Conceitos sobre grafos

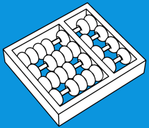
MO417 - Complexidade de Algoritmos I

16

05/24

Santiago Valdés Ravelo
https://ic.unicamp.br/~santiago/
ravelo@unicamp.br

UNICAMP

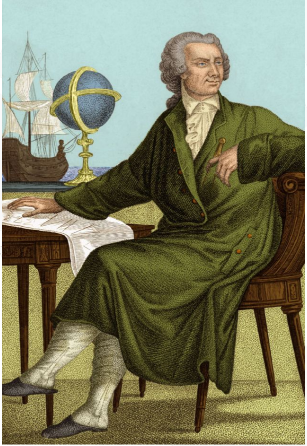


"The origins of graph theory are humble, even frivolous."

Norman L. Biggs, E. Keith Lloyd, and Robin J. Wilson

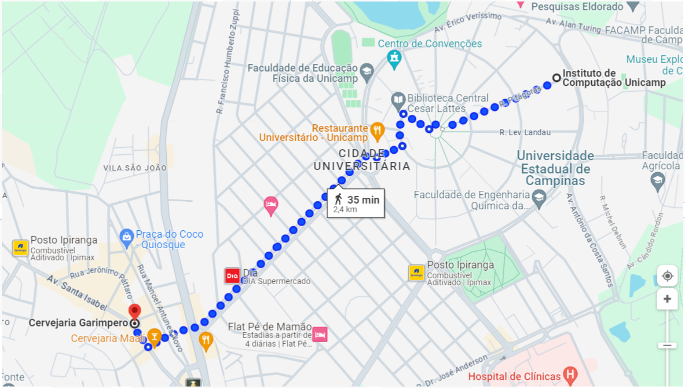
Introdução

Origem

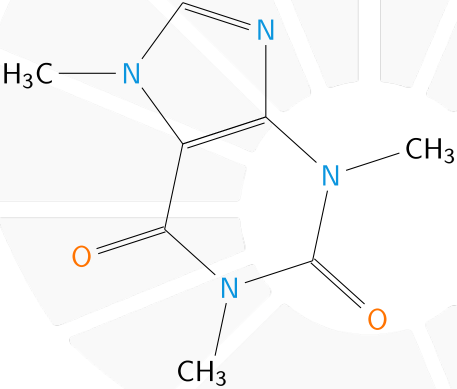


- Leonhard P. Euler
- 1735
- 7 Pontes de Königsberg

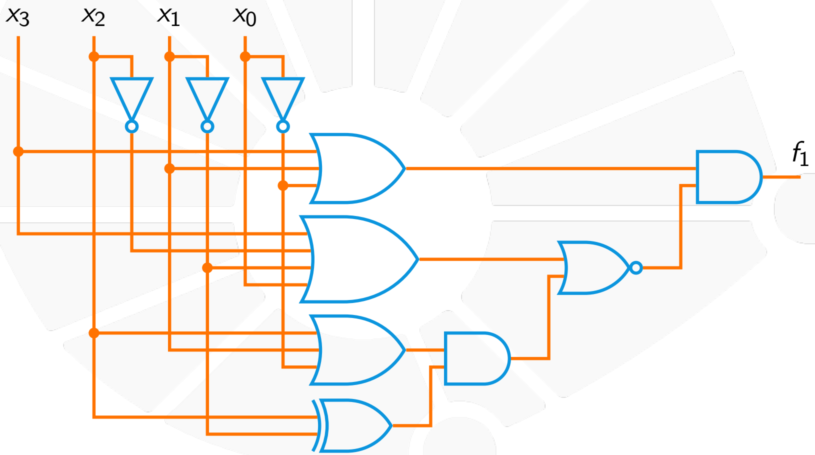
Aplicações


Pesquisas Eldorado
Av. Érico Veríssimo
Av. Alan Turing
FACAMP Faculda
de Camp
Centro de Convenções
Faculdade de Educação
Física da Unicamp
R. Francisco Humberto Zuppi
Museu Explo
de C
Instituto de
Computação Unicamp
Biblioteca Central
Cesar Lattes
R. Pitágoras
R. Lev Landau
Restaurante
Universitário - Unicamp
CIDADE
UNIVERSITÁRIA
Universidade
Estadual de
Campinas
Faculdad
Agrícola
VILA SÃO JOÃO
35 min
2,4 km
Faculdade de Engenharia
Química da...
Av. Antônio da Costa Santos
R. Michel Debrun
Av. Cândido Rondon
Posto Ipiranga
Combustível
Aditivado | Ipimax
Praça do Coco
- Quiosque
Rua Jerônimo Pattaro
Av. Santa Isabel
Rua Manoel Antunes Novo
Dia
DIA Supermercado
Posto Ipiranga
Combustível
Aditivado | Ipimax
Cervejaria Garimpero
Cervejaria Maal
Flat Pé de Mamão
Estadias a partir de
4 diárias | Flat Pé...
R. Dr. José Anderson
Hospital de Clínicas

Aplicações

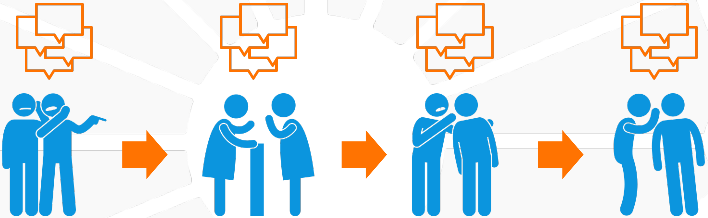


Aplicações



Aplicações

Aplicações



Conceitos básicos

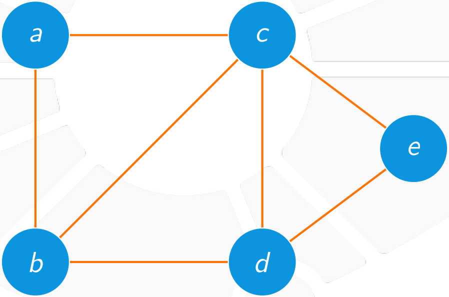
Definição de grafo

Um **GRAFO** é um par $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ onde:

- **V** é um conjunto finito de elementos chamados **VÉRTICES** e
- **E** é um conjunto finito de pares **NÃO ORDENADOS** de vértices chamados **ARESTAS**.

Exemplo de grafo

- **V = {a, b, c, d, e}**
- **E = {(a, b), (a, c), (b, c), (b, d), (c, d), (c, e), (d, e)}**



Adjacência e incidência

Considere uma aresta **e=(a, b)**:

- Para pares não ordenados, temos **(a,b)** = **(b,a)**.
- Desenhamos a aresta como uma linha ligando os vértices:

- Dizemos que os vértices **a** e **b** são os **EXTREMOS** de **e**,
- também que **a** e **b** são vértices **ADJACENTES**.

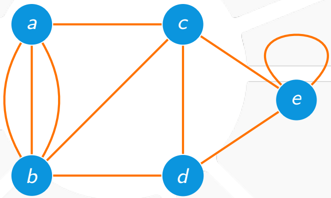
Para enfatizar a relação entre arestas e vértices:

- Dizemos que a aresta **e** é **INCIDENTE** nos vértices **a** e **b**,
- também que os vértices **a** e **b** são incidentes na aresta **e**.

Multigrafo

Grafos são generalizados por **MULTIGRAFOS**, que podem conter:

- **LAÇOS**: arestas com os dois extremos idênticos.
- **ARESTAS MÚLTIPLAS**: duas ou mais arestas com o mesmo par de extremos.

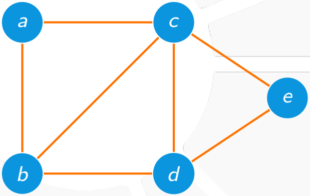


Um grafo é **SIMPLES** se ele não tiver laços ou arestas múltiplas.

Tamanho do grafo

Considere um grafo $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$:

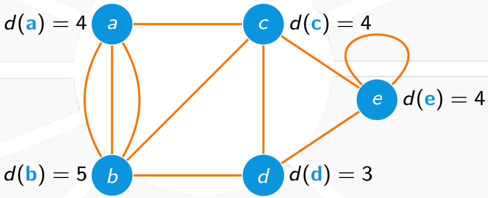
- Denotamos por $|\mathbf{V}|$ a cardinalidade do conjunto de vértices
- e por $|\mathbf{E}|$ a cardinalidade do conjunto de arestas.
- No exemplo abaixo temos $|\mathbf{V}| = \mathbf{5}$ e $|\mathbf{E}| = \mathbf{7}$:



O **TAMANHO** do grafo G é dado por $|\mathbf{V}| + |\mathbf{E}|$.

Grau de um vértice

O **GRAU** de um vértice **v**, denotado por $d(\mathbf{v})$ é o número de arestas incidentes a **v**, com laços contados duas vezes.



Alguns nomes

Considere um vértice $\mathbf{v}$ de um grafo $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$:

- Se $d(\mathbf{v}) = |\mathbf{V}| - 1$, dizemos que v é um **VÉRTICE UNIVERSAL**.
- Se $d(\mathbf{v}) = 0$, dizemos que v é um **VÉRTICE ISOLADO**.

Relação entre grau dos vértices e número de arestas

Teorema (Handshaking lemma)

Para todo grafo $G = (V, E)$,

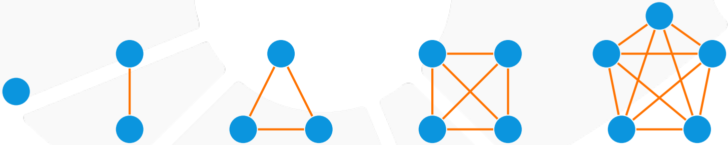
$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

Grafos completos

Um grafo é **COMPLETO** se tiver uma aresta **(u,v)** para todo par de vértices **u,v**:

- Se o número de vértices é **n**, então ele tem $\binom{n}{2}$ arestas.
- Portanto, um grafo simples tem **NO MÁXIMO** $\binom{n}{2}$ arestas.

Exemplos de grafos completos:

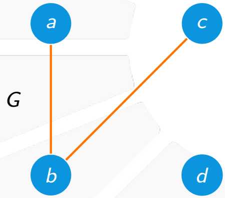


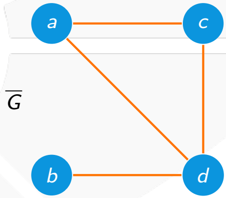
Um grafo completo com três vértices é chamado de **TRIÂNGULO**.

Grafo complementar

O **COMPLEMENTO** de um grafo $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ é o grafo $\overline{G} = (\mathbf{V}, \overline{\mathbf{E}})$:

- Com o mesmo conjunto de vértices, $\mathbf{V}$
- e com $\mathbf{(u,v)} \in \overline{\mathbf{E}}$ se e somente se $\mathbf{(u,v)} \notin \mathbf{E}$.





Note que, para qualquer vértice $\mathbf{v}$, $d_{\overline{G}}(\mathbf{v}) = |\mathbf{V}| - 1 - d_G(\mathbf{v})$.

Consequências da complementaridade

Vamos fazer alguns exercícios?

Exercício 1

Mostre que em uma festa com pelo menos $n \geq 6$ pessoas, existem três pessoas que se conhecem mutuamente ou três pessoas que não se conhecem mutuamente.

Exercício 1. Solução

Considere o grafo G representando as amizades:

- Tome um vértice **v**. Note de que $d_G(\mathbf{v}) + d_{\overline{G}}(\mathbf{v}) \geq 5$.
- Logo, $d_G(\mathbf{v}) \geq 3$ ou $d_{\overline{G}}(\mathbf{v}) \geq 3$.
- Suponha que $d_G(\mathbf{v}) \geq 3$ (o outro caso é análogo). Então, **v** tem três vizinhos **a, b, c** em G:
  1. Se houver aresta entre dois vizinhos, então ela forma triângulo com **v** $\Rightarrow$ 3 pessoas se conhecem mutuamente.
  2. Caso contrário, **a,b,c** formam um triângulo em $\overline{G}$ $\Rightarrow$ 3 pessoas se desconhecem mutuamente.

Exercício 2

Suponha que em um grupo S de n pessoas, com $n \geq 4$, vale o seguinte: em qualquer grupo $X \subseteq S$ de 4 pessoas, existe uma que conhece as demais pessoas de X. Mostre que existe uma pessoa em S que conhece todas as demais pessoas de S.

Exercício 2. Solução

Considere o grafo G representando os desconhecidos:

- Dois vértices são ligados se as pessoas não se conhecem.
- Queremos encontrar um vértice isolado de G.
- Se o grafo não tiver arestas, problema solucionado. Caso contrário, consideremos a aresta **(x,y)**.

Tome um subconjunto de vértices $\mathbf{X = \{x, y, z, w\}}$:

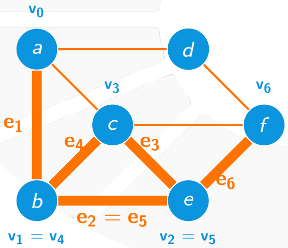
- Necessariamente, **w** conhece $\{$**x, y, z**$\}$, ou **z** conhece $\{$**x, y, w**$\}$.
- Sem perda de generalidade, suponha que **w** conhece $\{$**x, y, z**$\}$.
- Então, não há arestas de **w** a $\{$**x, y, z**$\}$.
- Como para qualquer **z**, **w** e **z** se conhecem, não há aresta de **w** a todo **z**.
- Portanto, **w** é um vértice isolado.

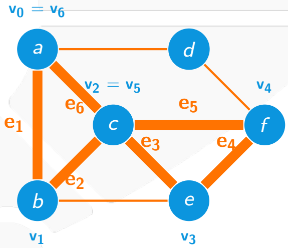
Passeios, caminhos e ciclos

Passeios em grafos

Um **PASSEIO** P de um vértice $\mathbf{v_0}$ a um vértice $\mathbf{v_k}$ em um grafo G é uma sequência finita e não vazia $(\mathbf{v_0}, \mathbf{e_1}, \mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{e_k}, \mathbf{v_k})$, tal que:

- Seus elementos são alternadamente vértices e arestas
- e, para $1 \leq i \leq k$, $\mathbf{v_{i-1}}$ e $\mathbf{v_i}$ são os extremos de $\mathbf{e_i}$.

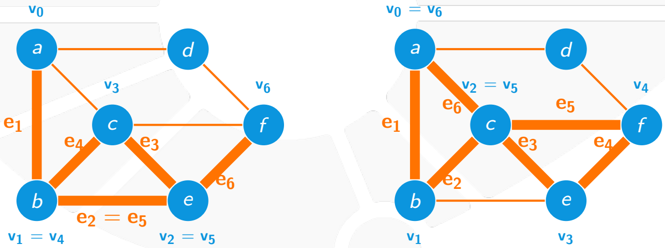




Passeios em grafos

Dado um passeio $P = (\mathbf{v_0}, \mathbf{e_1}, \mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{e_k}, \mathbf{v_k})$:

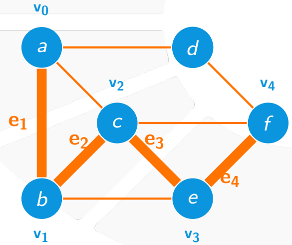
- Dizemos que $\mathbf{v_k}$ é **ALCANÇÁVEL** a partir de $\mathbf{v_0}$ através de P.
- Se $\mathbf{v_0} = \mathbf{v_k}$, então P é um **PASSEIO FECHADO**.
- O **COMPRIMENTO** de P é o seu número de arestas (k).

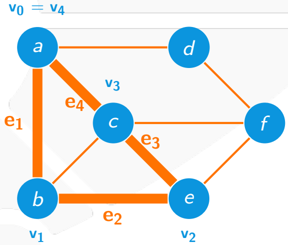


Caminhos e ciclos

- Um **CAMINHO** é um passeio cujos vértices são distintos.

- Um **CICLO** é um passeio fechado que possui pelo menos uma aresta e tal que $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k}$ são distintos e todas as arestas são distintas.





Refletindo sobre as definições

Vamos fazer alguns exercícios?

Exercício 1

Dados um grafo G e dois vértices **u,v** de G, mostre que:

Se existe um passeio de **u** a **v** em G, então existe um caminho de **u** a **v** em G. Por que isto é um resultado interessante?

Exercício 2

Dados um grafo G e três vértices **u,v,w** de G, mostre que:

Se em G existem um caminho de **u** a **v** e um caminho de **v** a **w** então existe um caminho de **u** a **w** em G.

Exercício 3

É verdade que todo passeio fechado contém um ciclo?

Exercício 4

Dados um grafo G e um passeio $P = (\mathbf{v_0}, \ldots, \mathbf{v_k})$ em G que não repete arestas, mostre que:

Se um vértice $\mathbf{u}$ de G aparece em P e $\mathbf{v_0} \neq \mathbf{u} \neq \mathbf{v_k}$, então o número de arestas diferentes em P que incidem em $\mathbf{u}$ é par.

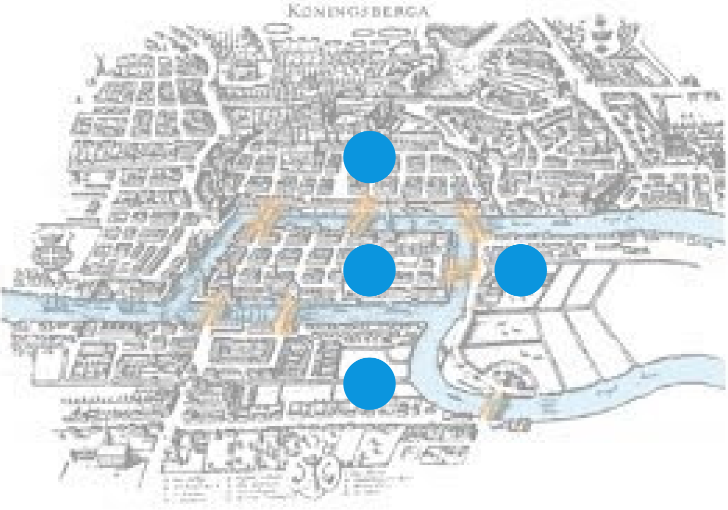
Exercício 5

Dado um grafo G, mostre que:

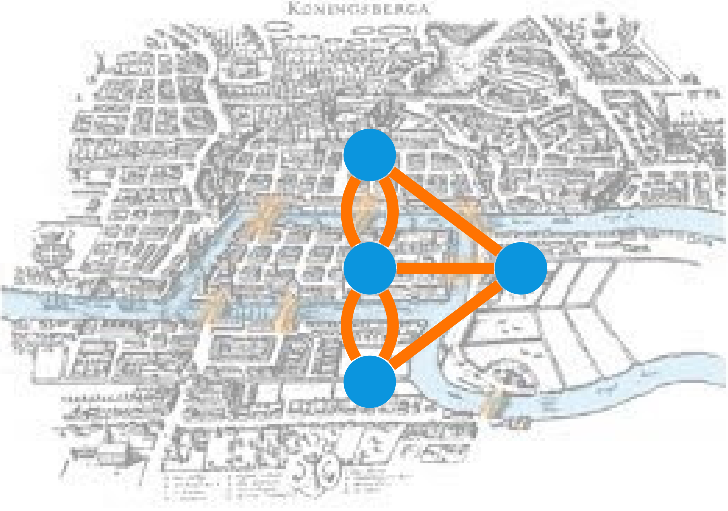
Se existe um passeio que passa por todas as arestas sem repeti-las, então no máximo há dois vértices de grau ímpar em G.

Solucionando o problema das 7 Pontes de Königsberg

Solucionando o problema das 7 Pontes de Königsberg



Solucionando o problema das 7 Pontes de Königsberg

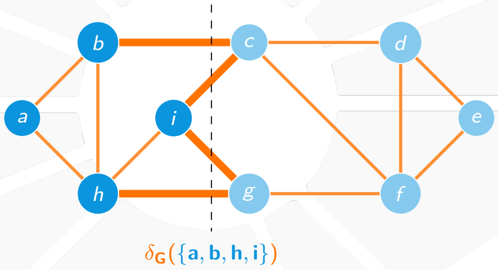


Cortes e conexidade

Cortes

Seja $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ um grafo e seja $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$.

O **CORTE** de G induzido por $\mathbf{S}$ é o conjunto de arestas de G com um extremo em $\mathbf{S}$ e outro em $\mathbf{V} \setminus \mathbf{S}$ e o denotamos por $\delta_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})$.



Se $\mathbf{s} \in \mathbf{S}$ e $\mathbf{t} \in \mathbf{V} \setminus \mathbf{S}$, então dizemos que $\delta_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})$ **SEPARA** $\mathbf{s}$ de $\mathbf{t}$.

Caminhos versus cortes

Lema

Seja G um grafo e sejam $\mathbf{s,t}$ vértices distintos de G. Então, exatamente uma das seguintes afirmações é verdadeira:

(a) *Existe um caminho de $\mathbf{s}$ a $\mathbf{t}$ em G, ou*

(b) *existe um corte $\delta_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})$ que separa $\mathbf{s}$ de $\mathbf{t}$ tal que $\delta_{\mathbf{G}}(\mathbf{S}) = \emptyset$.*

Caminhos versus cortes. Demonstração

Suponha que **(a)** vale (em G existe um caminho de **s** a **t**):

- **(b)** não pode valer (em G não existe um corte $\delta_{\mathbf{G}}(\mathbf{S}) = \emptyset$ que separa **s** de **t**). Por quê?

Suponha que **(a)** não vale (em G não existe um caminho de **s** a **t**):

- Seja **S** o conjunto dos vértices alcançáveis por **s** em G.
- Temos que $\mathbf{t} \in \mathbf{V} \setminus \mathbf{S}$ e $\delta_{\mathbf{G}}(\mathbf{S}) = \emptyset$.

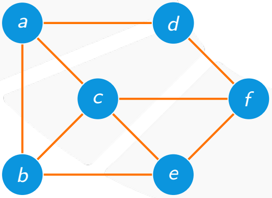
Conexidade

Dizemos que um grafo G é **CONEXO** se, para qualquer par de vértices **u** e **v** de G, existe um caminho de **u** a **v** em G.

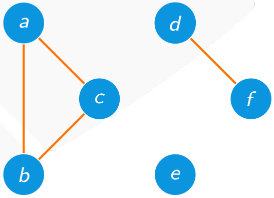
Caso contrário, dizemos que G é **DESCONEXO**.

Podemos particionar o grafo em **COMPONENTES**, tal que dois vértices **u** e **v** estão na mesma componente se em G há um caminho de **u** a **v**.

G_1



G_2

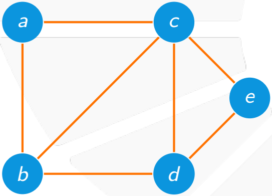


Subgrafos geradores e induzidos

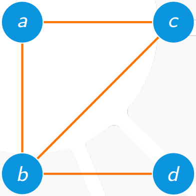
Subgrafo e subgrafo gerador

- Um **SUBGRAFO** $H = (\mathbf{V}', \mathbf{E}')$ de um grafo $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ é um grafo tal que $\mathbf{V}' \subseteq \mathbf{V}$ e $\mathbf{E}' \subseteq \mathbf{E}$.

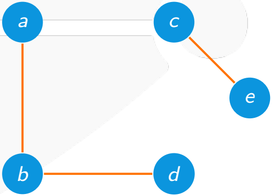
- Se $\mathbf{V}' = \mathbf{V}$, então H é um **SUBGRAFO GERADOR** de G.



G



Subgrafo de G



Subgrafo gerador de G

Grafos obtidos a partir de outros grafos

Considere um grafo $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$, uma aresta $\mathbf{e}$ e um vértice $\mathbf{v}$:

- $G - \mathbf{e}$ é o grafo obtido de G removendo-se $\mathbf{e}$:

$$G - \mathbf{e} = (\mathbf{V}, \mathbf{E} \setminus \{\mathbf{e}\})$$

- $G - \mathbf{v}$ é o grafo obtido de G removendo-se $\mathbf{v}$ e todas as arestas que incidem em $\mathbf{v}$:

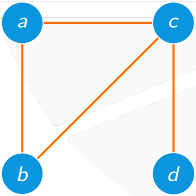
$$G - \mathbf{v} = (\mathbf{V} \setminus \{\mathbf{v}\}, \mathbf{E} \setminus \delta(\{\mathbf{v}\}))$$

Subgrafo induzido

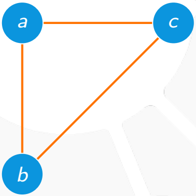
Considere um grafo $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ e um subconjunto de vértices $\mathbf{S}$:

- O subgrafo de G **INDUZIDO** por $\mathbf{S}$, denotado por $G[\mathbf{S}]$, é o grafo formado por $\mathbf{S}$ e todas as arestas entre vértices $\mathbf{S}$:

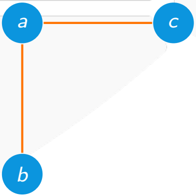
$$G[\mathbf{S}] = (\mathbf{S}, \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbf{E} : \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{S}\})$$



G



Subgrafo induzido

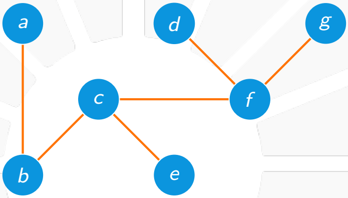


Subgrafo não induzido

Árvores

Definição

Um grafo $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ é uma **ÁRVORE** se ele for conexo e não possuir ciclos.



- Um grafo sem ciclos é chamado de **ACÍCLICO**.
- Uma **FOLHA** de uma árvore G é um vértice de grau 1.
- Toda árvore com dois ou mais vértices tem pelo menos duas folhas. Por quê?

Caracterização de árvores

Teorema

As seguintes afirmações são equivalentes:

- *G é uma árvore.*
- *G é conexo e possui exatamente $|V| - 1$ arestas.*
- *G é conexo e a remoção de qualquer aresta desconecta o grafo, i.e, ele é conexo minimal.*
- *Para todo par de vértices u, v de G, existe um único caminho de u a v em G.*

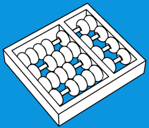
Demonstre esse teorema como exercício.

Conceitos sobre grafos

MO417 - Complexidade de Algoritmos I

05/24

16



Santiago Valdés Ravelo
https://ic.unicamp.br/~santiago/
ravelo@unicamp.br

UNICAMP