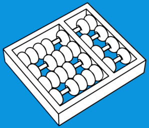
Programação linear

MC558 - Projeto e Análise de Algoritmos II

01/24

8



Santiago Valdés Ravelo
https://ic.unicamp.br/~santiago/
ravelo@unicamp.br

UNICAMP

"If the system exhibits a structure which can be represented by a mathematical equivalent, called a mathematical model, and if the objective can be also so quantified, then some computational method may be evolved for choosing the best schedule of actions among alternatives."

George B. Dantzig.

Otimizando um portfólio de investimentos

Exemplo

Suponha que:

Exemplo

Suponha que:

- Temos 100.000 reais para investir em ações.

Exemplo

Suponha que:

- Temos 100.000 reais para investir em ações.
- As ações selecionadas e a porcentagem de retorno esperado em um ano são:

Exemplo

Suponha que:

- Temos 100.000 reais para investir em ações.
- As ações selecionadas e a porcentagem de retorno esperado em um ano são:

Empresa	Retorno (em %)
emp_1 = Petrobrás (petróleo/estatal)	9,0%
emp_2 = Vale do Rio Doce (siderurgia)	10,2%
emp_3 = Votorantim (siderurgia)	6,5%
emp_4 = Texaco (petróleo)	9,5%
emp_5 = Sanasa (água/estatal)	8,5%

Algumas restrições

A recomendação dos especialistas é a seguinte:

Algumas restrições

A recomendação dos especialistas é a seguinte:

- Invista pelo menos 25% e no máximo 55% em estatais.

Algumas restrições

A recomendação dos especialistas é a seguinte:

- Invista pelo menos 25% e no máximo 55% em estatais.
- *Petrobrás* e *Texaco* são empresas do mesmo setor (petróleo); o o investimento nas duas não deve passar de 55%.

Algumas restrições

A recomendação dos especialistas é a seguinte:

- Invista pelo menos 25% e no máximo 55% em estatais.
- *Petrobrás* e *Texaco* são empresas do mesmo setor (petróleo); o o investimento nas duas não deve passar de 55%.
- *Vale do Rio Doce* e *Votorantim* são do mesmo setor (siderurgia); o investimento nas duas não deve passar de 45%.

Algumas restrições

A recomendação dos especialistas é a seguinte:

- Invista pelo menos 25% e no máximo 55% em estatais.
- *Petrobrás* e *Texaco* são empresas do mesmo setor (petróleo); o o investimento nas duas não deve passar de 55%.
- *Vale do Rio Doce* e *Votorantim* são do mesmo setor (siderurgia); o investimento nas duas não deve passar de 45%.
- *Apesar da Vale do Rio Doce* ter a maior taxa de retorno, há boatos que ela pode estar maquiando faturamento. Recomenda-se que a quantidade de investimento nela não passe de 60% do total de investimento feito em empresas de siderurgia.

Escrevendo formalmente

VARIÁVEIS:

Escrevendo formalmente

VARIÁVEIS:

- x_1 quantidade de investimento na *Petrobrás*.

Escrevendo formalmente

VARIÁVEIS:

- x_1 quantidade de investimento na *Petrobrás*.
- x_2 quantidade de investimento na *Vale do Rio Doce*.

Escrevendo formalmente

VARIÁVEIS:

- x_1 quantidade de investimento na *Petrobrás*.
- x_2 quantidade de investimento na *Vale do Rio Doce*.
- x_3 quantidade de investimento na *Votorantim*.

Escrevendo formalmente

VARIÁVEIS:

- x_1 quantidade de investimento na *Petrobrás*.
- x_2 quantidade de investimento na *Vale do Rio Doce*.
- x_3 quantidade de investimento na *Votorantim*.
- x_4 quantidade de investimento na *Texaco*.

Escrevendo formalmente

VARIÁVEIS:

- x_1 quantidade de investimento na *Petrobrás*.
- x_2 quantidade de investimento na *Vale do Rio Doce*.
- x_3 quantidade de investimento na *Votorantim*.
- x_4 quantidade de investimento na *Texaco*.
- x_5 quantidade de investimento na *Sanasa*.

Escrevendo formalmente

VARIÁVEIS:

- x_1 quantidade de investimento na *Petrobrás*.
- x_2 quantidade de investimento na *Vale do Rio Doce*.
- x_3 quantidade de investimento na *Votorantim*.
- x_4 quantidade de investimento na *Texaco*.
- x_5 quantidade de investimento na *Sanasa*.

FUNÇÃO OBJETIVO:

Escrevendo formalmente

VARIÁVEIS:

- x_1 quantidade de investimento na *Petrobrás*.
- x_2 quantidade de investimento na *Vale do Rio Doce*.
- x_3 quantidade de investimento na *Votorantim*.
- x_4 quantidade de investimento na *Texaco*.
- x_5 quantidade de investimento na *Sanasa*.

FUNÇÃO OBJETIVO:

- Maximizar o lucro esperado:
  maximize $0{,}090x_1 + 0{,}102x_2 + 0{,}065x_3 + 0{,}095x_4 + 0{,}085x_5$.

Escrevendo formalmente

VARIÁVEIS:

- x_1 quantidade de investimento na *Petrobrás*.
- x_2 quantidade de investimento na *Vale do Rio Doce*.
- x_3 quantidade de investimento na *Votorantim*.
- x_4 quantidade de investimento na *Texaco*.
- x_5 quantidade de investimento na *Sanasa*.

FUNÇÃO OBJETIVO:

- Maximizar o lucro esperado:
  maximize $0{,}090x_1 + 0{,}102x_2 + 0{,}065x_3 + 0{,}095x_4 + 0{,}085x_5$.

RESTRIÇÕES:

Escrevendo formalmente

VARIÁVEIS:

- x_1 quantidade de investimento na *Petrobrás*.
- x_2 quantidade de investimento na *Vale do Rio Doce*.
- x_3 quantidade de investimento na *Votorantim*.
- x_4 quantidade de investimento na *Texaco*.
- x_5 quantidade de investimento na *Sanasa*.

FUNÇÃO OBJETIVO:

- Maximizar o lucro esperado:
  maximize $0{,}090x_1 + 0{,}102x_2 + 0{,}065x_3 + 0{,}095x_4 + 0{,}085x_5$.

RESTRIÇÕES:

- As quantidades $x_1, \ldots, x_5$ devem ser valores válidos e devem satisfazer recomendações dos especialistas.

Restrições impostas por especialistas

- Invista pelo menos 25% e no máximo 55% em estatais:

$$x_1 + x_5 \geq 25000$$

$$x_1 + x_5 \leq 55000$$

Restrições impostas por especialistas

- Invista pelo menos 25% e no máximo 55% em estatais:
$$x_1 + x_5 \geq 25000$$
$$x_1 + x_5 \leq 55000$$

- *Petrobrás* e *Texaco* são empresas do mesmo setor (petróleo); o investimento nas duas não deve passar de 55%:
$$x_1 + x_4 \leq 55000$$

Restrições impostas por especialistas

- Invista pelo menos 25% e no máximo 55% em estatais:
$$x_1 + x_5 \geq 25000$$
$$x_1 + x_5 \leq 55000$$
- *Petrobrás* e *Texaco* são empresas do mesmo setor (petróleo); o investimento nas duas não deve passar de 55%:
$$x_1 + x_4 \leq 55000$$
- *Vale do Rio Doce* e *Votorantim* são do mesmo setor (siderurgia); o investimento nas duas não deve passar de 45%:
$$x_2 + x_3 \leq 45000$$

Restrições impostas por especialistas

- Apesar da *Vale do Rio Doce* ter a maior taxa de retorno, há boatos que ela pode estar maquiando faturamento. Recomenda-se que a quantidade de investimento nela não passe de 60% do total de investimento feito em empresas de siderurgia:

$$\mathbf{x_2} \leq 0{,}6(\mathbf{x_2} + \mathbf{x_3})$$

  que o mesmo que

$$-0{,}4\mathbf{x_2} + 0{,}6\mathbf{x_3} \geq 0$$

Restrições impostas por especialistas

- Apesar da *Vale do Rio Doce* ter a maior taxa de retorno, há boatos que ela pode estar maquiando faturamento. Recomenda-se que a quantidade de investimento nela não passe de 60% do total de investimento feito em empresas de siderurgia:

$$\mathbf{x_2} \leq 0{,}6(\mathbf{x_2} + \mathbf{x_3})$$

  que o mesmo que

$$-0{,}4\mathbf{x_2} + 0{,}6\mathbf{x_3} \geq 0$$

DEMAIS RESTRIÇÕES:

Restrições impostas por especialistas

- Apesar da *Vale do Rio Doce* ter a maior taxa de retorno, há boatos que ela pode estar maquiando faturamento. Recomenda-se que a quantidade de investimento nela não passe de 60% do total de investimento feito em empresas de siderurgia:

$$x_2 \leq 0{,}6(x_2 + x_3)$$

que o mesmo que

$$-0{,}4x_2 + 0{,}6x_3 \geq 0$$

DEMAIS RESTRIÇÕES:

- Total investido é 100.000:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100000$$

Restrições impostas por especialistas

- Apesar da *Vale do Rio Doce* ter a maior taxa de retorno, há boatos que ela pode estar maquiando faturamento. Recomenda-se que a quantidade de investimento nela não passe de 60% do total de investimento feito em empresas de siderurgia:

$$x_2 \leq 0{,}6(x_2 + x_3)$$

que o mesmo que

$$-0{,}4x_2 + 0{,}6x_3 \geq 0$$

DEMAIS RESTRIÇÕES:

- Total investido é 100.000:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100000$$

- Nenhuma quantidade pode ser negativa:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0$$

Formulação Linear

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & 0{,}090x_1 + 0{,}102x_2 + 0{,}065x_3 + 0{,}095x_4 + 0{,}085x_5 \\
\text{sujeito a} & \left\{
\begin{array}{rrrrrcl}
x_1+ & x_2+ & x_3+ & x_4+ & x_5 & = & 100000 \\
x_1+ & & & & x_5 & \geq & 25000 \\
x_1+ & & & & x_5 & \leq & 55000 \\
x_1+ & & & x_4 & & \leq & 55000 \\
 & x_2+ & x_3 & & & \leq & 45000 \\
 & -0{,}4x_2+ & 0{,}6x_3 & & & \geq & 0 \\
x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & x_3 \geq 0 & x_4 \geq 0 & x_5 \geq 0 & &
\end{array}
\right.
\end{array}
$$

Resolvendo-se obtemos uma lucro estimado de 9094 reais investindo:

$x_1 = 0$ na *Petrobrás*, $x_2 = 12000$ na *Vale do Rio Doce*,
$x_3 = 8000$ na *Votorantim*, $x_4 = 55000$ na *Texaco* e
$x_5 = 25000$ na *Sanasa*.

Programação linear

Motivação

A programação linear:

Motivação

A programação linear:

- Resolve de forma exata muitos problemas.

Motivação

A programação linear:

- Resolve de forma exata muitos problemas.
- Resolve de forma aproximada muitos problemas.

Motivação

A programação linear:

- Resolve de forma exata muitos problemas.
- Resolve de forma aproximada muitos problemas.
- Faz parte dos principais métodos para obter soluções ótimas.

Motivação

A programação linear:

- Resolve de forma exata muitos problemas.
- Resolve de forma aproximada muitos problemas.
- Faz parte dos principais métodos para obter soluções ótimas.
- Faz parte dos principais métodos para obter soluções aproximadas.

Motivação

A programação linear:

- Resolve de forma exata muitos problemas.
- Resolve de forma aproximada muitos problemas.
- Faz parte dos principais métodos para obter soluções ótimas.
- Faz parte dos principais métodos para obter soluções aproximadas.
- Obtém excelentes delimitantes para soluções ótimas.

Motivação

A programação linear:

- Resolve de forma exata muitos problemas.
- Resolve de forma aproximada muitos problemas.
- Faz parte dos principais métodos para obter soluções ótimas.
- Faz parte dos principais métodos para obter soluções aproximadas.
- Obtém excelentes delimitantes para soluções ótimas.
- Pode ser resolvida muito rapidamente.

Motivação

A programação linear:

- Resolve de forma exata muitos problemas.
- Resolve de forma aproximada muitos problemas.
- Faz parte dos principais métodos para obter soluções ótimas.
- Faz parte dos principais métodos para obter soluções aproximadas.
- Obtém excelentes delimitantes para soluções ótimas.
- Pode ser resolvida muito rapidamente.
- Há diversos programas livres e comerciais.

Definição

PL

No **PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR** (PL) de minimização (maximização), é dada uma matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{Q}^{n \times m}$, vetores $c = (c_i) \in \mathbb{Q}^n$ e $b = (b_i) \in \mathbb{Q}^m$, e queremos encontrar um vetor $\mathbf{x} = (\mathbf{x_i}) \in \mathbb{Q}^m$ tal que:

$$
\begin{array}{ll}
\min(\max) & c_1\mathbf{x_1} + c_2\mathbf{x_2} + \cdots + c_m\mathbf{x_m} \\
\text{s.a:} & \left\{
\begin{array}{rcl}
a_{11}\mathbf{x_1} + a_{12}\mathbf{x_2} + \cdots + a_{1m}\mathbf{x_n} & \leq & b_1 \\
a_{21}\mathbf{x_1} + a_{22}\mathbf{x_2} + \cdots + a_{2m}\mathbf{x_n} & \geq & b_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n1}\mathbf{x_1} + a_{n2}\mathbf{x_2} + \cdots + a_{nm}\mathbf{x_n} & = & b_n \\
\mathbf{x_i} \in \mathbb{Q} & &
\end{array}
\right.
\end{array}
$$

ou decidir que não existe um tal vetor.

Exemplo. Almoço

Considere um almoço que consiste em salada e sopa, com as seguintes informações nutricionais:

Exemplo. Almoço

Considere um almoço que consiste em salada e sopa, com as seguintes informações nutricionais:

- Cada $100g$ de salada, há $80mcg$ de vitamina **A**, $0.4mcg$ de vitamina **B** e $4mg$ de gorduras.

Exemplo. Almoço

Considere um almoço que consiste em salada e sopa, com as seguintes informações nutricionais:

- Cada $100g$ de salada, há $80mcg$ de vitamina **A**, $0.4mcg$ de vitamina **B** e $4mg$ de gorduras.
- Cada $100g$ de sopa, há $60mcg$ de vitamina **A**, $0.2mcg$ de vitamina **B** e $6mg$ de gorduras.

Exemplo. Almoço

Considere um almoço que consiste em salada e sopa, com as seguintes informações nutricionais:

- Cada $100g$ de salada, há $80mcg$ de vitamina **A**, $0.4mcg$ de vitamina **B** e $4mg$ de gorduras.
- Cada $100g$ de sopa, há $60mcg$ de vitamina **A**, $0.2mcg$ de vitamina **B** e $6mg$ de gorduras.

Os requerimentos nutricionais são de pelo menos $450mcg$ de vitamina **A** e $2mcg$ de vitamina **B**, enquanto se deve evitar o consumo de mais de $700g$ de comida.

Exemplo. Almoço

Considere um almoço que consiste em salada e sopa, com as seguintes informações nutricionais:

- Cada $100g$ de salada, há $80mcg$ de vitamina **A**, $0.4mcg$ de vitamina **B** e $4mg$ de gorduras.
- Cada $100g$ de sopa, há $60mcg$ de vitamina **A**, $0.2mcg$ de vitamina **B** e $6mg$ de gorduras.

Os requerimentos nutricionais são de pelo menos $450mcg$ de vitamina **A** e $2mcg$ de vitamina **B**, enquanto se deve evitar o consumo de mais de $700g$ de comida.

Quantas gramas de salada e quantas de sopa devem ser consumidas, visando satisfazer os requerimentos nutricionais e minimizar o total de gorduras consumidas?

Exemplo. Almoço

Tabela de informação nutricional:

	Vitamina A	Vitamina B	Gorduras
	$80mcg/100g$	$0.4mcg/100g$	$4mg/100g$
	$60mcg/100g$	$0.2mcg/100g$	$6mg/100g$

Os requerimentos nutricionais são: pelo menos $450mcg$ de vitamina **A** e $2mcg$ de vitamina **B**, além de evitar consumir mais de $700g$ de comida.

Exemplo. Almoço
Formulação. Variáveis

$\mathbf{x}_{\mathbf{salada}}$, quantidade (em $100g$) de salada para o almoço.

Exemplo. Almoço
Formulação. Variáveis

x_{salada}, quantidade (em $100g$) de salada para o almoço.

x_{sopa}, quantidade (em $100g$) de sopa para o almoço.

Exemplo. Almoço

Formulação. Função objetivo

	Gorduras
	$4mg\,/\,100g$
	$6mg\,/\,100g$

Exemplo. Almoço
Formulação. Função objetivo

	Gorduras
salada	$4mg\,/\,100g$
sopa	$6mg\,/\,100g$

$$\min \quad 4x_{\textsf{salada}} + 6x_{\textsf{sopa}}$$

Exemplo. Almoço
Formulação. Restrições de requerimentos vitamínicos

	Vitamina A	Vitamina B
	$80mcg/100g$	$0.4mcg/100g$
	$60mcg/100g$	$0.2mcg/100g$
Requerido	$450mcg$	$2mcg$

Exemplo. Almoço
Formulação. Restrições de requerimentos vitamínicos

	Vitamina A	Vitamina B
	$80 mcg/100g$	$0.4 mcg/100g$
	$60 mcg/100g$	$0.2 mcg/100g$
Requerido	$450 mcg$	$2 mcg$

$$80\mathbf{x}_{\mathbf{salada}} + 60\mathbf{x}_{\mathbf{sopa}} \geq 450$$
$$0.4\mathbf{x}_{\mathbf{salada}} + 0.2\mathbf{x}_{\mathbf{sopa}} \geq 2$$

Exemplo. Almoço
Formulação. Restrições de peso máximo

O almoço não deve pesar mais que $700g$:

Exemplo. Almoço
Formulação. Restrições de peso máximo

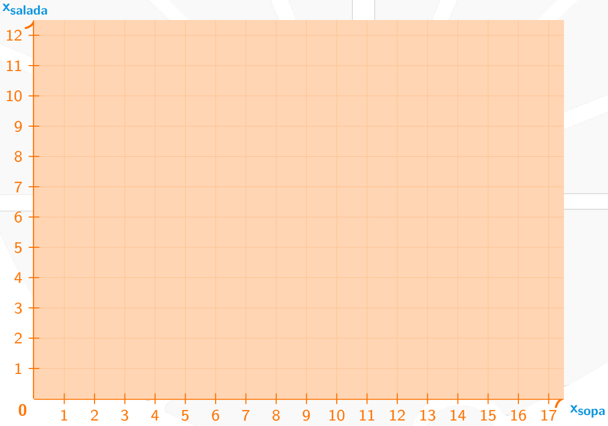
O almoço não deve pesar mais que $700g$:

$$\mathbf{x_{salada}} + \mathbf{x_{sopa}} \leq 7$$

Exemplo. Almoço
Formulação

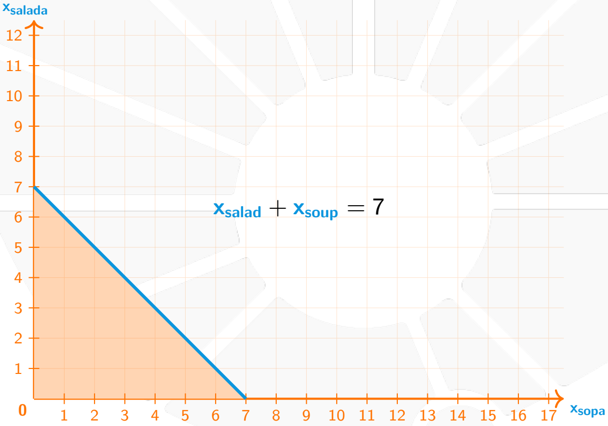
$$
\begin{aligned}
\min \quad & 4x_{salada} + 6x_{sopa} \\
s.a: \quad & \\
& 80x_{salada} + 60x_{sopa} \geq 450 \\
& 0.4x_{salada} + 0.2x_{sopa} \geq 2 \\
& x_{salada} + x_{sopa} \leq 7 \\
& x_{salada}, x_{sopa} \geq 0
\end{aligned}
$$

Exemplo. Interpretação gráfica



$x_{salada}, x_{sopa} \geq 0$

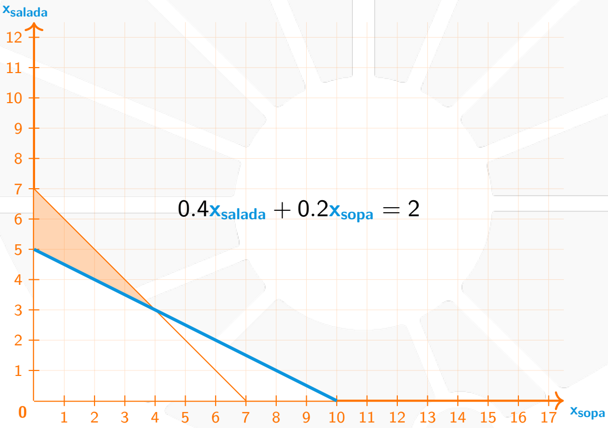
Exemplo. Interpretação gráfica



$x_{salada}, x_{sopa} \geq 0$

$x_{salada} + x_{sopa} \leq 7$

Exemplo. Interpretação gráfica

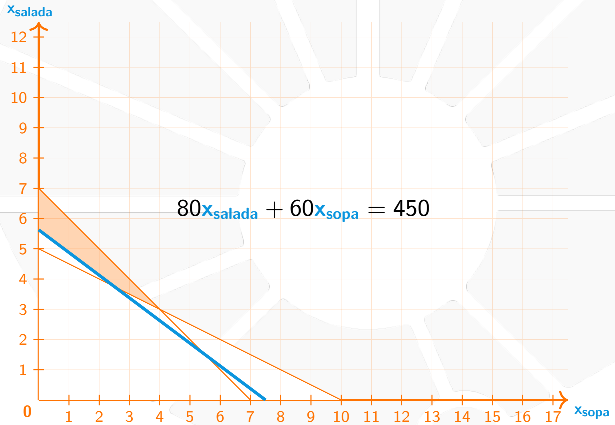


$x_{salada}, x_{sopa} \geq 0$

$x_{salada} + x_{sopa} \leq 7$

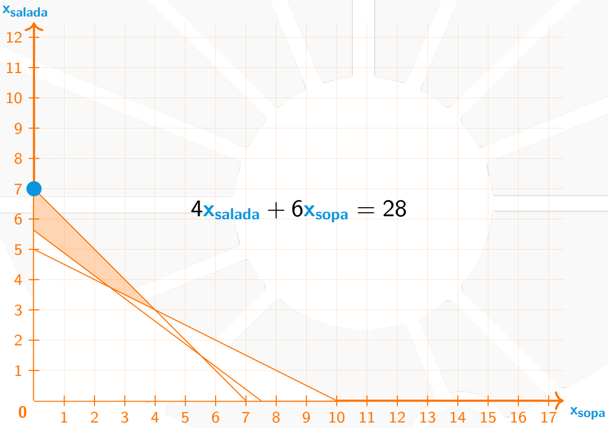
$0.4x_{salada} + 0.2x_{sopa} \geq 2$

Exemplo. Interpretação gráfica



$$x_{salada}, x_{sopa} \geq 0$$
$$x_{salada} + x_{sopa} \leq 7$$
$$0.4x_{salada} + 0.2x_{sopa} \geq 2$$
$$80x_{salada} + 60x_{sopa} \geq 450$$

Exemplo. Interpretação gráfica



$$x_{salada}, x_{sopa} \geq 0$$

$$x_{salada} + x_{sopa} \leq 7$$

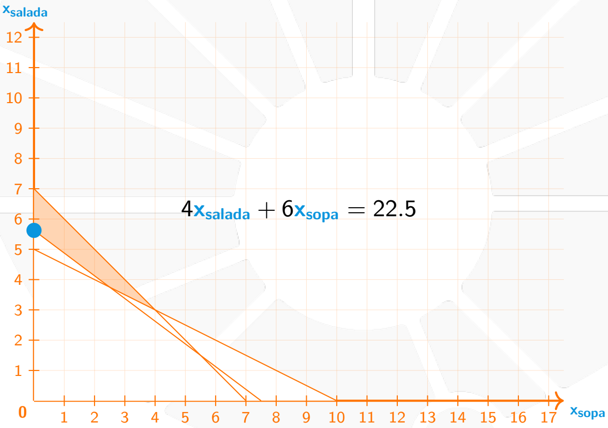
$$0.4x_{salada} + 0.2x_{sopa} \geq 2$$

$$80x_{salada} + 60x_{sopa} \geq 450$$

Função objetivo:

$$\min \quad 4x_{salada} + 6x_{sopa}$$

Exemplo. Interpretação gráfica



$$x_{salada}, x_{sopa} \geq 0$$

$$x_{salada} + x_{sopa} \leq 7$$

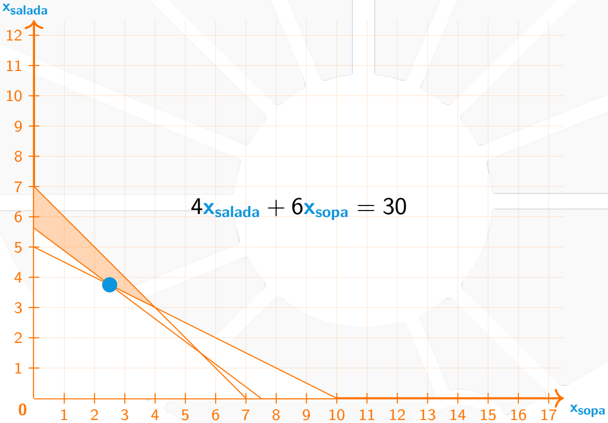
$$0.4x_{salada} + 0.2x_{sopa} \geq 2$$

$$80x_{salada} + 60x_{sopa} \geq 450$$

Função objetivo:

$$\min \quad 4x_{salada} + 6x_{sopa}$$

Exemplo. Interpretação gráfica



$x_{salada}, x_{sopa} \geq 0$

$x_{salada} + x_{sopa} \leq 7$

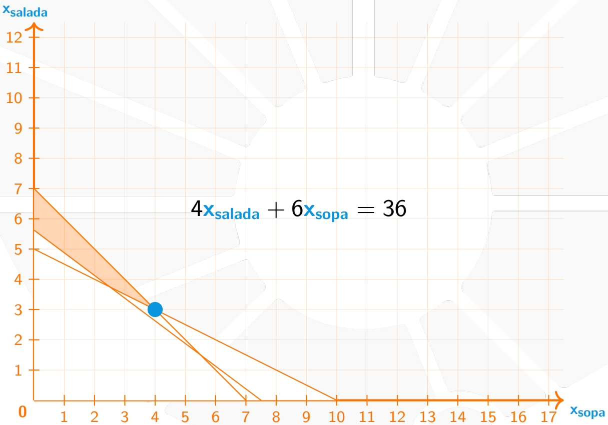
$0.4x_{salada} + 0.2x_{sopa} \geq 2$

$80x_{salada} + 60x_{sopa} \geq 450$

Função objetivo:

min $\quad 4x_{salada} + 6x_{sopa}$

Exemplo. Interpretação gráfica



$$x_{salada}, x_{sopa} \geq 0$$

$$x_{salada} + x_{sopa} \leq 7$$

$$0.4x_{salada} + 0.2x_{sopa} \geq 2$$

$$80x_{salada} + 60x_{sopa} \geq 450$$

Função objetivo:

$$\min \quad 4x_{salada} + 6x_{sopa}$$

Exemplo. Almoço generalizado

Suponha que há m pratos e n nutrientes, onde cada $100g$ do i-**ésimo** prato, há $\eta_{\mathbf{i},\mathbf{j}}$ unidades do j-**ésimo** nutriente e $\mathbf{f_i}$ miligramas de gordura. Considere que é necessário o consumo de pelo menos $\mathbf{N_i}$ unidades do i-**ésimo** nutriente e que o peso total do almoço não pode ser maior que W gramas.

Exemplo. Almoço generalizado

Suponha que há m pratos e n nutrientes, onde cada $100g$ do i-**ésimo** prato, há $\eta_{\mathbf{i},\mathbf{j}}$ unidades do j-**ésimo** nutriente e $\mathbf{f_i}$ miligramas de gordura. Considere que é necessário o consumo de pelo menos $\mathbf{N_i}$ unidades do i-**ésimo** nutriente e que o peso total do almoço não pode ser maior que W gramas.

Quantas gramas de cada prato devem ser consumidas de forma que se satisfaçam os requerimentos alimentares e se minimize o consumo de gorduras?

Exemplo. Formulação

Variáveis:

Exemplo. Formulação

Variáveis:

$\mathbf{x_i}$, quantidade (em $100g$) do *i*-**ésimo** prato para o almoço.

Exemplo. Formulação

Variáveis:

$\mathbf{x_i}$, quantidade (em $100g$) do *i*-**ésimo** prato para o almoço.

Programa linear:

Exemplo. Formulação

Variáveis:
$\mathbf{x_i}$, quantidade (em $100g$) do i-**ésimo** prato para o almoço.

Programa linear:

$$\min \quad \sum_{i=1}^{m} f_i \mathbf{x_i}$$

Exemplo. Formulação

Variáveis:

$\mathbf{x_i}$, quantidade (em $100g$) do i-**ésimo** prato para o almoço.

Programa linear:

$$\begin{array}{rl} \min & \sum_{i=1}^{m} f_i \mathbf{x_i} \\ s.a: & \end{array}$$

Exemplo. Formulação

Variáveis:

$\mathbf{x_i}$, quantidade (em $100g$) do i-**ésimo** prato para o almoço.

Programa linear:

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^{m} f_i \mathbf{x_i} \\ s.a: & \\ & \sum_{i=1}^{m} \eta_{i,j} \mathbf{x_i} \geq N_j \quad \forall 1 \leq j \leq n \end{array}$$

Exemplo. Formulação

Variáveis:
$\mathbf{x_i}$, quantidade (em $100g$) do i-**ésimo** prato para o almoço.

Programa linear:

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^{m} f_i \mathbf{x_i} \\ s.a: & \\ & \sum_{i=1}^{m} \eta_{i,j} \mathbf{x_i} \geq N_j \quad \forall 1 \leq j \leq n \\ & \sum_{i=1}^{m} \mathbf{x_i} \leq \frac{W}{100} \end{array}$$

Exemplo. Formulação

Variáveis:

$\mathbf{x_i}$, quantidade (em $100g$) do i-**ésimo** prato para o almoço.

Programa linear:

$$
\begin{array}{ll}
\min & \sum_{i=1}^{m} f_i \mathbf{x_i} \\
s.a: & \\
& \sum_{i=1}^{m} \eta_{i,j} \mathbf{x_i} \geq N_j \quad \forall 1 \leq j \leq n \\
& \sum_{i=1}^{m} \mathbf{x_i} \leq \frac{W}{100} \\
& \mathbf{x_i} \geq 0 \quad\quad\quad\quad \forall 1 \leq i \leq m
\end{array}
$$

Classificação

Dado um programa linear, temos três possibilidades:

Classificação

Dado um programa linear, temos três possibilidades:

- O problema ié **INVIÁVEL**, ou seja, o conjunto de soluções viáveis é vazio.

Classificação

Dado um programa linear, temos três possibilidades:

- O problema ié **INVIÁVEL**, ou seja, o conjunto de soluções viáveis é vazio.
- O problema é **ILIMITADO**, ou seja, o conjunto de soluções viáveis não é vazio e, para qualquer solução viável x, existe uma solução viável x' tal que $c^t\mathbf{x'}$ é estritamente melhor que $c^t\mathbf{x}$.

Classificação

Dado um programa linear, temos três possibilidades:

- O problema ié **INVIÁVEL**, ou seja, o conjunto de soluções viáveis é vazio.
- O problema é **ILIMITADO**, ou seja, o conjunto de soluções viáveis não é vazio e, para qualquer solução viável x, existe uma solução viável x' tal que $c^t\mathbf{x'}$ é estritamente melhor que $c^t\mathbf{x}$.
- O problema é **SOLÚVEL**, ou seja, existe pelo menos uma solução ótima x^*.

Sobre formulações

Vamos fazer alguns exercícios?

Exercício 1. Transporte aéreo

Home Run é uma companhia de transporte que assinou um contrato para transportar munições, armas e medicamentos em dois aviões, um **Airbus** e um **Boeing**. O cliente aceitou receber todo o que a companhia conseguisse transportar, assim **Home Run** deseja maximizar o lucro atendendo às seguintes restrições:

	Densidade (kg/m^3)	Lucro ($\$/kg$)
Munições	30	$20.00
Armas	40	$30.00
Medicamentos	20	$10.00

	Peso máximo	Capacidade máxima
Airbus	$15t$	$80m^3$
Boeing	$25t$	$160m^3$

No máximo $100kg$ de medicamentos podem ser transportados em cada envio (combinando os dois aviões)

a) Proponha um programa linear para o problema, explique o significado das variáveis e das restrições.

b) Generalize a sua formulação para m produtos diferentes e serem transportador em n aviões.

Exercício 2. Barco de carga

Um barco de carga possui três seções para estocar mercadorias: frente, meio e fundo. No barco o peso das mercadorias deve estar distribuído na mesma proporção que os limites de peso para cada seção. Os limites de peso e espaçodas seções e do barco são dados a seguir:

	Weight	Space
Front	$12t$	$90m^3$
Middle	$18t$	$110m^3$
Tail	$10t$	$60m^3$

	m^3/t	$\$/t$
Product 1	6	280
Product 2	9	360
Product 3	7.5	320

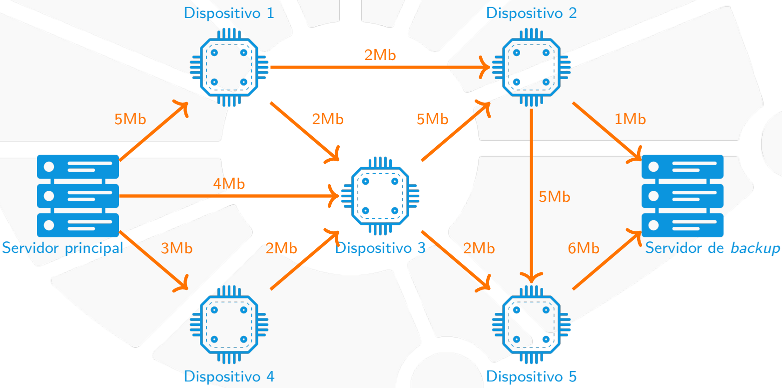
Considere três mercadorias: **Mercadoria 1**, **Mercadoria 2** e **Mercadoria 3** com limites respectivos: $20t$, $16t$ e $25t$. Se o objetivo é maximizar o lucro:

a) Proponha um programa linear para o problema, explique o significado das variáveis e das restrições.

b) Generalize a sua formulação considerando m mercadorias diferentes.

Exercício 3. Comunicação entre servidores

A empresa **Melancia** tem uma rede conectando um servidor principal a um de *backup*. Os valores associados às conexões indicam suas capacidades para envio de dados e os dispositivos podem dividir e juntar pacotes de forma a não perder informação. Qual o tamanho do maior pacote que pode ser enviado do servidor principal ao de *backup*?



Exercício 3. Comunicação entre servidores

a) Proponha um programa linear para o problema, explique o significado das variáveis e das restrições.

b) Generalize a sua formulação considerando m dispositivos.

Uma condição suficiente para soluções inteiras de PL

Algumas definições

Um **POLITOPO**[1] é um conjunto de pontos da forma:

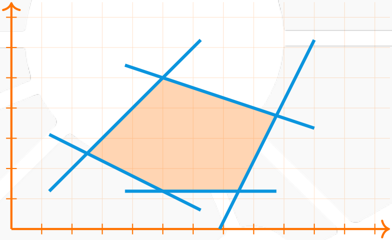
$$P = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{Q}^n : \begin{array}{rcl} a_{11}\mathbf{x_1} + a_{12}\mathbf{x_2} + \cdots + a_{1m}\mathbf{x_n} & \leq & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}\mathbf{x_1} + a_{n2}\mathbf{x_2} + \cdots + a_{nm}\mathbf{x_n} & \geq & b_n \end{array} \right\}.$$

[1] Quando $n = 3$, o politopo também é chamado de poliedro.

Algumas definições

Um **POLITOPO**[1] é um conjunto de pontos da forma:

$$P = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{Q}^n : \begin{array}{rcl} a_{11}\mathbf{x_1} + a_{12}\mathbf{x_2} + \cdots + a_{1m}\mathbf{x_n} & \leq & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}\mathbf{x_1} + a_{n2}\mathbf{x_2} + \cdots + a_{nm}\mathbf{x_n} & \geq & b_n \end{array} \right\}.$$



[1]Quando $n = 3$, o politopo também é chamado de poliedro.

Combinação convexa

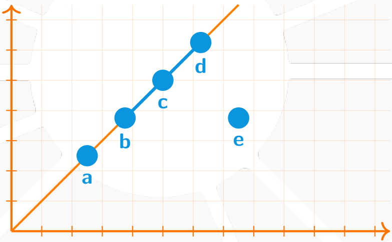
Dado um conjunto de pontos $\mathbf{S} = \{\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n}\}$, dizemos que y é uma **COMBINAÇÃO CONVEXA** dos pontos de S se

- $y = \alpha_1 \mathbf{x_1} + \alpha_2 \mathbf{x_2} + \cdots + \alpha_n \mathbf{x_n}$, onde $\alpha_i \geq 0$ e
- $\sum_i \alpha_i = 1$.

Combinação convexa

Dado um conjunto de pontos $\mathbf{S} = \{\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n}\}$, dizemos que y é uma **COMBINAÇÃO CONVEXA** dos pontos de S se

- $y = \alpha_1 \mathbf{x_1} + \alpha_2 \mathbf{x_2} + \cdots + \alpha_n \mathbf{x_n}$, onde $\alpha_i \geq 0$ e
- $\sum_i \alpha_i = 1$.



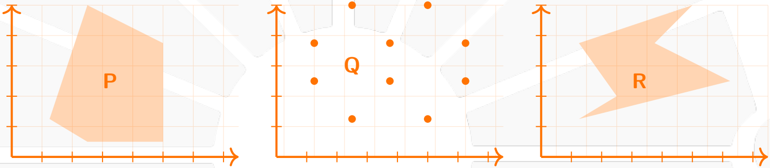
c é combinação convexa de **b** e **d**, mas **a** e **e** não são.

Fecho convexo

O **FECHO CONVEXO** de S, denotado por $conv(S)$ é o conjunto dos pontos que são combinação convexa dos pontos de S.

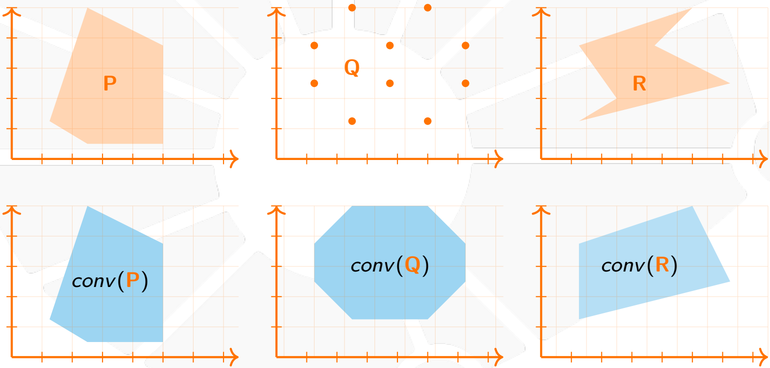
Fecho convexo

O **FECHO CONVEXO** de S, denotado por $conv(S)$ é o conjunto dos pontos que são combinação convexa dos pontos de S.



Fecho convexo

O **FECHO CONVEXO** de S, denotado por $conv(S)$ é o conjunto dos pontos que são combinação convexa dos pontos de S.

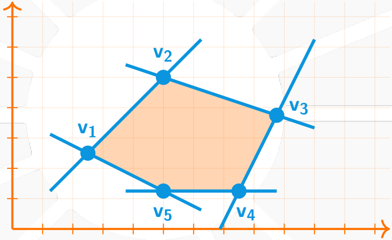


Vértices do politopo

Os **VÉRTICES** ou **PONTOS EXTREMAIS** de um politopo P são os pontos de P que não podem ser escritos como combinação convexa de outros pontos de P.

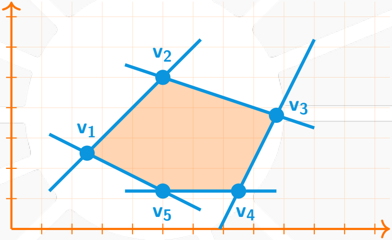
Vértices do politopo

Os **VÉRTICES** ou **PONTOS EXTREMAIS** de um politopo P são os pontos de P que não podem ser escritos como combinação convexa de outros pontos de P.



Vértices do politopo

Os **VÉRTICES** ou **PONTOS EXTREMAIS** de um politopo P são os pontos de P que não podem ser escritos como combinação convexa de outros pontos de P.



Note que um vértice do poliedro é o único ponto que satisfaz um determinado conjunto de igualdades simultaneamente.

Determinantes e resolução de sistemas lineares

Dada matriz quadrada A de ordem n e coluna j, podemos calcular o **DETERMINANTE** pela fórmula de Laplace:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} |A^{i,j}|,$$

onde $A^{i,j}$ é a submatriz obtida ao se remover a linha i e a coluna j.

Determinantes e resolução de sistemas lineares

Dada matriz quadrada A de ordem n e coluna j, podemos calcular o **DETERMINANTE** pela fórmula de Laplace:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} |A^{i,j}|,$$

onde $A^{i,j}$ é a submatriz obtida ao se remover a linha i e a coluna j.

Método de Cramer

Se $|A| \neq 0$, então podemos revolver o sistema de equações $Ax = b$ obtendo x da seguinte forma:

$$x_i = \frac{|A_b^j|}{|A|},$$

onde A_b^j é a matriz A com a coluna j trocada pelo vetor b.

Politopo inteiro e matriz totalmente unimodular

Uma submatriz de A é uma matriz obtida removendo linhas e colunas de A.

Teorema

Todo vértice y do politopo definido por uma matriz A é determinado por uma submatriz não singular A' de A tal que $A' \cdot y = b'$, onde b' contém os elementos de b das linhas correspondentes de A'.

Politopo inteiro e matriz totalmente unimodular

Uma submatriz de A é uma matriz obtida removendo linhas e colunas de A.

Teorema

Todo vértice y do politopo definido por uma matriz A é determinado por uma submatriz não singular A' de A tal que $A' \cdot y = b'$, onde b' contém os elementos de b das linhas correspondentes de A'.

- Um **POLITOPO É INTEIRO** se todos os seus vértices contêm apenas componentes inteiras.

Politopo inteiro e matriz totalmente unimodular

Uma submatriz de A é uma matriz obtida removendo linhas e colunas de A.

Teorema

Todo vértice y do politopo definido por uma matriz A é determinado por uma submatriz não singular A' de A tal que $A' \cdot y = b'$, onde b' contém os elementos de b das linhas correspondentes de A'.

- Um **POLITOPO É INTEIRO** se todos os seus vértices contêm apenas componentes inteiras.
- Uma matriz A é chamada de **TOTALMENTE UNIMODULAR** (TU) se o determinante de toda submatriz quadrada A' está em $\{-1, 0, +1\}$.

Politopo inteiro e matriz totalmente unimodular

Uma submatriz de A é uma matriz obtida removendo linhas e colunas de A.

Teorema

Todo vértice y do politopo definido por uma matriz A é determinado por uma submatriz não singular A' de A tal que $A' \cdot y = b'$, onde b' contém os elementos de b das linhas correspondentes de A'.

- Um **POLITOPO É INTEIRO** se todos os seus vértices contêm apenas componentes inteiras.
- Uma matriz A é chamada de **TOTALMENTE UNIMODULAR** (TU) se o determinante de toda submatriz quadrada A' está em $\{-1, 0, +1\}$.

Teorema

Se A é totalmente unimodular, então para todo vetor inteiro b o politopo $P = \{x : \ Ax \leq b\}$ é inteiro.

Propriedades de matrizes TU

Lema

Se A é uma matriz TU, então também são TU as seguintes:

1. *Matriz obtida de A removendo uma linha (coluna)*
2. *Matriz obtida de A duplicando uma linha (coluna)*
3. *Matriz obtida de A trocando duas linhas (colunas)*
4. A^T
5. $-A$
6. $(\, A \,|\, I \,)$
7. $(\, A \,|\, -A \,)$

Propriedades de matrizes TU

Lema

Se A é uma matriz TU, então também são TU as seguintes:

1. *Matriz obtida de A removendo uma linha (coluna)*
2. *Matriz obtida de A duplicando uma linha (coluna)*
3. *Matriz obtida de A trocando duas linhas (colunas)*
4. A^T
5. $-A$
6. $(\,A\,|\,I\,)$
7. $(\,A\,|\,-A\,)$

Explicação:

Propriedades de matrizes TU

Lema

Se A é uma matriz TU, então também são TU as seguintes:

1. *Matriz obtida de A removendo uma linha (coluna)*
2. *Matriz obtida de A duplicando uma linha (coluna)*
3. *Matriz obtida de A trocando duas linhas (colunas)*
4. A^T
5. $-A$
6. $(\, A \,|\, I \,)$
7. $(\, A \,|\, -A \,)$

Explicação:

- **1, 2 e 3.** Seguem da definição matriz TU.

Propriedades de matrizes TU

Lema

Se A é uma matriz TU, então também são TU as seguintes:

1. *Matriz obtida de A removendo uma linha (coluna)*
2. *Matriz obtida de A duplicando uma linha (coluna)*
3. *Matriz obtida de A trocando duas linhas (colunas)*
4. A^T
5. $-A$
6. $(\, A \,|\, I \,)$
7. $(\, A \,|\, -A \,)$

Explicação:

- **1, 2 e 3.** Seguem da definição matriz TU.
- **4.** Determinante da transposta é igual ao da original.

Propriedades de matrizes TU

Lema

Se A é uma matriz TU, então também são TU as seguintes:

1. *Matriz obtida de A removendo uma linha (coluna)*
2. *Matriz obtida de A duplicando uma linha (coluna)*
3. *Matriz obtida de A trocando duas linhas (colunas)*
4. A^T
5. $-A$
6. $(\,A \,|\, I\,)$
7. $(\,A \,|\, -A\,)$

Explicação:

- **1, 2 e 3.** Seguem da definição matriz TU.
- **4.** Determinante da transposta é igual ao da original.
- **5.** Multiplicar linhas por -1 inverte sinal do determinante.

Propriedades de matrizes TU

Lema

Se A é uma matriz TU, então também são TU as seguintes:

1. *Matriz obtida de A removendo uma linha (coluna)*
2. *Matriz obtida de A duplicando uma linha (coluna)*
3. *Matriz obtida de A trocando duas linhas (colunas)*
4. A^T
5. $-A$
6. $(\, A \,|\, I \,)$
7. $(\, A \,|\, -A \,)$

Explicação:

- **1, 2 e 3.** Seguem da definição matriz TU.
- **4.** Determinante da transposta é igual ao da original.
- **5.** Multiplicar linhas por -1 inverte sinal do determinante.
- **6.** Basta aplicar Laplace nos elementos da submatriz de I.

Propriedades de matrizes TU

Lema

Se A é uma matriz TU, então também são TU as seguintes:

1. *Matriz obtida de A removendo uma linha (coluna)*
2. *Matriz obtida de A duplicando uma linha (coluna)*
3. *Matriz obtida de A trocando duas linhas (colunas)*
4. A^T
5. $-A$
6. $(\, A \,|\, I \,)$
7. $(\, A \,| -A \,)$

Explicação:

- **1, 2 e 3.** Seguem da definição matriz TU.
- **4.** Determinante da transposta é igual ao da original.
- **5.** Multiplicar linhas por -1 inverte sinal do determinante.
- **6.** Basta aplicar Laplace nos elementos da submatriz de I.
- **7.** Duplicar colunas e trocar sinal da coluna mantém TU.

Aplicando em politopos

Teorema

Se A é TU e b e u são vetores inteiros, então os seguintes politopos são inteiros:

1. $\{\mathbf{x} : A\mathbf{x} \geq b\}$
2. $\{\mathbf{x} : A\mathbf{x} \leq b, \mathbf{x} \geq 0\}$
3. $\{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = b, \mathbf{x} \geq 0\}$
4. $\{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = b, 0 \leq \mathbf{x} \leq u\}$

Aplicando em politopos

Teorema

Se A é TU e b e u são vetores inteiros, então os seguintes politopos são inteiros:

1. $\{\mathbf{x} : A\mathbf{x} \geq b\}$
2. $\{\mathbf{x} : A\mathbf{x} \leq b,\ \mathbf{x} \geq 0\}$
3. $\{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = b,\ \mathbf{x} \geq 0\}$
4. $\{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = b,\ 0 \leq \mathbf{x} \leq u\}$

Observações:

Aplicando em politopos

Teorema

Se A é TU e b e u são vetores inteiros, então os seguintes politopos são inteiros:

1. $\{\mathbf{x} : A\mathbf{x} \geq b\}$
2. $\{\mathbf{x} : A\mathbf{x} \leq b,\ \mathbf{x} \geq 0\}$
3. $\{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = b,\ \mathbf{x} \geq 0\}$
4. $\{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = b,\ 0 \leq \mathbf{x} \leq u\}$

Observações:

- Note que $\{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = b\}$ e $\{\mathbf{x} : A\mathbf{x} \leq b,\ A\mathbf{x} \geq b\}$ são iguais.

Aplicando em politopos

Teorema

Se A é TU e b e u são vetores inteiros, então os seguintes politopos são inteiros:

1. $\{\mathbf{x} : A\mathbf{x} \geq b\}$
2. $\{\mathbf{x} : A\mathbf{x} \leq b,\ \mathbf{x} \geq 0\}$
3. $\{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = b,\ \mathbf{x} \geq 0\}$
4. $\{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = b,\ 0 \leq \mathbf{x} \leq u\}$

Observações:

- Note que $\{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = b\}$ e $\{\mathbf{x} : A\mathbf{x} \leq b,\ A\mathbf{x} \geq b\}$ são iguais.
- Podemos reescrever o politopo do item 4 usando uma matriz TU da forma:

$$\begin{pmatrix} A \\ -A \\ I \\ -I \end{pmatrix}.$$

Condição para TU

Lema

Se A é uma matriz formada por elementos em $\{-1, 0, 1\}$ e cada coluna tem no máximo uma ocorrência de -1 e no máximo uma ocorrência de 1, então A é TU.

Condição para TU

Lema

Se A é uma matriz formada por elementos em $\{-1, 0, 1\}$ e cada coluna tem no máximo uma ocorrência de -1 e no máximo uma ocorrência de 1, então A é TU.

Demonstração:

Condição para TU

Lema

Se A é uma matriz formada por elementos em $\{-1, 0, 1\}$ e cada coluna tem no máximo uma ocorrência de -1 e no máximo uma ocorrência de 1, então A é TU.

Demonstração: Por indução na ordem da submatriz.

Condição para TU

Lema

Se A é uma matriz formada por elementos em $\{-1, 0, 1\}$ e cada coluna tem no máximo uma ocorrência de -1 e no máximo uma ocorrência de 1, então A é TU.

Demonstração: Por indução na ordem da submatriz.

- Para ordem 1, note que a matriz é um número -1, 0 ou 1.

Condição para TU

Lema

Se A é uma matriz formada por elementos em $\{-1, 0, 1\}$ e cada coluna tem no máximo uma ocorrência de -1 e no máximo uma ocorrência de 1, então A é TU.

Demonstração: Por indução na ordem da submatriz.

- Para ordem 1, note que a matriz é um número -1, 0 ou 1.
- Agora seja B uma submatriz quadrada de A.

Condição para TU

Lema

Se A é uma matriz formada por elementos em $\{-1, 0, 1\}$ e cada coluna tem no máximo uma ocorrência de -1 e no máximo uma ocorrência de 1, então A é TU.

Demonstração: Por indução na ordem da submatriz.

- Para ordem 1, note que a matriz é um número -1, 0 ou 1.
- Agora seja B uma submatriz quadrada de A.
  1. Se há coluna de elementos nulos, o determinante de B é 0.

Condição para TU

Lema

Se A é uma matriz formada por elementos em $\{-1, 0, 1\}$ e cada coluna tem no máximo uma ocorrência de -1 e no máximo uma ocorrência de 1, então A é TU.

Demonstração: Por indução na ordem da submatriz.

- Para ordem 1, note que a matriz é um número -1, 0 ou 1.
- Agora seja B uma submatriz quadrada de A.
  1. Se há coluna de elementos nulos, o determinante de B é 0.
  2. Se toda coluna tem -1 e $+1$, então a soma de todas as linhas é nula e o determinante é nulo.

Condição para TU

Lema

Se A é uma matriz formada por elementos em $\{-1, 0, 1\}$ e cada coluna tem no máximo uma ocorrência de -1 e no máximo uma ocorrência de 1, então A é TU.

Demonstração: Por indução na ordem da submatriz.

- Para ordem 1, note que a matriz é um número -1, 0 ou 1.
- Agora seja B uma submatriz quadrada de A.
  1. Se há coluna de elementos nulos, o determinante de B é 0.
  2. Se toda coluna tem -1 e $+1$, então a soma de todas as linhas é nula e o determinante é nulo.
  3. Caso contrário, há coluna com exatamente um elemento não nulo $t \in \{-1, +1\}$. Logo, o determinante é $+t$ ou $-t$ vezes a submatriz removendo a linha e coluna de t (regra de Laplace).

Matriz de incidência

A **MATRIZ DE INCIDÊNCIA** de um grafo $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ é uma matriz bidimensional com uma linha para cada um dos vértices do grafo e uma coluna para cada aresta. A linha **u** e coluna **e** tem valor **1** se a aresta **e** incide no vértice **u**, em outro caso o valor é **0**.

Matriz de incidência

A **MATRIZ DE INCIDÊNCIA** de um grafo $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ é uma matriz bidimensional com uma linha para cada um dos vértices do grafo e uma coluna para cada aresta. A linha **u** e coluna **e** tem valor $\mathbf{1}$ se a aresta **e** incide no vértice **u**, em outro caso o valor é $\mathbf{0}$.

Em grafos direcionados o valor é $\mathbf{1}$ se **u** for cauda de **e** e $-\mathbf{1}$ se for cabeça.

Matriz de incidência

Lema

Se A é a matriz de incidência de ***GRAFO DIRECIONADO****, então A é TU.*

Matriz de incidência

Lema

Se A é a matriz de incidência de ***GRAFO DIRECIONADO****, então A é TU.*

Demonstração: Segue do lema anterior.

Matriz de incidência

Lema

*Se A é a matriz de incidência de **GRAFO DIRECIONADO**, então A é TU.*

Demonstração: Segue do lema anterior.

Lema

*Se A é a matriz de incidência de um **GRAFO BIPARTIDO** G, com partes **X, Y**, então A é TU.*

Matriz de incidência

Lema

Se A é a matriz de incidência de ***GRAFO DIRECIONADO****, então A é TU.*

Demonstração: Segue do lema anterior.

Lema

Se A é a matriz de incidência de um ***GRAFO BIPARTIDO*** *G, com partes* ***X, Y****, então A é TU.*

Demonstração:

Matriz de incidência

Lema

*Se A é a matriz de incidência de **GRAFO DIRECIONADO**, então A é TU.*

Demonstração: Segue do lema anterior.

Lema

*Se A é a matriz de incidência de um **GRAFO BIPARTIDO** G, com partes **X, Y**, então A é TU.*

Demonstração:

- Multiplique por -1 todas as linhas de A correspondentes aos vértices de **Y**.

Matriz de incidência

Lema

Se A é a matriz de incidência de ***GRAFO DIRECIONADO****, então A é TU.*

Demonstração: Segue do lema anterior.

Lema

Se A é a matriz de incidência de um ***GRAFO BIPARTIDO*** *G, com partes* ***X, Y****, então A é TU.*

Demonstração:

- Multiplique por -1 todas as linhas de A correspondentes aos vértices de **Y**.
- Obtemos a matriz de incidência de um grafo direcionado, que é TU.

Matriz de incidência

Lema

*Se A é a matriz de incidência de **GRAFO DIRECIONADO**, então A é TU.*

Demonstração: Segue do lema anterior.

Lema

*Se A é a matriz de incidência de um **GRAFO BIPARTIDO** G, com partes **X, Y**, então A é TU.*

Demonstração:

- Multiplique por -1 todas as linhas de A correspondentes aos vértices de **Y**.
- Obtemos a matriz de incidência de um grafo direcionado, que é TU.
- Com só multiplicamos por -1 algumas linhas de A, o determinando de cada submatriz só pode mudar de sinal.

Refletindo sobre integralidade

Vamos fazer alguns exercícios?

Exercício 4. Comunicação entre servidores

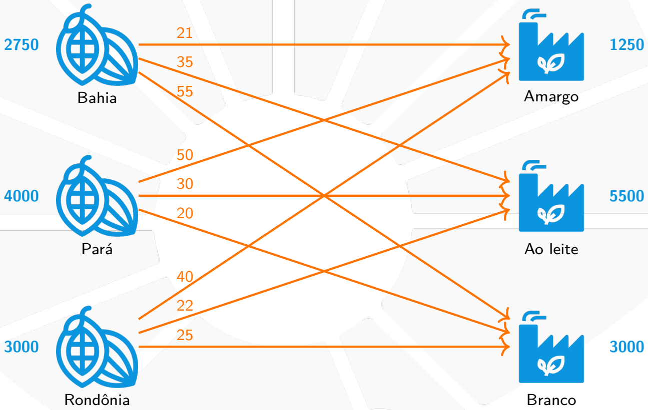
Se no problema da empresa **Melancia** (exercício 3 da aula) as capacidades das conexões são todas inteiras, então há garantias de uma solução ótima inteira?

Exercício 5. Espetacular empresa de chocolate

Lliwy Konwa é dono da **Espetacular Empresa de Chocolate**, que possui três fazendas de cacau: uma em Bahia, outra em Pará e outra em Rondônia, além de três fábricas de produção de chocolate: amargo, ao leite e branco. O Lliwy está organizando a logística da colheita da cacau para esse ano.

O transporte do cacau das fazendas para as fábricas é terceirizado. O custo do quilômetro rodado por tonelada transportada que é fixo pela transportadora independente do trajeto realizado. A produção das fazendas e a capacidade de processamento das fábricas, são dadas em toneladas, assim como as distâncias em quilômetros entre as fazendas e as fábricas.

Exercício 5. Espetacular empresa de chocolate



Exercício 5. Espetacular empresa de chocolate

a) Proponha um programa linear para o problema, explique o significado das variáveis e das restrições.

b) Generalize a sua formulação considerando m fazendas e n fábricas.

c) Reformule o item anterior considerando que além dos custos pela distância, os arcos tem capacidade e pode haver paradas intermediárias (vértices) onde as cargas de cacau podem ser redistribuídas (sem perda de cacau).

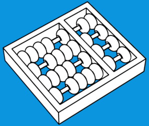
d) Se a produção das fazendas e as capacidades das fábricas são inteiros, então há solução ótima inteira?

Programação linear

MC558 - Projeto e Análise de Algoritmos II

8

01/24



Santiago Valdés Ravelo
https://ic.unicamp.br/~santiago/
ravelo@unicamp.br