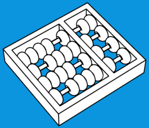
Demonstrações matemáticas

MO417 - Complexidade de Algoritmos I

03/24



Santiago Valdés Ravelo
https://ic.unicamp.br/~santiago/
ravelo@unicamp.br

UNICAMP

"Se as pessoas não acreditam que a matemática é simples, é só porque eles não percebem o quão complicada a vida é."

John Von Neumann.

Técnicas de demonstração

Demonstração direta

A **DEMONSTRAÇÃO DIRETA** de uma implicação $p \Rightarrow q$ é uma sequência de passos lógicos

$$p \Rightarrow p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow p_n \Rightarrow q,$$

que resultam, por transitividade, na implicação desejada.

- Cada passo da demonstração é um axioma ou um teorema demonstrado previamente.

Exemplo

Prove que $\sum_{i=1}^{k}(2i-1) = k^2$.

Demonstração direta (exemplo)

Demonstração:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} 2i - 1 &= 2\sum_{i=1}^{k} i - \sum_{i=1}^{k} 1 \\
&= 2\frac{k(k+1)}{2} - k \\
&= k^2 + k - k \\
&= k^2.
\end{aligned}
$$

Demonstração pela contrapositiva

A **CONTRAPOSITIVA** de $p \Rightarrow q$ é $\neg q \Rightarrow \neg p$.

- A contrapositiva é equivalente à implicação original.
- Demonstrar $\neg q \Rightarrow \neg p$ implica em $p \Rightarrow q$ e vice-versa.
- É útil quando é mais fácil demonstrar a contrapositiva.
- Para demonstrarmos a contrapositiva de uma implicação, podemos utilizar qualquer técnica de demonstração.

Exemplo

Prove que se $2 \mid 3m$, *então* $2 \mid m$.

Demonstração pela contrapositiva (exemplo)

Demonstração:

- Tentando demonstrar diretamente, é possível concluir a partir da hipótese que $m = \frac{2k}{3}$, para algum inteiro k. No entanto, essa conclusão não traz informação sobre a paridade de m.
- É mais fácil demonstrar a contrapositiva.
- Isso é, demonstrar que, se $2 \nmid m$, então $2 \nmid 3m$.
- Se $2 \nmid m$, então m é ímpar, ou seja, existe inteiro k tal que $m = 2k + 1$. Temos então que:

$$3m = 3(2k + 1) = 6k + 3 = 2(3k + 1) + 1.$$

- Logo, $3m$ é ímpar, ou seja, $2 \nmid 3m$.

Demonstração por contradição

A **DEMONSTRAÇÃO POR CONTRADIÇÃO** supõe que a afirmação a ser demonstrada é falsa e obtém uma conclusão contraditória.

- A contradição obtida implica que a suposição é falsa.
- Portanto, a afirmação é verdadeira.
- A negação de $p \Rightarrow q$ corresponde a $p \wedge \neg q$.

Exemplo

Prove que $\sqrt{2}$ *é irracional.*

Demonstração por contradição (exemplo)

Demonstração:

- Suponha que $\sqrt{2}$ é racional (ou seja que é falso o que desejamos demonstrar).
- Então, existem inteiros $p, q \neq 0$ tais que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ e p e q não possuem divisores comuns distintos de 1.
- Desta forma, $2 = \sqrt{2}^2 = \frac{p^2}{q^2}$ e $p^2 = 2q^2$.
- Logo, p^2 é par, o que implica que p deve ser par. Isto é, $p = 2m$ para algum inteiro m.
- Portanto, $4m^2 = (2m)^2 = p^2 = 2q^2$ e $2m^2 = q^2$.
- Isso implica que q também é par.
- Concluindo que 2 é divisor comum de p e q, o que é uma contradição!
- Assim, a nossa hipótese de $\sqrt{2}$ ser racional é falsa. Logo, $\sqrt{2}$ é irracional.

Demonstração por casos

Na **DEMONSTRAÇÃO POR CASOS**, particionamos as possibilidades em um conjunto de casos e demonstramos cada um deles.

- O número de casos é normalmente finito.
- Cada caso é demonstrado usando qualquer técnica.

Exemplo

Provar que a soma de dois inteiros x e y de mesma paridade é sempre par.

Demonstração por casos (exemplo)

Demonstração:

- Temos que considerar individualmente os casos de ambos x e y serem pares ou ímpares.
- **Caso 1:** Ambos x e y são pares. Então, existem inteiros k e l tais que $x = 2k$ e $y = 2l$. Assim,

$$x + y = 2k + 2l = 2(k + l).$$

- Logo, a soma $x + y$ é par.
- **Caso 2:** Ambos x e y são ímpares. Então, existem inteiros k e l tais que $x = 2k + 1$ e $y = 2l + 1$. Assim,

$$x + y = 2k + 1 + 2l + 1 = 2k + 2l + 2 = 2(k + l + 1).$$

- Logo, a soma $x + y$ é par.

Princípio da boa ordem

Princípio da boa ordem

Princípio da boa ordem: Todo subconjunto não vazio dos naturais tem um menor elemento.

Exemplo

Prove que todos os números naturais são interessantes.

Demonstração:

- Denote por A o subconjunto dos naturais que não são interessantes e suponha que $A \neq \emptyset$.
- Pelo princípio da boa ordem A possui um menor elemento x.
- Mas, ser o menor dos naturais não interessantes é **algo interessante**.
- Logo, x seria interessante e $x \notin A$, o que é uma contradição.
- Portanto, $A = \emptyset$.

Princípio da indução

Princípio da indução matemática

Princípio da indução matemática: Dada uma propriedade P sobre os naturais:

- Se $P(n_0)$ é verdadeira para algum natural n_0 e
- se $P(n)$ ser verdadeira para qualquer natural $n \geq n_0$ implica em $P(n+1)$ ser verdadeira.
- Então, P é verdadeira para todos os naturais maiores que n_0.

Demonstração do princípio da indução matemática

Usaremos o princípio da boa ordenação e o método de prova por contradição:

- Suponha que existe uma propriedade P tal que as condições do princípio de indução matemática são verdadeiras mas a tese é falsa, isto é:
  - Existe um n_0 natural tal que $P(n_0)$ é verdadeira e, para qualquer $n \geq n_0$, se $P(n)$ é verdadeira, então $P(n+1)$ também é verdadeira.
  - Mas, P não é verdadeira para todo natural maior ou igual que n_0.
- Então, o conjunto dos naturais maiores ou iguais a n_0 para os quais a propriedade P não é verdadeira é não vazio. Denotemos esse conjunto por A.
- Pelo princípio da boa ordem, A possui um elemento mínimo, seja m tal elemento.
- Como os elementos de A são maiores ou iguais a n_0 e $P(n_0)$ é verdadeira enquanto $P(m)$ não, temos que $m \geq n_0 + 1$.
- Se $P(m-1)$ não fosse verdadeira, então $m-1$ estaria em A e m não seria o menor elemento de A. Portanto, $P(m-1)$ tem que ser verdadeira.
- Mas, $m - 1 \geq n_0$ e $P(m-1)$ é verdadeira, logo $P(m - +1) = P(m)$ deve ser verdadeira.
- Isso contradiz $m \in A$, portanto P é verdadeira para todo natural maior que n_0!

Demonstração por indução

Usando o **PRINCÍPIO DA INDUÇÃO**, demonstramos uma afirmação $P(n)$ que depende de um parâmetro natural n.

- Demonstramos $P(n)$ para todos os valores de n.
- Quebramos a demonstração em duas partes.

1. **CASO BÁSICO**:
   - Consideramos $n = 1$.
   - Demonstramos $P(n)$.
2. **CASO GERAL**:
   - Consideramos $n > 1$.
   - **Hipótese da indução:** supomos que $P(n-1)$ vale.
   - **Passo da indução:** demonstramos $P(n)$ usando a hipótese.

Exemplo

Prove que a soma dos n primeiros números ímpares é n^2.

Demonstração por indução alternativa

Uma forma equivalente:

1. Caso básico:
   - Consideramos $n = 1$.
   - Demonstramos $P(n)$.
2. Caso geral:
   - Consideramos $n \geq 1$:
   - Supomos que $P(n)$ vale.
   - Demonstramos $P(n+1)$.

Exemplo

Prove que a soma dos n primeiros números ímpares é n^2.

Fortalecendo a hipótese

Algumas vezes é útil supor que a hipótese vale para **TODOS** os casos anteriores.

1. Caso básico:
   - Consideramos $n = 1$.
   - Demonstramos $P(n)$.
2. Caso geral:
   - Consideramos $n > 1$.
   - Supomos que $P(k)$ vale para todo $1 \leq k \leq n - 1$.
   - demonstramos $P(n)$.

Exemplo

Prove que todo inteiro n pode ser escrito como a soma de diferentes potências de 2.

Indução a partir de um ponto

Às vezes queremos provar uma afirmação $P(n)$ apenas para $n \geq n_0$ para algum n_0.

1. Caso básico:
   - Consideramos $n = n_0$.
   - Demonstramos $P(n)$.
2. Caso geral:
   - Consideramos $n > n_0$.
   - Supomos que $P(k)$ vale para todo $n_0 \leq k \leq n-1$.
   - Demonstramos $P(n)$ usando a hipótese.

Exemplo

Prove que todo inteiro $n \geq 2$ pode ser fatorado como um produto de primos.

Exemplos de demonstração por indução

Exemplo 1

Exemplo

Demonstre que, para inteiros $x \geq 1$ e $n \geq 1$, o número $x^n - 1$ é divisível por $x - 1$.

Demonstração:

1. No caso básico, considere $n = 1$:
   - Temos $x^n - 1 = x - 1$, que é divisível por $x - 1$.
   - Isso mostra a afirmação para $n = 1$.

Exemplo 1 (cont)

2. No caso geral, considere $n \geq 1$:
   - **Hipótese de indução**:
     - Suponha que $x - 1$ divide $x^n - 1$.
   - **Passo de indução**:
     - Observe que $x^{n+1} - 1 = x(x^n - 1) + (x - 1)$.
     - Pela h.i., $x^n - 1$ é divisível por $x - 1$.
     - Então, $x - 1$ divide o lado direito da equação.
     - Portanto, $x - 1$ também divide $x^{n+1} - 1$.

Exemplo 2

Exemplo

Demonstre que a equação

$$\sum_{i=1}^{n}(3+5i) = \frac{5n^2+11n}{2}$$

vale para todo inteiro $n \geq 1$.

Demonstração:

- Para o caso básico, temos:

$$\sum_{i=1}^{1}(3+5i) = 8 = \frac{5n^2+11n}{2}.$$

- Então, a afirmação vale quando $n = 1$.

Exemplo 2 (cont)

- Considere um número $n > 1$ fixo.
- Suponha que a equação valha para $n - 1$.
- Vamos mostrar que a equação também vale para n.
- Desenvolvendo a soma,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(3+5i) &= \sum_{i=1}^{n-1}(3+5i) + (3+5n) \\
&= \frac{5(n-1)^2 + 11(n-1)}{2} + (3+5n) \qquad \text{(pela h.i.)} \\
&= \frac{5n^2 - 10n + 5 + 11n - 11}{2} + \frac{6+10n}{2} \\
&= \frac{5n^2 + 11n}{2}.
\end{aligned}$$

Exemplo 3

Exemplo

Demonstre que a inequação

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

vale para todo natural n e real x tal que $(1+x) > 0$.

Demonstração:

- Se $n = 1$, ambos os lados da inequação valem $1 + x$.
- Isso demonstra o caso básico.

Exemplo 3 (cont)

- Considere $n \geq 1$ e suponha que a inequação vale para n.
- Desenvolvendo o lado esquerdo da inequação, temos:

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \\
&\geq (1+nx)(1+x) && \text{(pela h.i. e já que } (1+x) > 0) \\
&= 1 + (n+1)x + nx^2 \\
&\geq 1 + (n+1)x. && \text{(já que } nx^2 \geq 0)
\end{aligned}$$

- Isso demonstra desigualdade para $n+1$.

Exemplo 4

Algumas vezes temos que ter mais cuidado ao usar a hipótese da indução.

Exemplo

Demonstre que a série S_n definida abaixo satisfaz

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} < 1,$$

para todo inteiro $n \geq 1$.

Demonstração:

- Para $n = 1$, a inequação se reduz a $\frac{1}{2} < 1$, que é válida.
- Isso demonstra o caso básico.

Exemplo 4 (cont)

- Considere um número $n \geq 1$ e suponha que $S_n < 1$.
- Queremos mostrar que $S_{n+1} < 1$.

Primeira tentativa:

- Desenvolvemos S_{n+1} usando a definição:

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{2^{n+1}} < \ 1 + \frac{1}{2^{n+1}} \qquad \text{(pela h.i.)}$$

- Mas o lado direito já é maior do que 1!

Exemplo 4 (cont)

Podemos manipular S_{n+1} e usar a hipótese de outro jeito:

$$
\begin{aligned}
S_{n+1} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\
&< \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1) && \text{(pela h.i.)} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

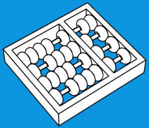
Isto conclui a demonstração.

Demonstrações matemáticas

MO417 - Complexidade de Algoritmos I

03/24

1



Santiago Valdés Ravelo
https://ic.unicamp.br/~santiago/
ravelo@unicamp.br