



Lista de exercícios 02 - Grafos: conceitos e buscas

Os seguintes exercícios são para aprofundar no estudo da matéria.

1. Sejam G um grafo e u, v vértices de G . Mostre que se existe um passeio de u a v em G , então existe um caminho de u a v em G .
2. Sejam G um grafo e u, v, w vértices de G . Mostre que se em G existem um caminho de u a v e um caminho de v a w então existe um caminho de u a w em G .
3. Seja G um grafo direcionado e u, v vértices de G . Mostre que se existe um passeio de u a v em G , então existe um caminho de u a v em G .
4. Sejam G um grafo direcionado e u, v, w vértices de G . Mostre que se em G existem um caminho de u a v e um caminho de v a w então existe um caminho de u a w em G .
5. Demonstre ou dê contraexemplo:
 - (a) Todo passeio fechado contém um ciclo.
 - (b) Todo passeio fechado em um grafo direcionado contém um ciclo direcionado.
 - (c) Uma rota é um passeio fechado com pelo menos uma aresta e que não tem repetição de arestas. Toda rota contém um ciclo.
 - (d) Se o grau mínimo de um grafo G é $d > 1$, então em G existe um ciclo de comprimento pelo menos $d + 1$.
 - (e) Um grafo G com n vértices é uma árvore se e somente se for acíclico e tiver $n - 1$ arestas.
6. Considere um grafo $G = (V, E)$. Demonstre que as seguintes afirmações são equivalentes:
 - (a) G é uma árvore.
 - (b) G é conexo e possui exatamente $|V| - 1$ arestas.
 - (c) G é conexo e a remoção de qualquer aresta desconecta o grafo.
 - (d) Para todo par de vértices u, v de G , existe um único caminho de u a v em G .
7. Prove por indução que todo grafo conexo $G = (V, E)$, com $|V| \geq 2$, tem um vértice cuja remoção mantém o grafo resultante conexo.
8. Circule C para afirmações corretas e E para incorretas.
 - (a) Seja G um grafo e u, v, w vértices de G . Se existe aresta de u a v e aresta de v a w , então existe uma aresta de u a w .

- (b) Seja G um grafo e u, v, w vértices de G . Se não existe caminho de u a w , então o número de arestas no grafo induzido por u, v e w é no máximo 1.
- (c) Todo grafo tem um número par de vértices ímpares, i.e., com grau ímpar.
- (d) Todo grafo tem um número ímpar de vértices pares, i.e., com grau par.
- (e) Existem grafos que contêm passeios fechados e são acíclicos, isso é, são florestas.
- (f) Todo grafo que contém um passeio fechado *sem repetição de arestas* é cíclico.
- (g) Seja G um grafo simples qualquer com 10 vértices. O número de arestas de G somado ao número de arestas do complementar \overline{G} é 45.
- (h) Dado um grafo G , se o menor caminho entre u e v tem tamanho exatamente 2, então existe aresta que liga u a v em \overline{G} .
- (i) T é uma árvore se e somente se contém $|V| - 1$ arestas.
- (j) Se em um grafo simples conexo todo vértice tem grau dois, então esse grafo é um ciclo.
- (k) Toda árvore com pelo menos 2 vértices é um grafo bipartido.
- (l) Dada uma árvore T , existe um subconjunto de vértices $X \subseteq V(T)$ tal que $G = T - X$ tem pelo menos $V(T)/2$ vértices com grau zero.
- (m) Todo grafo com um número ímpar de vértices é bipartido.
- (n) O melhor algoritmo para calcular o quadrado de uma matriz quadrada de tamanho n é estritamente melhor que o trivial com tempo $O(n^3)$.
- (o) Se um grafo G tiver muitas arestas, i.e., $E = \Omega(V^2)$, então todo algoritmo para calcular o quadrado de G leva tempo pelo menos $\Omega(V^3)$, já que $VE = \Theta(V^3)$ nesse caso.
- (p) A quarta potência de um grafo $G = (V, E)$ é um grafo Q tal que existe aresta entre dois vértices u e v em Q se, e somente se, houver caminho entre u e v de tamanho no máximo 4 em G . Não existe um algoritmo que calcula Q , dado G , em tempo $O(V^3)$.

9. Exercícios (Livro de texto): 22.1-1, 22.1-2, 22.1-3, 22.1-4, 22.1-6, 22.1-7

10. O transposto do grafo direcionado $G = (V, E)$ é o grafo $G^T = (V, E^T)$, em que $E = \{(u, v) \in V \times V : (u, v) \in E\}$. Assim, G é G com todas as suas arestas invertidas. Descreva algoritmos eficientes para calcular G a partir de G , para as representações de lista de adjacências e matriz de adjacências de G . Analise os tempos de execução dos seus algoritmos.

Seja M uma matriz de adjacência de um grafo $G = (V, E)$ e calcule o quadrado M^2 . Dados $u, v \in V$, se existe um caminho de u até v , que valores pode haver em $M^2[u, v]$? Utilize essa informação e dê um algoritmo que calcule o quadrado de um grafo, representado como uma matriz de adjacências, com tempo assintoticamente melhor do que $|V|^3$.

11. Crie um algoritmo que receba um grafo G em forma de lista de adjacências e um conjunto $S \subseteq V$ e crie um novo grafo $G[S]$. Analise a complexidade de seu algoritmo.

12. Exercícios (Livro de texto): 22.2-1, 22.2-2, 22.2-3, 22.2-4, 22.2-5, 22.2-6, 22.2-7(*)

13. O diâmetro de uma árvore $T = (V, E)$ é definida como $\max_{u,v \in V} \delta(u, v)$, isso é, o mais longo entre todos os caminhos de distância mínima na árvore. Dê um algoritmo eficiente para calcular o diâmetro de uma árvore e analise o tempo de execução de seu algoritmo.

14. Projete um algoritmo para decidir se um dado grafo não direcionado $G = (V, E)$ contém um ciclo de tamanho 4. O tempo de execução de seu algoritmo deve ser $O(V^3)$.

15. Daniel, que é físico e matemático, acredita ter resolvido um problema importante tanto na Física quanto na Matemática. Temendo as consequências do seu feito, mas querendo preservar sua descoberta, ele encriptou um documento e entregou a chave a um amigo, físico, e a mensagem cifrada uma amiga, matemática. Ele enviou o seguinte e-mail para o físico: *Fiz uma descoberta muito importante! Compartilhe essa chave com todos seus amigos físicos exatamente um dia após recebê-la. Se por um acaso conseguir descobrir o conteúdo, por favor, não divulgue mais nada a mais ninguém!* E escreveu parecido para a matemática: *Fiz uma descoberta muito importante! Compartilhe essa cifra com todos seus amigos matemáticos exatamente um dia após recebê-la. Se por um acaso conseguir descobrir o conteúdo, por favor, não divulgue mais nada a mais ninguém!*

Acontece que ele se esqueceu de um detalhe: como ele, diversas pessoas são físicas e matemáticas. Suponha que você conheça as relações de amizade entre todos os físicos e matemáticos e que todos respeitem a vontade de Daniel. Escreva um algoritmo eficiente que conte o número de pessoas que terão acesso a sua descoberta.

16. Exercícios (Livro de texto): 22-3.1, 22-3.2, 22-3.3, 22-3.4, 22-3.5, 22-3.6, 22-3.7, 22-3.8, 22-3.9, 22-3.10, 22-3.11, 22-3.12

17. A entrada é um grafo não direcionado $G = (V, E)$, uma árvore geradora T de G e um vértice v . Projete um algoritmo para determinar se T é uma árvore de busca em profundidade enraizada em v . Em outras palavras, determine se T pode ser a saída de DFS quando as arestas estão listadas em alguma ordem e começando pelo vértice v .

18. Lembre-se de que o algoritmo de busca em profundidade, DFS, pode ser implementado por meio de uma pilha, ao invés de recursão. Suponha que o comprimento máximo de um caminho direcionado em um grafo direcionado G é no máximo R , isso é, todo caminho direcionado de G tem no máximo R arcos. Considere agora sua implementação não recursiva de DFS. Prove ou desprove que a pilha P nunca terá mais do que $R + 1$ elementos na execução da chamada $\text{DFS}(G)$.

19. Implemente uma busca em profundidade (DFS) usando uma pilha (de forma a eliminar a recursão). O seu algoritmo deverá *devolver uma floresta de busca em profundidade* representada por um vetor π e deve executar em tempo $O(V + E)$. Você pode utilizar as sub-rotinas de uma pilha como caixas-pretas: $\text{CRIARPILHA}(Q)$, $\text{TOPO}(Q)$, $\text{DESEMPILHAR}(Q)$, $\text{EMPILHAR}(Q, v)$.

20. Exercícios (Livro de texto): 22.4-1, 22.4-2, 22.4-3, 22.4-4, 22.4-5, 22.5-1, 22.5-2, 22.5-3, 22.5-4, 22.5-5, 22.5-6, 22.5-7

21. Mostre que para cada grafo direcionado G , vale $((G^{\text{T}})^{\text{CFC}})^{\text{T}} = G^{\text{CFC}}$. Isso é, o transposto do grafo de componentes de G^{T} é o mesmo que o grafo de componentes do grafo G .

22. Uma ponte de um grafo G é uma aresta cuja remoção incrementa o número de componentes. Dê um algoritmo de tempo $O(V + E)$ para determinar as pontes de um grafo.