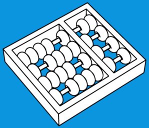
Notação assintótica

MO417 - Complexidade de Algoritmos I

03/24

2



Santiago Valdés Ravelo
https://ic.unicamp.br/~santiago/
ravelo@unicamp.br

"Análise de algoritmos usualmente significa: atribuir uma expressão O-grande para o tempo de execução. (Claro, Theta-grande seria muito melhor.)." [1]

Ian Parberry.

[1] Ian Parberry, *'Problems on Algorithms"*, 1994, p. 59.

Indução matemática

Indução reversa

Podemos usar indução para derivar o seguinte resultado.

Teorema (Indução reversa)

Considere uma afirmação $P(n)$ e suponha que:

1. *$P(n)$ vale para um subconjunto infinito de naturais.*
2. *Se $P(n)$ vale para $n > 1$, então $P(n-1)$ também vale.*

Então $P(n)$ vale para todo natural n.

Você consegue ver por que esse resultado vale?

Exemplo 5

Exemplo

Se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são números reais positivos, então:

$$(x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Demonstração:

1. Primeiro, mostramos que vale para $n = 2^k$ para todo $k \geq 0$.
2. Depois, mostramos que, se vale n, também vale para $n - 1$.

Exemplo 5 (cont)

Lema (1)

Considere um inteiro $k \geq 0$. Se $n = 2^k$, então o teorema vale.

Vamos mostrar por indução em k.

- Se $n = 2^0 = 1$, a inequação vale trivialmente.
- Se $n = 2^1 = 2$, a inequação vale, já que:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x_1 x_2} &\leq \frac{x_1 + x_2}{2} && \Leftrightarrow \\
x_1 x_2 &\leq \frac{x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2}{4} && \Leftrightarrow \\
2x_1x_2 &\leq x_1^2 + x_2^2 && \Leftrightarrow \\
0 &\leq x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 && \Leftrightarrow \\
0 &\leq (x_1 - x_2)^2.
\end{aligned}$$

Exemplo 5 (cont)

- Agora considere um número $k \geq 0$.
- **Suponha** que a inequação vale para $n = 2^k$.
- **Vamos demonstrar** que a inequação vale para $2n = 2^{k+1}$.
- Reescrevendo o lado esquerdo da inequação para $2n$,

$$(x_1 x_2 \ldots x_{2n})^{\frac{1}{2n}} = \sqrt{(x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \, (x_{n+1} x_{n+2} \ldots x_{2n})^{\frac{1}{n}}}.$$

- Defina: $\quad y_1 = (x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \quad$ e $\quad y_2 = (x_{n+1} x_{n+2} \ldots x_{2n})^{\frac{1}{n}}$
- Portanto, pelo caso $n = 2$ já demonstrado,

$$(x_1 x_2 \ldots x_{2n})^{\frac{1}{2n}} = \sqrt{y_1 \; y_2} \leq \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Exemplo 5 (cont)

- Utilizando a h.i. duas vezes:

$$y_1 = (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$
$$y_2 = (x_{n+1} x_{n+2} \dots x_{2n})^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{2n}}{n}.$$

- Substituindo na inequação anterior:

$$\begin{aligned}(x_1 x_2 \dots x_{2n})^{\frac{1}{2n}} &\leq \frac{y_1 + y_2}{2} \\ &= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{2n} + \frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{2n}}{2n} \\ &= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n}}{2n}\end{aligned}$$

- Isso mostra o lema para $k + 1$ e completa a demonstração.

Exemplo 5 (cont)

Para utilizar a indução reversa, ainda precisamos do seguinte.

Lema (2)

Se o teorema vale para $n \geq 2$, ele também vale para $n - 1$.

Demonstração:

- Queremos demonstrar:

$$(x_1 x_2 \dots x_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}.$$

- Defina:

$$z = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}.$$

- Como o teorema vale para n, pela premissa, sabemos que:

$$(x_1 x_2 \dots x_{n-1} z)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + z}{n} = z.$$

Exemplo 5 (cont)

- Elevando ambos os lados à potência $\frac{n}{n-1}$,

$$(x_1 x_2 \dots x_{n-1} z)^{\frac{1}{n-1}} \leq z^{\frac{n}{n-1}}.$$

- Finalmente, multiplicando ambos os lados por $z^{-\frac{1}{n-1}}$,

$$(x_1 x_2 \dots x_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \leq z = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}.$$

- Assim, o teorema para $n-1$, completando a prova.

Reduzir ou aumentar

- No passo da indução, supomos que a afirmação é válida para o caso $n-1$ e mostramos que é válida para n.
- Portanto, devemos **SEMPRE** partir de um caso genérico para n e reduzi-lo a algum caso particular para $n-1$.
- Um **ERRO COMUM** é sair de um caso genérico para $n-1$ e construir um exemplo do caso n.
  - Não basta dar um exemplo para n.
  - Esse procedimento não é geral.

Todas as retas se interceptam?

O que há de errado com a demonstração seguinte ?

Exemplo

Considere n retas distintas no plano, concorrentes duas a duas. Então existe um ponto comum a todas as n retas.

Demonstração:

- Se $n = 1$ ou $n = 2$, então a afirmação é clara.
- Fixe $n > 2$ e suponha que a afirmação vale para $n - 1$.
- Considere n retas no plano concorrentes duas a duas.

Todas as retas se interceptam?

- Sejam S_1, S_2 dois subconjuntos distintos com $n-1$ retas.
- Pela h.i., as retas de S_1 interceptam-se em um ponto p_1.
- Analogamente, as retas de S_2 interceptam-se em p_2.
- Daí, cada reta de $S_1 \cap S_2$ intercepta tanto p_1 quanto p_2.
- Como duas retas da interseção só se tocam em um ponto, sabemos que $p_1 = p_2$.
- Portanto, todas as retas interceptam-se em um ponto.

Certo? **NÃO!**

- Supomos que há duas retas na interseção.
- Isso é verdade quando $n \geq 4$, mas falha quando $n = 3$.

Notação assintótica e crescimento de funções

Notação assintótica

- Vamos expressar complexidade como uma **função em n**.
- A função mede o número de instruções de um algoritmo.
- Então, as funções consideradas são sempre positivas.
- Dependendo do caso, n representa diferentes valores:
  - **Problemas de precisão arbitrária:** número de bits.
  - **Problemas em grafos:** número de vértices e/ou arestas.
  - **Problemas com vetores:** tamanho do vetor.
  - **Problemas de busca em textos:** tamanho das strings.

Comparação de funções

- Vamos comparar funções assintoticamente.
- Queremos desprezar as constantes multiplicativas.
- Vamos falar em termos de **ordem** de crescimento.

	$n = 100$	$n = 1000$	$n = 10^4$	$n = 10^6$	$n = 10^9$
$\log n$	2	3	4	6	9
n	100	1000	10^4	10^6	10^9
$n \log n$	200	3000	$4 \cdot 10^4$	$6 \cdot 10^6$	$9 \cdot 10^9$
n^2	10^4	10^6	10^8	10^{12}	10^{18}
$100n^2 + 15n$	$1,0015 \cdot 10^6$	$1,00015 \cdot 10^8$	$\approx 10^{10}$	$\approx 10^{14}$	$\approx 10^{20}$
2^n	$\approx 1,26 \cdot 10^{30}$	$\approx 1,07 \cdot 10^{301}$	?	?	?

Notação O

Definição

A classe $\mathrm{O}(g(n))$ *é o conjunto de funções* $f(n)$ *tais que:*

- *Existem constantes positivas* c *e* n_0 *que satisfazem:*
- $0 \leq f(n) \leq cg(n)$ *para todo* $n \geq n_0$.

Dizemos que $f(n)$ cresce **NO MÁXIMO** tão rápido quanto $g(n)$.

Notação O: exemplo

Exemplo

$\frac{1}{2}n^2 - 3n \in O(n^2)$

- Temos $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$ e $g(n) = n^2$.
- Escolha valores
$$c = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad n_0 = 1.$$
- Então, supondo $n \geq n_0$,
$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{2}n^2 - 3n \\ &= \frac{1}{2} \cdot (n^2 - 6n) \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot n^2 && \text{(pois } n \geq 0\text{)} \\ &= c \cdot g(n). \end{aligned}$$

Notação Ω

Definição

A classe $\Omega(g(n))$ é o conjunto de funções $f(n)$ tais que:

- *Existem constantes positivas c e n_0 que satisfazem:*
- $0 \leq cg(n) \leq f(n)$ *para todo* $n \geq n_0$.

Dizemos que $f(n)$ cresce **NO MÍNIMO** tão rápido quanto $g(n)$.

Notação Ω: exemplo

Exemplo

$\frac{1}{2}n^2 - 3n \in \Omega(n^2)$

- Temos $f(n) = \frac{1}{4}n^2 - 3n$ e $g(n) = n^2$.
- Escolha valores
$$c = \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad n_0 = 12.$$
- Então, supondo $n \geq n_0$,
$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{2}n^2 - 3n \\ &= \frac{n}{2} \cdot (n-6) \\ &\geq \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} && \text{(pois } n \geq 12\text{)} \\ &= c \cdot g(n). \end{aligned}$$

Notação Θ

Definição

A classe $\Theta(g(n))$ é o conjunto de funções $f(n)$ tais que:

- *Existem constantes positivas c_1, c_2 e n_0 que satisfazem:*
- $0 \leq c_1\, g(n) \leq f(n) \leq c_2\, g(n)$ *para todo* $n \geq n_0$.

Dizemos que $f(n)$ cresce **TÃO RÁPIDO** quanto $g(n)$.

Notação Θ: exemplo

Exemplo

$\frac{1}{2}n^2 - 3n \in \Theta(n^2)$

- Temos $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - 3n$ e $g(n) = n^2$.
- Escolha valores

$$c_1 = \frac{1}{4}, \quad c_2 = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad n_0 = 12.$$

- Então, supondo $n \geq n_0$, já verificamos que

$$c_1\, g(n) \leq f(n) \leq c_2\, g(n).$$

Notação o

Definição

A classe $o(g(n))$ é o conjunto de funções $f(n)$ tais que:

- *Para **toda** constante $c > 0$, existe um número n_0 que satisfaz:*
- $0 \leq f(n) < cg(n)$ *para todo* $n \geq n_0$.

Dizemos que $f(n)$ cresce **MAIS LENTAMENTE** que $g(n)$.

Notação o: exemplo

Exemplo

$1000n^2 \in o(n^3)$

- Temos $f(n) = 1000n^2$ e $g(n) = n^3$.
- Seja $c > 0$ uma constante **ARBITRÁRIA**.
- Defina $n_0 = \lceil \frac{1000}{c} \rceil + 1$.
- Então, supondo $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} f(n) &= 1000n^2 \\ &= \frac{1000}{n} \cdot n^3 \\ &< \quad c \cdot n^3 && \text{(pois } n \geq n_0\text{)} \\ &= \quad c \cdot g(n). \end{aligned}$$

Notação ω

Definição

A classe $\omega(g(n))$ é o conjunto de funções $f(n)$ tais que:

- *Para **toda** constante $c > 0$, existe um número n_0 que satisfaz:*
- $0 \leq cg(n) < f(n)$ *para todo* $n \geq n_0$.

Dizemos que $f(n)$ cresce **MAIS RAPIDAMENTE** que $g(n)$.

Notação ω: exemplo

Exemplo

$\frac{1}{1000}n^2 \in \omega(n)$

- Temos $f(n) = \frac{1}{1000}n^2$ e $g(n) = n$.
- Seja $c > 0$ uma constante **ARBITRÁRIA**.
- Defina $n_0 = \lceil 1000c \rceil + 1$.
- Então, supondo $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{1000}n^2 \\ &= \frac{n}{1000} \cdot n \\ &> c \cdot n && \text{(pois } n \geq n_0\text{)} \\ &= c \cdot g(n). \end{aligned}$$

Relação com limites

Regra de l'Hôpital

Teorema (Regra de l'Hôpital)

Sejam f e g funções diferenciáveis tais que

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} g(n) = \infty.$$

Se o limite de $\frac{f'(n)}{g'(n)}$ existir, então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(n)}{g'(n)}.$$

Regra de l'Hôpital

Exemplo

Relacione $f(n) = \ln n$ e $g(n) = \sqrt{n}$ usando classes de funções adequadas.

- Temos $f'(n) = \frac{1}{n}$ e $g'(n) = \frac{1}{2\sqrt{n}}$
- Assim,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(n)}{g'(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0.$$

- Portanto, $f(n) = \mathrm{o}(g(n))$.

Propriedades das notações assintóticas

Equivalências

Teorema (Condições equivalentes)

Sejam $f(n)$ e $g(n)$ funções não negativas, então:

- $f(n) \in o(g(n))$ *se, e somente se,* $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.
- $f(n) \in O(g(n))$ *se, e somente se,* $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$.
- $f(n) \in \Theta(g(n))$ *se, e somente se,* $0 < \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$.
- $f(n) \in \Omega(g(n))$ *se, e somente se,* $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} > 0$.
- $f(n) \in \omega(g(n))$ *se, e somente se,* $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$.

Propriedades das classes

Teorema (Transitividade)

- *Se* $f(n) \in \mathrm{O}(g(n))$ *e* $g(n) \in \mathrm{O}(h(n))$, *então* $f(n) \in \mathrm{O}(h(n))$.
- *Se* $f(n) \in \Omega(g(n))$ *e* $g(n) \in \Omega(h(n))$, *então* $f(n) \in \Omega(h(n))$.
- *Se* $f(n) \in \Theta(g(n))$ *e* $g(n) \in \Theta(h(n))$, *então* $f(n) \in \Theta(h(n))$.
- *Se* $f(n) \in \mathrm{o}(g(n))$ *e* $g(n) \in \mathrm{o}(h(n))$, *então* $f(n) \in \mathrm{o}(h(n))$.
- *Se* $f(n) \in \omega(g(n))$ *e* $g(n) \in \omega(h(n))$, *então* $f(n) \in \omega(h(n))$.

Propriedades das classes

Teorema (Reflexividade)

- $f(n) \in \mathrm{O}(f(n))$.
- $f(n) \in \Omega(f(n))$.
- $f(n) \in \Theta(f(n))$.

Teorema (Simetria)

- $f(n) \in \Theta(g(n))$ *se, e somente se,* $g(n) \in \Theta(f(n))$.

Teorema (Simetria Transposta)

- $f(n) \in \mathrm{O}(g(n))$ *se, e somente se,* $g(n) \in \Omega(f(n))$.
- $f(n) \in \mathrm{o}(g(n))$ *se, e somente se,* $g(n) \in \omega(f(n))$.

Exercícios

Exercício 1

Prove que:

a) O, Ω, Θ, o, ω são transitivas.

b) O, Ω, Θ são reflexivas.

c) Θ é simétrica.

Exercício 2

Indique a relação correta e demonstre:

1. 10^{1000} é $O(1)$, $\Omega(1)$ ou $\Theta(1)$?
2. 10^{1000} é $O(n)$, $\Omega(n)$ ou $\Theta(n)$?
3. $3n^2 - 2n + 100$ é $O(n)$, $\Omega(n)$ ou $\Theta(n)$?
4. $3n^2 - 2n + 100$ é $O(n^2)$, $\Omega(n^2)$ ou $\Theta(n^2)$?
5. $3n^2 - 2n + 100$ é $O(n^3)$, $\Omega(n^3)$ ou $\Theta(n^3)$?
6. $\log_{100} n$ é $O(\log_{10} n)$, $\Omega(\log_{10} n)$ ou $\Theta(\log_{10} n)$?
7. $\log_{100} n$ é $O(\log_{100} n)$, $\Omega(\log_{100} n)$ ou $\Theta(\log_{100} n)$?
8. $\log_{100} n$ é $O(\log_{1000} n)$, $\Omega(\log_{1000} n)$ ou $\Theta(\log_{1000} n)$?

Exercício 3

Ordene as seguintes funções por seu crescimento. De forma tal que $f(n)$ esteja na frente de $g(n)$ na ordem se $f(n) = O(g(n))$. Para cada par de funções consecutivas na sua ordem prove que a ordem é válida.

- $\log \log n$
- 2^n
- n^3
- $2^{\log n}$
- $\left(\frac{3}{2}\right)^{\pi}$
- $(\log n)^{\log n}$
- $(\sqrt{2})^{\log n}$
- $n \log n$
- $(\log n)!$
- $n!$
- $n \log n$
- 2^{2^n}
- n^n
- $4^{\log n}$
- $n2^n$

Exercício 4

Prove que:

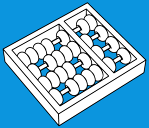
a) $\forall c \in \mathbb{R}^+ : \; c = \Theta(1)$.
b) $f(n)g(n) = \Theta(f(n))\Theta(g(n))$.
c) $\max\{f(n), g(n)\} = \Theta(f(n) + g(n))$.
d) $\forall a, b > 0 : \quad \log_a n = \Theta(\log_b n)$.
e) $\forall k > 0 : \quad \sum_{i=0}^{k} a_i n^i = \Theta(n^k)$, se $a_k > 0$.
f) $\log(n^n) = \Theta(\log(n!))$.
g) $\forall k > 0, \; c > 1 : \quad n^k = O(c^n)$.
h) $\forall k, \epsilon > 0 : \quad \log^k n = O(n^\epsilon)$.

Notação assintótica

MO417 - Complexidade de Algoritmos I

03/24

2



Santiago Valdés Ravelo
https://ic.unicamp.br/~santiago/
ravelo@unicamp.br