MC558 - Projeto e Análise de Algoritmos II

Lista de exercícios 01 - Grafos: conceitos e buscas

A entrega desta lista é opcional. A resolução (individual) dos exercícios poderá ser considerada para ajudar na avaliação da primeira prova.

1. Responda verdadeiro ou falso. Justifique cada caso mediante prova ou contraexemplo:

(a) Um grafo G é uma árvore se e somente se G for acíclico maximal (ou seja, G é acíclico e a adição de qualquer aresta cria um ciclo).

(b) Se em um grafo G todos os vértices tem grau no conjunto $\{1, 2\}$ e há exatamente dois vértices com grau 1, então G é exatamente um caminho.

(c) Um grafo bipartido com n vértices tem no máximo $\frac{n^2}{4}$ arestas.

(d) Se d é o grau mínimo de um grafo G, então em G há um caminho de comprimento maior ou igual que d.

2. Um *k-cubo* é um grafo cujos vértices são todas as sequências $b_1 b_2 \dots b_k$ em que cada b_i pertence a $\{0, 1\}$. Em um k-cubo, dois vértices são adjacentes se diferem em exatamente uma posição. Quantas arestas tem o k-cubo? Prove que um k-cubo é bipartido.

3. Uma *grade p-por-q* é um grafo cujo conjunto de vértices é o produto cartesiano $\{1, 2 \dots, p\} \times \{1, 2, \dots, q\}$ e dois vértices (i, j) e (i', j') são adjacentes se: $|i - i'| = 1$ e $j = j'$, ou $i = i'$ e $|j - j'| = 1$. Quantas arestas tem a grade p-por-q? Mostre que a grade p-por-q é um grafo bipartido.

4. O *diâmetro* de um grafo G é a maior distância entres dois vértices de G.

(a) Seja G um grafo simples de diâmetro maior que três. Mostre que $\overline{G}$ tem diâmetro no máximo três.

(b) Seja T uma árvore com pelo menos uma aresta de diâmetro d. Suponha que após a remoção de uma aresta, obtemos duas componentes conexas T_1 e T_2 com diâmetro d_1 e d_2, respectivamente. Mostre que $d \geq (d_1 + d_2)/2 + 1$.

5. Dê um algoritmo que determine se um determinado grafo não direcionado $G = (V, E)$ contém um ciclo. Seu algoritmo deve ser executado em $O(V)$, independente de $|E|$.

6. Uma outra maneira de obter uma ordenação topológica em um grafo direcionado $G = (V, E)$ é repetidamente encontrar um vértice com grau de entrada 0, incluí-lo na solução e depois remover do grafo esse vértice com todas as arestas de saída. Explique como implementar essa ideia de forma que o algoritmo execute em tempo $O(V + E)$.

7. Um ponto de articulação de um grafo G é um vértice cuja remoção provoca o aumento de componentes conexas. Projete um algoritmo para encontrar pontos de articulação em tempo $O(V + E)$.

8. Projete um algoritmo que recebe um digrafo acíclico G e dois vértices s e t e devolve o número de caminhos diferentes em G de s até t. Seu algoritmo deve executar em tempo $O(V + E)$.

9. Um *ralo universal* em um digrafo $G = (V, E)$ é um sorvedouro com grau de entrada $|V| - 1$ (no qual chega um arco desde cada vértice do grafo). Dada a matriz de adjacências de um digrafo G, projete um algoritmo $O(V)$ para determinar se G possui um ralo universal.

10. Seja T uma árvore produzida pelo *BFS* de um grafo G. Embora os conceitos de arcos de avanço, cruzamento e retrocesso tenham sido definidos no contexto da busca *DFS*, eles fazem sentido em relação a qualquer árvore ou floresta radicada de G.

(a) Mostre que G não tem arcos de avanço em relação a T.

(b) Mostre que, se G for não-dirigido, então G não tem arcos de retorno.

(c) G pode ter arcos de cruzamento em relação a T? E se G for não-dirigido?