Lista de exercícios 03 - Grafos: árvore geradora mínima, caminhos mínimos, fluxo em redes

1. Suponha que é dado um grafo G com custos nas arestas positivos. Seja T uma árvore geradora mínima de G. Agora suponha que substituímos o custo cada aresta, c_e, por seu quadrado, c_e^2, criando assim uma nova instância do problema com o mesmo grafo, mas com custos diferentes. Concorde ou descorde: T ainda deve ser uma árvore geradora mínima para a nova instância. Prove ou dê um contraexemplo.

2. Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo com pesos associados a cada aresta. O professor B. Smart propôs o seguinte algoritmo para encontrar uma árvore geradora mínima de G.

```
input   : grafo conexo G = (V, E) e função de pesos nas arestas ω
output  : H subgrafo de G.
begin
    Ordene E em ordem não crescente de pesos
    H ← G
    for e ∈ E em ordem não crescente de pesos do
        if H − e é conexo then
            H ← H − e
        end
    end
    return H
end
```

Algorithm 1: SMART-AGM(G, ω).

(a) Argumente sucintamente (em poucas linhas) que o grafo obtido é conexo e acíclico.

(b) Mostre que se e é uma aresta de G com peso máximo e $G - e$ é conexo, então existe uma árvore geradora mínima de G que não contém e.

(c) Usando os resultados dos itens anteriores, mostre que o algoritmo está correto.

3. Responda as seguintes questões:

(a) Mostre que, se para todo $X \subseteq V$, o corte $\delta(X)$ contém exatamente uma aresta leve, então existe uma única árvore geradora mínima T de G.

(b) Suponha que todas as arestas de G têm custos distintos, com exceção de duas $(u, v), (x, y)$, que têm o mesmo custo. Suponha também que todo caminho de u até x contém essas duas arestas. Argumente que existe uma única árvore geradora mínima. Você pode utilizar o fato enunciado no item anterior.

4. Seja $G = (V, E)$ um grafo não direcionado. Um conjunto $F \subseteq E$ de arestas é chamado conjunto de retroalimentação se cada ciclo de G tiver pelo menos uma aresta em F.

(a) Suponha que G não seja ponderado. Crie um algoritmo eficiente para encontrar um conjunto de retroalimentação de tamanho mínimo.

(b) Suponha que G é um grafo não direcionado com pesos positivos nas arestas. Projete um algoritmo eficiente para encontrar um conjunto de retroalimentação de peso mínimo. Argumente que seu algoritmo está correto.

5. Uma empresa possui n filiais que devem ser conectadas, direta ou indiretamente. Cada par de filiais que são conectadas diretamente utiliza um serviço de fibra ótica, ou um serviço de conexão via linha telefônica. A velocidade da conexão (em MBit/s) via linha telefônica entre duas filiais depende da distância e é fornecida pela empresa de telefonia. A velocidade da fibra é sempre constante, 1GBit/s. Devido a restrições orçamentárias, somente f ($f < n$) conexões via fibra serão contratadas. Uma vez instalada a rede, duas filiais podem ser conectadas (indiretamente) por uma sequência de conexões diretas; *a velocidade de conexão entre as duas filiais* é a velocidade da conexão mais lenta nessa sequência. A velocidade de rede é a menor velocidade de conexão entre quaisquer duas filiais. Escreva um algoritmo para encontrar uma rede com a maior velocidade de rede possível. Argumente por que o algoritmo está correto e analise a complexidade.

6. Considere um grafo direcionado $G = (V, E)$ cujas arestas têm pesos 0 ou 1. Projete um algoritmo de tempo $O(V + E)$ que obtém uma árvore de caminhos mínimos a partir de um vértice s.

7. Dado um grafo ponderado e direcionado $G = (V, E)$ sem ciclos de peso negativo, seja m o máximo, entre todos os vértices $v \in V$, do número mínimo de arestas em um caminho mínimo da fonte s para v. (Aqui, o caminho mínimo é por peso, e não por número de arestas.) Reescreva o algoritmo Bellman-Ford para ele termine em $m + 1$ passos, mesmo que m não seja conhecido com antecedência.

8. Escreva um algoritmo que verifica se há ciclos negativos em um grafo direcionado e, se houver, devolva um tal ciclo.

9. Milda é a presidenta de um determinado país B. Esse país é dividido em estados e cada estado possui uma capital. Milda quer reestruturar o sistema de estradas e ferrovias e precisa da sua ajuda. As ferrovias são muito antigas e seu custo de manutenção é alto. Seu trabalho é ajudar a presidenta a decidir quais ferrovias podem ser desativadas. No entanto, como B é um país democrático, uma ferrovia só pode ser desativada se isso não piorar a qualidade do sistema de transporte, isso é, uma ferrovia pode ser desativada apenas se a distância de cada cidade à capital mais próxima não for modificada. Considere que o país B tem n cidades e que se uma estrada ou ferrovia liga a cidade i à cidade j, então ela pode ser utilizada para ir tanto de i para j como de j para i. Obtenha um algoritmo eficiente para descobrir quantas ferrovias podem ser desativadas.

10. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais são falsas? Justifique sua resposta apresentado uma prova ou um contra-exemplo.

(a) Se f é um fluxo máximo de uma rede então $f(a) = 0$ ou $f(a) = c(a)$ para toda aresta $a \in E$.

(b) Toda rede possui um fluxo máximo f tal que $f(a) = 0$ ou $f(a) = c(a)$ para toda aresta $a \in E$.

(c) Se todas as arestas têm capacidades diferentes então existe um único corte mínimo.

(d) Suponha que (S, T) é um corte mínimo em uma rede (G, c, s, t). Se multiplicarmos as capacidades de todas as arestas por um número $\lambda > 0$ então (S, T) também é um corte mínimo na nova rede $(D, \lambda c, s, t)$.

(e) Suponha que (S, T) é um corte mínimo em uma rede (G, c, s, t). Se aumentarmos as capacidades de todas as arestas somando um número $\lambda > 0$ então (S, T) também é um corte mínimo na nova rede (D, c', s, t).

11. Seja (G, c, s, t) uma rede de fluxo. Um fluxo inteiro é *par* (*ímpar*, respectivamente) se $f(a)$ é par (ímpar, respectivamente) para toda aresta $a \in E$. Prove ou mostre um contra-exemplo para cada uma das afirmações seguintes.

(a) Se todas as capacidades são inteiros pares, então existe um fluxo máximo que é par.

(b) Se todas as capacidades são inteiros ímpares, então existe um fluxo máximo que é ímpar.

12. Dados vértices s e t em um *grafo direcionado* G, dizemos que uma coleção $P_1, P_2, \ldots, P_k$ de caminhos com início em s e final em t é *aresta-disjunta* se para quaisquer caminhos P_i e P_j, P_i e P_j não têm arestas em comum. Responda as seguintes questões:

(a) Demonstre que, dado um grafo G e vértices s e t, o número máximo de caminhos disjuntos nas arestas de s a t é igual ao número mínimo de arestas necessárias para desconectar s de t.

(b) O problema dos caminhos aresta-disjuntos (CAD) consiste em, dados um grafo G e vértices s e t em G, encontrar uma coleção aresta-disjunta máxima de caminhos de s a t. Mostre como solucionar CAD, usando fluxo máximo.

13. Um emparelhamento perfeito em um grafo bipartido $G = (V, E)$, é um conjunto de arestas $M \subseteq E$ tal que cada vértice em V incide em exatamente uma aresta de M. Seja $G = (V, E)$ um grafo bipartido não direcionado, proponha um algoritmo eficiente para saber se G possui um emparelhamento perfeito.

14. Um certo dia o Rei Artur caprichosamente decidiu que era tempo das donzelas da corte de Camelot se casarem. Na corte havia n donzelas e n cavaleiros. Apesar de Artur ser conhecido como um regente impiedoso, ele não queria casar nenhuma donzela com algum cavaleiro de quem ela não gostasse. Assim, ele pediu a Merlin que arranjasse o casamento de todas as donzelas de modo que isto não ocorresse. Suponha que cada donzela fornece a Merlin uma lista dos cavaleiros com quem ela aceitaria se casar. Como se vê, além de autoritário, o rei Artur era machista e preconceituoso. Mostre como Merlin pode determinar se é possível realizar estes n casamentos forçados.

15. Várias famílias saem juntas para jantar. Para aumentar a interação social[*] cada pessoa gostaria de se sentar em uma mesa em que não houvesse outro membro da sua família. Suponha que no total existam p famílias e a família i tem a_i membros. Suponha que há q mesas disponíveis e que a mesa j tem capacidade para acomodar b_j pessoas. Mostre como formular este problema como um problema de fluxo máximo.

16. Suponha que Neo quer enviar uma informação de um ponto (vértice) s a outro ponto t em uma rede com capacidades unitárias (isto é, cada aresta tem capacidade igual a 1). A Matrix pode impedir isto destruindo um conjunto de *arestas* da rede (o que seria equivalente a remover as arestas do grafo orientado). Mostre como a Matrix pode determinar um conjunto mínimo de arestas cuja remoção destrói todos os caminhos de s a t. Justifique.

[*]Suponha por absurdo que todos vão desligar seus smartphones.

17. Considere novamente o exercício anterior, mas agora suponha que a Matrix quer *desligar* um conjunto de *vértices* da rede (o que seria equivalente a remover tais vértices do grafo orientado). Mostre como a Matrix pode determinar um conjunto mínimo de vértices cuja remoção destrói todos os caminhos de s a t. Justifique.

18. Exercícios dos capítulos 23, 24, 25 e 26 do livro de texto.