(v) = v(j)$ para todo jogador dummy j

Jogos Cooperativos

Propriedades interessantes para função de compartilhamento ψ:

Def.: Um jogador é *dummy* se o que ele acrescenta para cada possível coalizão é exatamente o seu valor individual.

I.e., j é *dummy* se $v(S \cup j) = v(S) + v(j)$ para todo $S \subset A \setminus \{j\}$

Def.: Uma função de pagamento ψ satisfaz a propriedade do jogador *dummy* se $\psi_j(v) = v(j)$ para todo jogador dummy j

O princípio do jogador *dummy* especifica que este deve receber como pagamento exatamente $v(j)$.

Jogos Cooperativos

Propriedades interessantes para função de compartilhamento ψ:

Princípio da *aditividade*: Para quaisquer funções de utilidade v_1 e v_2 temos $\psi(v_1 + v_2) = \psi(v_1) + \psi(v_2)$, onde $v_1 + v_2$ é a função de utilidade dada por $(v_1 + v_2)(S) = v_1(S) + v_2(S)$, para todo S.

Jogos Cooperativos

Shapley (Nobel de Economia 2012) mostrou como criar uma função de compartilhamento que satisfaz estas propriedades.

Jogos Cooperativos

Shapley (Nobel de Economia 2012) mostrou como criar uma função de compartilhamento que satisfaz estas propriedades.

Def.: Dado jogo cooperativo UT (A, v) definimos o valor de Shapley para o jogador j como

$$\psi_j(v) = \frac{1}{|A|!} \sum_{S \subseteq A \setminus \{j\}} |S|!(|A| - |S| - 1)! \left[v(S \cup j) - v(S)\right]$$

Jogos Cooperativos

Shapley (Nobel de Economia 2012) mostrou como criar uma função de compartilhamento que satisfaz estas propriedades.

Def.: Dado jogo cooperativo UT (A, v) definimos o valor de Shapley para o jogador j como

$$\psi_j(v) = \frac{1}{|A|!} \sum_{S \subseteq A \setminus \{j\}} |S|!(|A| - |S| - 1)! \left[v(S \cup j) - v(S)\right]$$

Teorema. Dado jogo cooperativo UT (A, v) a única função de pagamento que satisfaz as propriedades de

Jogos Cooperativos

Shapley (Nobel de Economia 2012) mostrou como criar uma função de compartilhamento que satisfaz estas propriedades.

Def.: Dado jogo cooperativo UT (A, v) definimos o valor de Shapley para o jogador j como

$$\psi_j(v) = \frac{1}{|A|!} \sum_{S \subseteq A \setminus \{j\}} |S|!(|A| - |S| - 1)! \left[v(S \cup j) - v(S)\right]$$

Teorema. Dado jogo cooperativo UT (A, v) a única função de pagamento que satisfaz as propriedades de

- pré-imputação

Jogos Cooperativos

Shapley (Nobel de Economia 2012) mostrou como criar uma função de compartilhamento que satisfaz estas propriedades.

Def.: Dado jogo cooperativo UT (A, v) definimos o valor de Shapley para o jogador j como

$$\psi_j(v) = \frac{1}{|A|!} \sum_{S \subseteq A \setminus \{j\}} |S|!(|A| - |S| - 1)! \, [v(S \cup j) - v(S)]$$

Teorema. Dado jogo cooperativo UT (A, v) a única função de pagamento que satisfaz as propriedades de

- pré-imputação
- simetria

Jogos Cooperativos

Shapley (Nobel de Economia 2012) mostrou como criar uma função de compartilhamento que satisfaz estas propriedades.

Def.: Dado jogo cooperativo UT (A, v) definimos o valor de Shapley para o jogador j como

$$\psi_j(v) = \frac{1}{|A|!} \sum_{S \subseteq A \setminus \{j\}} |S|!(|A| - |S| - 1)! \left[v(S \cup j) - v(S)\right]$$

Teorema. Dado jogo cooperativo UT (A, v) a única função de pagamento que satisfaz as propriedades de

- pré-imputação
- simetria
- jogador *dummy* e

Jogos Cooperativos

Shapley (Nobel de Economia 2012) mostrou como criar uma função de compartilhamento que satisfaz estas propriedades.

Def.: Dado jogo cooperativo UT (A, v) definimos o valor de Shapley para o jogador j como

$$\psi_j(v) = \frac{1}{|A|!} \sum_{S \subseteq A \setminus \{j\}} |S|!(|A| - |S| - 1)! \left[v(S \cup j) - v(S) \right]$$

Teorema. Dado jogo cooperativo UT (A, v) a única função de pagamento que satisfaz as propriedades de

- pré-imputação
- simetria
- jogador *dummy* e
- aditividade

Jogos Cooperativos

Shapley (Nobel de Economia 2012) mostrou como criar uma função de compartilhamento que satisfaz estas propriedades.

Def.: Dado jogo cooperativo UT (A, v) definimos o valor de Shapley para o jogador j como

$$\psi_j(v) = \frac{1}{|A|!} \sum_{S \subseteq A \setminus \{j\}} |S|!(|A| - |S| - 1)! \, [v(S \cup j) - v(S)]$$

Teorema. Dado jogo cooperativo UT (A, v) a única função de pagamento que satisfaz as propriedades de

- pré-imputação
- simetria
- jogador *dummy* e
- aditividade

é aquela definida pelo valor de hapley.

Jogos Cooperativos

Considere o exemplo anterior da compra de sorvetes:

Jogos Cooperativos

Considere o exemplo anterior da compra de sorvetes:

- A possui R$7,00, B possui R$8,00, e C possui R$8,00.

Jogos Cooperativos

Considere o exemplo anterior da compra de sorvetes:

- A possui R$7,00, B possui R$8,00, e C possui R$8,00.
- Dois potes, um de R$15,00 com 700 gramas e outro de R$20,00 com 1000 gramas.

Jogos Cooperativos

Considere o exemplo anterior da compra de sorvetes:

- A possui R$7,00, B possui R$8,00, e C possui R$8,00.
- Dois potes, um de R$15,00 com 700 gramas e outro de R$20,00 com 1000 gramas.

$$
\begin{array}{lll}
v(\emptyset) = 0 & v(\{A\}) = 0 & v(\{B\}) = 0 \\
v(\{C\}) = 0 & v(\{A,B\}) = 700 & v(\{A,C\}) = 700 \\
v(\{B,C\}) = 700 & v(\{A,B,C\}) = 1000 &
\end{array}
$$

Jogos Cooperativos

Considere o exemplo anterior da compra de sorvetes:

- A possui R$7,00, B possui R$8,00, e C possui R$8,00.
- Dois potes, um de R$15,00 com 700 gramas e outro de R$20,00 com 1000 gramas.

$$
\begin{array}{lll}
v(\emptyset) = 0 & v(\{A\}) = 0 & v(\{B\}) = 0 \\
v(\{C\}) = 0 & v(\{A,B\}) = 700 & v(\{A,C\}) = 700 \\
v(\{B,C\}) = 700 & v(\{A,B,C\}) = 1000 &
\end{array}
$$

Jogos Cooperativos

Considere o exemplo anterior da compra de sorvetes:

- A possui R$7,00, B possui R$8,00, e C possui R$8,00.
- Dois potes, um de R$15,00 com 700 gramas e outro de R$20,00 com 1000 gramas.

$$
\begin{array}{lll}
v(\emptyset) = 0 & v(\{A\}) = 0 & v(\{B\}) = 0 \\
v(\{C\}) = 0 & v(\{A, B\}) = 700 & v(\{A, C\}) = 700 \\
v(\{B, C\}) = 700 & v(\{A, B, C\}) = 1000 &
\end{array}
$$

- O valor de Shapley para A pode ser computado como

$$\frac{0! \cdot (2)! \cdot [0] + 1! \cdot (1)! \cdot [700] + 1! \cdot (1)! \cdot [700] + 2! \cdot (0)! \cdot [300]}{6!} = \frac{1000}{3}$$

Jogos Cooperativos

Considere o exemplo anterior da compra de sorvetes:

- A possui R$7,00, B possui R$8,00, e C possui R$8,00.
- Dois potes, um de R$15,00 com 700 gramas e outro de R$20,00 com 1000 gramas.

$$
\begin{array}{lll}
v(\emptyset) = 0 & v(\{A\}) = 0 & v(\{B\}) = 0 \\
v(\{C\}) = 0 & v(\{A, B\}) = 700 & v(\{A, C\}) = 700 \\
v(\{B, C\}) = 700 & v(\{A, B, C\}) = 1000 &
\end{array}
$$

- O valor de Shapley para A pode ser computado como

$$
\frac{0! \cdot (2)! \cdot [0] + 1! \cdot (1)! \cdot [700] + 1! \cdot (1)! \cdot [700] + 2! \cdot (0)! \cdot [300]}{6!} = \frac{1000}{3}
$$

- Obtemos este mesmo valor tanto para B quanto para C.

Compartilhamento de Custos

- Considere um jogo (A, v) onde a função de utilidade é negativa.

Compartilhamento de Custos

- Considere um jogo (A, v) onde a função de utilidade é negativa.
- Neste caso v mapeia cada coalizão $S \subseteq A$ para um custo da coalizão.

Compartilhamento de Custos

- Considere um jogo (A, v) onde a função de utilidade é negativa.
- Neste caso v mapeia cada coalizão $S \subseteq A$ para um custo da coalizão.
- Os jogadores querem construir algum bem e uma autoridade central deseja definir como *compartilhar os custos*.

Compartilhamento de Custos

- Considere um jogo (A, v) onde a função de utilidade é negativa.
- Neste caso v mapeia cada coalizão $S \subseteq A$ para um custo da coalizão.
- Os jogadores querem construir algum bem e uma autoridade central deseja definir como *compartilhar os custos*.
- Denotaremos estes jogos por (A, c) onde c é uma função de custo positiva.

Compartilhamento de Custos

Exemplo de jogo cooperativo com custos

Compartilhamento de Custos

Exemplo de jogo cooperativo com custos

- Uma comunidade quer construir um posto de saúde local.

Compartilhamento de Custos

Exemplo de jogo cooperativo com custos

- Uma comunidade quer construir um posto de saúde local.
- Os moradores estão dispostos a arcar com os custos da construção desde que este traga o benefício esperado.

Compartilhamento de Custos

Exemplo de jogo cooperativo com custos

- Uma comunidade quer construir um posto de saúde local.
- Os moradores estão dispostos a arcar com os custos da construção desde que este traga o benefício esperado.
- Não necessariamente todos os moradores da comunidade participarão da construção do posto.

Compartilhamento de Custos

Exemplo de jogo cooperativo com custos

- Uma comunidade quer construir um posto de saúde local.
- Os moradores estão dispostos a arcar com os custos da construção desde que este traga o benefício esperado.
- Não necessariamente todos os moradores da comunidade participarão da construção do posto.
- Os que participarem poderão utilizá-lo mas terão que dividir entre si o custo de construção (compartilhamento de custos)

Compartilhamento de Custos

Exemplo de jogo cooperativo com custos

- Uma comunidade quer construir um posto de saúde local.
- Os moradores estão dispostos a arcar com os custos da construção desde que este traga o benefício esperado.
- Não necessariamente todos os moradores da comunidade participarão da construção do posto.
- Os que participarem poderão utilizá-lo mas terão que dividir entre si o custo de construção (compartilhamento de custos)

Objetivo: estabelecer pagamento para cada morador, de maneira que todos formem uma grande coalizão única A.

Compartilhamento de Custos

Seja

- (A, c): jogo cooperativo com compartilhamento de custos onde c mapeia custo para construção do bem, para cada possível coalizão $S \subseteq A$.

Compartilhamento de Custos

Seja

- (A, c): jogo cooperativo com compartilhamento de custos onde c mapeia custo para construção do bem, para cada possível coalizão $S \subseteq A$.
- $\alpha \in \mathbb{R}^{|A|}$: valor α_j deverá ser pago pelo jogador j na construção do bem.

Compartilhamento de Custos

Seja

- (A, c): jogo cooperativo com compartilhamento de custos onde c mapeia custo para construção do bem, para cada possível coalizão $S \subseteq A$.
- $\alpha \in \mathbb{R}^{|A|}$: valor α_j deverá ser pago pelo jogador j na construção do bem.

Def.: Um vetor $\alpha \in \mathbb{R}^{|A|}$ pertence ao *núcleo* se

Compartilhamento de Custos

Seja

- (A, c): jogo cooperativo com compartilhamento de custos onde c mapeia custo para construção do bem, para cada possível coalizão $S \subseteq A$.
- $\alpha \in \mathbb{R}^{|A|}$: valor α_j deverá ser pago pelo jogador j na construção do bem.

Def.: Um vetor $\alpha \in \mathbb{R}^{|A|}$ pertence ao *núcleo* se

- $\sum_{j \in A} \alpha_j = c(A)$ (prop. *orçamento balanceado*)

Compartilhamento de Custos

Seja

- (A, c): jogo cooperativo com compartilhamento de custos onde c mapeia custo para construção do bem, para cada possível coalizão $S \subseteq A$.
- $\alpha \in \mathbb{R}^{|A|}$: valor α_j deverá ser pago pelo jogador j na construção do bem.

Def.: Um vetor $\alpha \in \mathbb{R}^{|A|}$ pertence ao *núcleo* se

- $\sum_{j \in A} \alpha_j = c(A)$ (prop. *orçamento balanceado*)
- Para todo $S \subseteq A$ temos $\sum_{j \in S} \alpha_j \leq c(S)$. (propriedade é conhecida como *estabilidade*).

Compartilhamento de Custos

Seja

- (A, c): jogo cooperativo com compartilhamento de custos onde c mapeia custo para construção do bem, para cada possível coalizão $S \subseteq A$.
- $\alpha \in \mathbb{R}^{|A|}$: valor α_j deverá ser pago pelo jogador j na construção do bem.

Def.: Um vetor $\alpha \in \mathbb{R}^{|A|}$ pertence ao *núcleo* se

- $\sum_{j \in A} \alpha_j = c(A)$ (prop. *orçamento balanceado*)
- Para todo $S \subseteq A$ temos $\sum_{j \in S} \alpha_j \leq c(S)$. (propriedade é conhecida como *estabilidade*).

Vetor de pagamentos cobre o custo e incentiva grande coalizão.

Compartilhamento de Custos

Função de pagamento de Shapley pode não ser estável.

Exemplo da compra de sorvete

Compartilhamento de Custos

Função de pagamento de Shapley pode não ser estável.

Exemplo da compra de sorvete

- B e C poderiam formar uma coalizão e comprar 700gr.

Compartilhamento de Custos

Função de pagamento de Shapley pode não ser estável.

Exemplo da compra de sorvete

- B e C poderiam formar uma coalizão e comprar 700gr.
- cada um fica com 350 gramas de sorvete

Compartilhamento de Custos

Função de pagamento de Shapley pode não ser estável.

Exemplo da compra de sorvete

- B e C poderiam formar uma coalizão e comprar 700gr.
- cada um fica com 350 gramas de sorvete
- mais vantajosa que grande coalizão (de $1000/3$ p/ cada).

Compartilhamento de Custos

Função de pagamento de Shapley pode não ser estável.

Exemplo da compra de sorvete

- B e C poderiam formar uma coalizão e comprar 700gr.
- cada um fica com 350 gramas de sorvete
- mais vantajosa que grande coalizão (de $1000/3$ p/ cada).

Obs.: Núcleo é conceito de solução equivalente ao que é conhecido como equilíbrio forte de Nash

Compartilhamento de Custos

Função de pagamento de Shapley pode não ser estável.

Exemplo da compra de sorvete

- B e C poderiam formar uma coalizão e comprar 700gr.
- cada um fica com 350 gramas de sorvete
- mais vantajosa que grande coalizão (de $1000/3$ p/ cada).

Obs.: Núcleo é conceito de solução equivalente ao que é conhecido como equilíbrio forte de Nash

- Garante que nenhuma coalizão de jogadores terá benefício se desviar da solução atual, que é a grande coalizão.

Compartilhamento de Custos

Perguntas:

Compartilhamento de Custos

Perguntas:

(a) Sempre há uma função de pagamento no núcleo?

Compartilhamento de Custos

Perguntas:

(a) Sempre há uma função de pagamento no núcleo?

(b) Se sim, tal função é única?

Compartilhamento de Custos

Bondareva e Shapley: Condição necessária e suficiente para existência de núcleo não vazio.

Compartilhamento de Custos

Bondareva e Shapley: Condição necessária e suficiente para existência de núcleo não vazio.

Def.: Uma coleção de pesos balanceados λ para A é

Compartilhamento de Custos

Bondareva e Shapley: Condição necessária e suficiente para existência de núcleo não vazio.

Def.: Uma coleção de pesos balanceados λ para A é

- um vetor de $\mathbb{R}_+^{2^{|A|}}$ que atribui um peso não negativo λ_S para cada subconjunto $S \subseteq A$ de tal forma que

Compartilhamento de Custos

Bondareva e Shapley: Condição necessária e suficiente para existência de núcleo não vazio.

Def.: Uma coleção de pesos balanceados λ para A é

- um vetor de $\mathbb{R}_+^{2^{|A|}}$ que atribui um peso não negativo λ_S para cada subconjunto $S \subseteq A$ de tal forma que
- para cada jogador $j \in A$ vale que

$$\sum_{S:\, j \in S} \lambda_S = 1.$$

Compartilhamento de Custos

Exemplo: de coleção de pesos balanceados para o jogo do sorvete:

$$\begin{array}{lll} \lambda(\emptyset) = 0 & \lambda(\{A\}) = 1/2 & \lambda(\{B\}) = 1/2 \\ \lambda(\{C\}) = 1/2 & \lambda(\{A, B\}) = 0 & \lambda(\{A, C\}) = 0 \\ \lambda(\{B, C\}) = 0 & \lambda(\{A, B, C\}) = 1/2 & \end{array}$$

Compartilhamento de Custos

Teorema: [Bondareva, Shapley]
Um jogo cooperativo UT (A, c) possui um núcleo não vazio

se e somente se

para toda coleção de pesos balanceados λ for válido que

$$\sum_{S \subseteq A} \lambda_S \cdot c(S) \geq c(A).$$

Compartilhamento de Custos

Esboço. Um jogo (A, c) possui núcleo não vazio

se e somente se

a solução do programa linear abaixo tem valor $c(A)$.

$$\begin{aligned} \text{max} & \sum_{j \in A} \alpha_j \\ \text{sujeito a} & \quad \sum_{j \in S} \alpha_j \leq c(S) \quad \forall S \subseteq A. \end{aligned}$$

Note que a função objetivo é limitada por $c(A)$

Compartilhamento de Custos

Pelo Teorema Forte da Dualidade: valor ótimo do programa linear anterior é igual ao de seu dual

Formulação Dual:

$$\begin{aligned} \text{min} \sum_{S \subseteq A} \lambda_S \cdot c(S) & \\ \text{sujeito a} \quad \sum_{S:\ j \in S} \lambda_S = 1 & \quad \forall j \in A, \\ \lambda_S \geq 0 & \quad \forall S \subseteq A. \end{aligned}$$

Compartilhamento de Custos

Pelo Teorema Forte da Dualidade: valor ótimo do programa linear anterior é igual ao de seu dual

Formulação Dual:

$$
\begin{aligned}
\text{min} \; & \sum_{S \subseteq A} \lambda_S \cdot c(S) \\
\text{sujeito a} \quad & \sum_{S:\, j \in S} \lambda_S = 1 \quad \forall j \in A, \\
& \lambda_S \geq 0 \quad \forall S \subseteq A.
\end{aligned}
$$

- Note que soluções do dual são coleções de pesos balanceadas.

Compartilhamento de Custos

Pelo Teorema Forte da Dualidade: valor ótimo do programa linear anterior é igual ao de seu dual

Formulação Dual:

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & \sum_{S \subseteq A} \lambda_S \cdot c(S) \\ \text{sujeito a} \quad & \sum_{S:\, j \in S} \lambda_S = 1 \quad \forall j \in A, \\ & \lambda_S \geq 0 \quad \forall S \subseteq A. \end{aligned}$$

- Note que soluções do dual são coleções de pesos balanceadas.
- Se toda solução tiver valor $\sum_{S \subseteq A} \lambda_S \cdot c(S) \geq c(A)$ então o núcleo será não vazio.

Compartilhamento de Custos

Compartilhamento de Custos

- Assim, podemos verificar se é possível ou não estabelecer um pagamento que esteja no núcleo para o jogo (A, c).

Compartilhamento de Custos

- Assim, podemos verificar se é possível ou não estabelecer um pagamento que esteja no núcleo para o jogo (A, c).
- Basta resolver um programa linear.

Compartilhamento de Custos

- Assim, podemos verificar se é possível ou não estabelecer um pagamento que esteja no núcleo para o jogo (A, c).
- Basta resolver um programa linear.
  - Se a função de custos c é dada explicitamente na entrada então tal checagem se dá em tempo polinomial.

Compartilhamento de Custos

- Assim, podemos verificar se é possível ou não estabelecer um pagamento que esteja no núcleo para o jogo (A, c).
- Basta resolver um programa linear.
  - Se a função de custos c é dada explicitamente na entrada então tal checagem se dá em tempo polinomial.
  - Mas, em geral a função de custo é implícita: é a solução ótima $c(S)$ de um

.

Compartilhamento de Custos

- Assim, podemos verificar se é possível ou não estabelecer um pagamento que esteja no núcleo para o jogo (A, c).
- Basta resolver um programa linear.
  - Se a função de custos c é dada explicitamente na entrada então tal checagem se dá em tempo polinomial.
  - Mas, em geral a função de custo é implícita: é a solução ótima $c(S)$ de um problema de otimização combinatória.

Compartilhamento de Custos

- Assim, podemos verificar se é possível ou não estabelecer um pagamento que esteja no núcleo para o jogo (A, c).
- Basta resolver um programa linear.
  - Se a função de custos c é dada explicitamente na entrada então tal checagem se dá em tempo polinomial.
  - Mas, em geral a função de custo é implícita: é a solução ótima $c(S)$ de um problema de otimização combinatória.
  - Nestes casos temos número exponencial de restrições, para cada restrição devemos computar $c(S)$.

Compartilhamento de Custos

- Assim, podemos verificar se é possível ou não estabelecer um pagamento que esteja no núcleo para o jogo (A, c).
- Basta resolver um programa linear.
  - Se a função de custos c é dada explicitamente na entrada então tal checagem se dá em tempo polinomial.
  - Mas, em geral a função de custo é implícita: é a solução ótima $c(S)$ de um problema de otimização combinatória.
  - Nestes casos temos número exponencial de restrições, para cada restrição devemos computar $c(S)$.
  - Em muitos casos, problema de otimização é NP-difícil i.e., a checagem é um problema intratável.

Jogo de localização de instalações

Temos

Jogo de localização de instalações

Temos

- Grafo $G = (F \cup C, E)$ satisfazendo a desigualdade triangular, onde
  C é um conjunto de jogadores (representando clientes) e
  F é um conjunto de possíveis instalações

Jogo de localização de instalações

Temos

- Grafo $G = (F \cup C, E)$ satisfazendo a desigualdade triangular, onde
  C é um conjunto de jogadores (representando clientes) e
  F é um conjunto de possíveis instalações
- Custos f_i de abertura da instalação i e

Jogo de localização de instalações

Temos

- Grafo $G = (F \cup C, E)$ satisfazendo a desigualdade triangular, onde
  C é um conjunto de jogadores (representando clientes) e
  F é um conjunto de possíveis instalações
- Custos f_i de abertura da instalação i e
- Custos d_{ij} da aresta entre $i \in F$ e $j \in C$.

Jogo de localização de instalações

Temos

- Grafo $G = (F \cup C, E)$ satisfazendo a desigualdade triangular, onde
  C é um conjunto de jogadores (representando clientes) e
  F é um conjunto de possíveis instalações
- Custos f_i de abertura da instalação i e
- Custos d_{ij} da aresta entre $i \in F$ e $j \in C$.
- Custo da coalizão S, dado por $c(S)$, para cada $S \subseteq C$

$$c(S) = \min_{F' \subseteq F} \left\{ \sum_{i \in F'} f_i + \sum_{j \in S} \min_{i \in F'} d_{ij} \right\}.$$

Jogo de localização de instalações

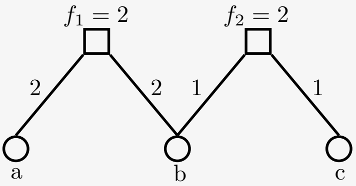
Temos

- Grafo $G = (F \cup C, E)$ satisfazendo a desigualdade triangular, onde
  C é um conjunto de jogadores (representando clientes) e
  F é um conjunto de possíveis instalações
- Custos f_i de abertura da instalação i e
- Custos d_{ij} da aresta entre $i \in F$ e $j \in C$.
- Custo da coalizão S, dado por $c(S)$, para cada $S \subseteq C$

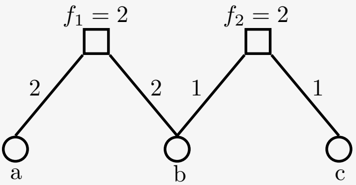
$$c(S) = \min_{F' \subseteq F} \left\{ \sum_{i \in F'} f_i + \sum_{j \in S} \min_{i \in F'} d_{ij} \right\}.$$

Objetivo dos jogadores: construir soluções de custo mínimo para atendê-los.

Jogo de localização de instalações
Exemplo



Jogo de localização de instalações
Exemplo

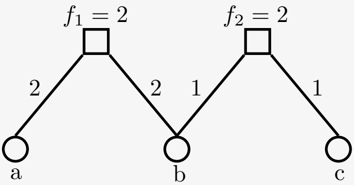


- Para este exemplo temos os seguintes custos para cada possível coalizão:

$$
\begin{array}{lll}
c(\emptyset) = 0 & c(\{a\}) = 4 & c(\{b\}) = 3 \\
c(\{c\}) = 3 & c(\{a,b\}) = 6 & c(\{a,c\}) = 7 \\
c(\{b,c\}) = 4 & c(\{a,b,c\}) = 8 &
\end{array}
$$

Jogo de localização de instalações

Exemplo



- Para este exemplo temos os seguintes custos para cada possível coalizão:

$$
\begin{array}{lll}
c(\emptyset) = 0 & c(\{a\}) = 4 & c(\{b\}) = 3 \\
c(\{c\}) = 3 & c(\{a,b\}) = 6 & c(\{a,c\}) = 7 \\
c(\{b,c\}) = 4 & c(\{a,b,c\}) = 8 &
\end{array}
$$

- Neste exemplo, o núcleo é não vazio: vetor de compartilhamento de custos $\alpha = (4, 2, 2)$ pertence ao núcleo.

Jogo de localização de instalações

Jogo de localização de instalações

- Há jogos de localização de instalações com núcleo vazio.

Jogo de localização de instalações

- Há jogos de localização de instalações com núcleo vazio.
- I.e., há instâncias onde não é possível estabelecer pagamentos que ao mesmo tempo

Jogo de localização de instalações

- Há jogos de localização de instalações com núcleo vazio.
- I.e., há instâncias onde não é possível estabelecer pagamentos que ao mesmo tempo
  - cubram o custo da solução e que

Jogo de localização de instalações

- Há jogos de localização de instalações com núcleo vazio.
- I.e., há instâncias onde não é possível estabelecer pagamentos que ao mesmo tempo
  - cubram o custo da solução e que
  - sejam estáveis.

Jogo de localização de instalações

Relaxando restrição de pagamento na definição de núcleo

Jogo de localização de instalações

Relaxando restrição de pagamento na definição de núcleo

Def.: Dizemos que um vetor $\alpha \in \mathbb{R}^{|A|}$ pertence ao *núcleo γ-aproximado* se satisfaz as seguintes propriedades:

Jogo de localização de instalações

Relaxando restrição de pagamento na definição de núcleo

Def.: Dizemos que um vetor $\alpha \in \mathbb{R}^{|A|}$ pertence ao *núcleo γ-aproximado* se satisfaz as seguintes propriedades:

- *orçamento γ-balanceado*:
$$\gamma c(A) \leq \sum_{j \in A} \alpha_j \leq c(A)$$

Jogo de localização de instalações

Relaxando restrição de pagamento na definição de núcleo

Def.: Dizemos que um vetor $\alpha \in \mathbb{R}^{|A|}$ pertence ao *núcleo γ-aproximado* se satisfaz as seguintes propriedades:

- *orçamento γ-balanceado*:
$$\gamma c(A) \leq \sum_{j \in A} \alpha_j \leq c(A)$$
- *estabilidade*: para todo $S \subseteq A$ deve valer que
$$\sum_{j \in S} \alpha_j \leq c(S).$$

Jogo de localização de instalações

Relaxando restrição de pagamento na definição de núcleo

Def.: Dizemos que um vetor $\alpha \in \mathbb{R}^{|A|}$ pertence ao *núcleo γ-aproximado* se satisfaz as seguintes propriedades:

- *orçamento γ-balanceado*:
$$\gamma c(A) \leq \sum_{j \in A} \alpha_j \leq c(A)$$
- *estabilidade*: para todo $S \subseteq A$ deve valer que
$$\sum_{j \in S} \alpha_j \leq c(S).$$

O pagamento γ-balanceado garante recuperar pelo menos uma fração γ do custo total.

Jogo de localização de instalações

Com a definição de núcleo γ-balanceado, surgem novas questões:

Jogo de localização de instalações

Com a definição de núcleo γ-balanceado, surgem novas questões:

- Qual o maior valor de γ para que toda instância do jogo possua núcleo γ-aproximado não vazio?

Jogo de localização de instalações

Com a definição de núcleo γ-balanceado, surgem novas questões:

- Qual o maior valor de γ para que toda instância do jogo possua núcleo γ-aproximado não vazio?
- É possível extender o resultado de Bondareva e Shapley?

Jogo de localização de instalações

Com a definição de núcleo γ-balanceado, surgem novas questões:

- Qual o maior valor de γ para que toda instância do jogo possua núcleo γ-aproximado não vazio?

- É possível extender o resultado de Bondareva e Shapley?

Teorema: Um jogo cooperativo UT (A, c) possui um núcleo γ-aproximado não vazio

se e somente se

para toda coleção de pesos balanceados λ for válido que

$$\sum_{S \subseteq A} \lambda_S \cdot c(S) \geq \gamma c(A).$$

Jogo de localização de instalações

Um jogo (A, c) possui núcleo γ-aproximado não vazio

se e somente se

a solução do programa linear abaixo tem

valor maior ou igual a $\gamma c(A)$.

Denotamos este programa linear por (PL1).

$$\text{(PL1)} \quad \text{max} \sum_{j \in A} \alpha_j$$

$$\text{sujeito a} \quad \sum_{j \in S} \alpha_j \leq c(S) \quad \forall S \subseteq A.$$

Jogo de localização de instalações

- Pelo teorema forte da dualidade o valor ótimo deste programa linear é igual ao de seu dual, denotado por (PL2):

$$
\begin{aligned}
\text{(PL2)} \quad & \min \sum_{S \subseteq A} \lambda_S \cdot c(S) \\
& \text{sujeito a} \quad \sum_{S:\, j \in S} \lambda_S = 1 \quad \forall j \in A, \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad \lambda_S \geq 0 \quad \forall S \subseteq A.
\end{aligned}
$$

Jogo de localização de instalações

- Pelo teorema forte da dualidade o valor ótimo deste programa linear é igual ao de seu dual, denotado por (PL2):

$$
\begin{aligned}
\text{(PL2)} \quad & \min \sum_{S \subseteq A} \lambda_S \cdot c(S) \\
& \text{sujeito a} \quad \sum_{S:\, j \in S} \lambda_S = 1 \quad \forall j \in A, \\
& \qquad\qquad\qquad \lambda_S \geq 0 \quad \forall S \subseteq A.
\end{aligned}
$$

- Cada solução do dual é uma coleção de pesos balanceados.

Jogo de localização de instalações

- Pelo teorema forte da dualidade o valor ótimo deste programa linear é igual ao de seu dual, denotado por (PL2):

$$
\begin{aligned}
\text{(PL2)} \quad & \min \sum_{S \subseteq A} \lambda_S \cdot c(S) \\
& \text{sujeito a} \quad \sum_{S:\, j \in S} \lambda_S = 1 \quad \forall j \in A, \\
& \qquad\qquad\qquad\quad \lambda_S \geq 0 \quad \forall S \subseteq A.
\end{aligned}
$$

- Cada solução do dual é uma coleção de pesos balanceados.
- Logo se toda solução tiver valor

$$\textstyle\sum_{S \subseteq A} \lambda_S \cdot c(S) \geq \gamma c(A)$$

o núcleo será não vazio.

Jogo de localização de instalações

- Seja (A, c) um jogo de compartilhamento de custos onde o valor do modelo (PL2) inteiro (quando as variáveis λ são inteiras) é sempre $c(A)$.

Jogo de localização de instalações

- Seja (A, c) um jogo de compartilhamento de custos onde o valor do modelo (PL2) inteiro (quando as variáveis λ são inteiras) é sempre $c(A)$.
- Para jogos deste tipo temos: o maior valor possível para γ é exatamente o inverso do *gap* de integralidade do modelo (PL2).

Jogo de localização de instalações

- Seja (A, c) um jogo de compartilhamento de custos onde o valor do modelo (PL2) inteiro (quando as variáveis λ são inteiras) é sempre $c(A)$.

- Para jogos deste tipo temos: o maior valor possível para γ é exatamente o inverso do *gap* de integralidade do modelo (PL2).

- Jogos onde a função de custo é subaditiva satisfazem esta propriedade.

Jogo de localização de instalações

- Seja (A, c) um jogo de compartilhamento de custos onde o valor do modelo (PL2) inteiro (quando as variáveis λ são inteiras) é sempre $c(A)$.
- Para jogos deste tipo temos: o maior valor possível para γ é exatamente o inverso do *gap* de integralidade do modelo (PL2).
- Jogos onde a função de custo é subaditiva satisfazem esta propriedade.
  - c é subaditiva se para quaisquer subconjuntos disjuntos $S_1, S_2 \subseteq A$, vale que $c(S_1 \cup S_2) \leq c(S_1) + c(S_2)$

Jogo de localização de instalações

Modelo natural para o problema de Localização de instalações (PLN1):

$$
\begin{aligned}
\text{(PLN1)} \quad \min \; & \sum_{i \in F} f_i x_i + \sum_{i \in F} \sum_{j \in A} d_{ij} y_{ij} & \\
\text{sujeito a} \quad & \sum_{i \in F} y_{ij} \geq 1 & \forall j \in A, \\
& x_i - y_{ij} \geq 0 & \forall i \in F, \forall j \in A, \\
& x_i, y_{ij} \in \{0, 1\} & \forall i \in F, \forall j \in A,
\end{aligned}
$$

Jogo de localização de instalações

Teorema. O gap de integralidade de PLN1 é igual ao de PL2 para o Jogo de Localização de instalações.

Jogo de localização de instalações

Teorema. O gap de integralidade de PLN1 é igual ao de PL2 para o Jogo de Localização de instalações.

Lema. Um gap conhecido para PLN1 é de 3, devido a um algoritmo 3-aproximado para o problema de Localização de Instalações desenvolvido por Jain e Vazirani.

Jogo de localização de instalações

Teorema. O gap de integralidade de PLN1 é igual ao de PL2 para o Jogo de Localização de instalações.

Lema. Um gap conhecido para PLN1 é de 3, devido a um algoritmo 3-aproximado para o problema de Localização de Instalações desenvolvido por Jain e Vazirani.

Proposição. O Jogo de Instalações possui núcleo $1/3$-aproximado não-vazio.