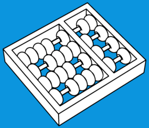
Fluxo em redes

MC558 - Projeto e Análise de Algoritmos II

8

01/24

Santiago Valdés Ravelo
https://ic.unicamp.br/~santiago/
ravelo@unicamp.br

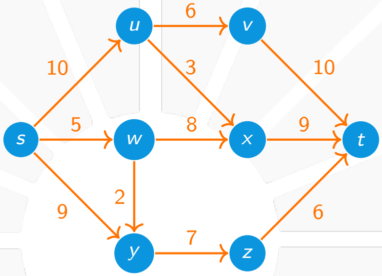


"Surrender to the flow."

Mike Gordon

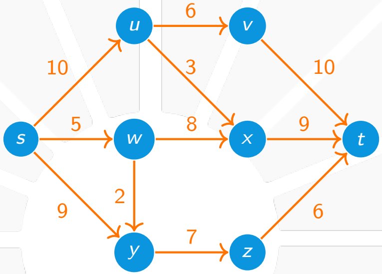
Problemas de fluxo

Rede de fluxo



Considere um grafo direcionado:

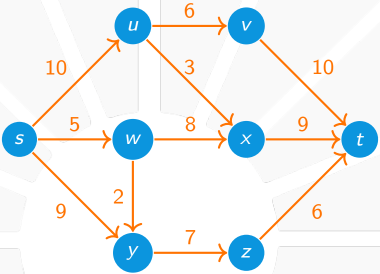
Rede de fluxo



Considere um grafo direcionado:

- Um vértice **FONTE** s produz certo material.

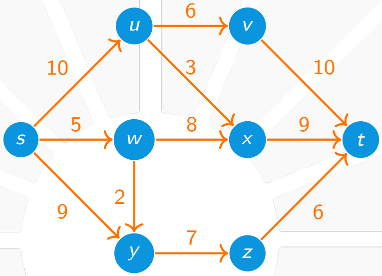
Rede de fluxo



Considere um grafo direcionado:

- Um vértice **FONTE** **s** produz certo material.
- Um vértice **TERMINAL** **t** consome esse material.

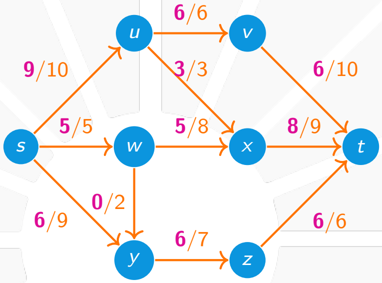
Rede de fluxo



Considere um grafo direcionado:

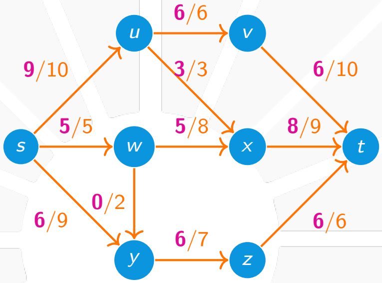
- Um vértice **FONTE** **s** produz certo material.
- Um vértice **TERMINAL** **t** consome esse material.
- Queremos transportar o material de **s** até **t**.

Rede de fluxo



O material escoa através das arestas:

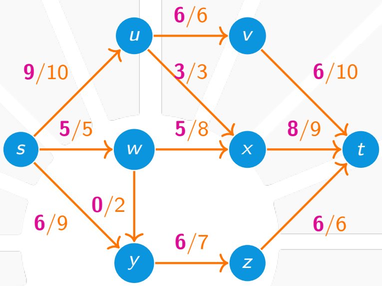
Rede de fluxo



O material escoa através das arestas:

- Cada aresta representa um conduto.

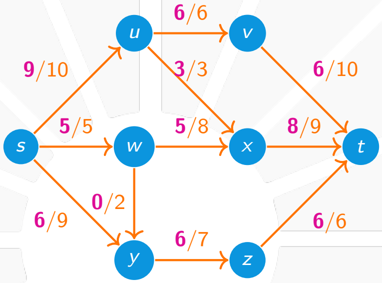
Rede de fluxo



O material escoa através das arestas:

- Cada aresta representa um conduto.
- A taxa com que o material escoa é o **FLUXO** em uma aresta.

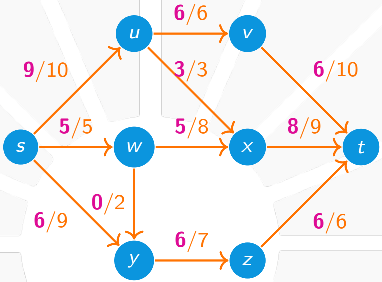
Rede de fluxo



O material escoa através das arestas:

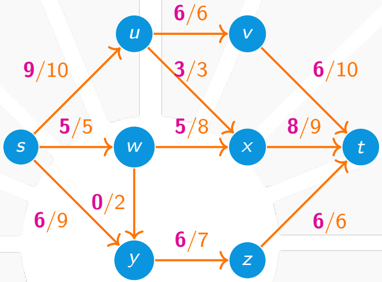
- Cada aresta representa um conduto.
- A taxa com que o material escoa é o **FLUXO** em uma aresta.
- A maior taxa permitida é a **CAPACIDADE** da aresta.

Rede de fluxo



Nenhum material é perdido no caminho de **s** a **t**:

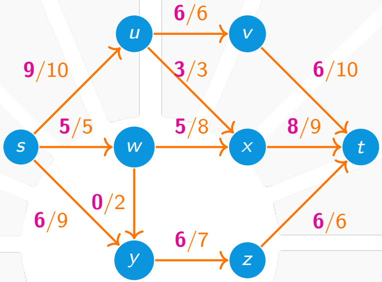
Rede de fluxo



Nenhum material é perdido no caminho de **s** a **t**:

- Os demais vértices são pontos de junção desses condutos.

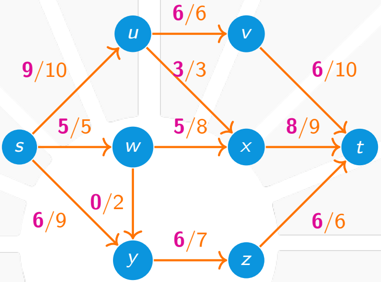
Rede de fluxo



Nenhum material é perdido no caminho de **s** a **t**:

- Os demais vértices são pontos de junção desses condutos.
- A quantidade de material que chega em um vértice é igual à quantidade de material que sai desse vértice.

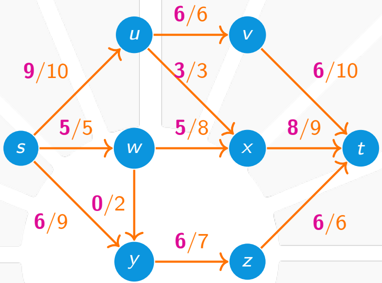
Rede de fluxo



Nenhum material é perdido no caminho de **s** a **t**:

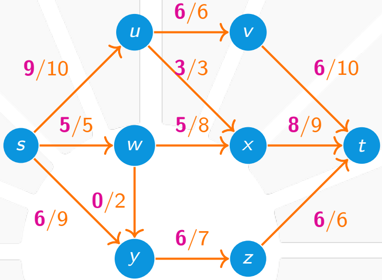
- Os demais vértices são pontos de junção desses condutos.
- A quantidade de material que chega em um vértice é igual à quantidade de material que sai desse vértice.
- Dizemos que há **CONSERVAÇÃO DE FLUXO**.

Problema do fluxo máximo



Redes de fluxos modelam várias situações:

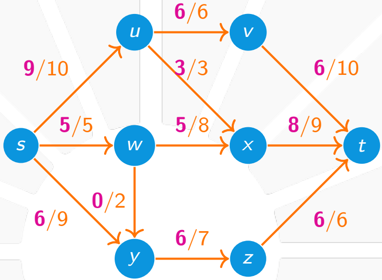
Problema do fluxo máximo



Redes de fluxos modelam várias situações:

- **VAZÃO DE LÍQUIDO** (água, petróleo) através de canos.

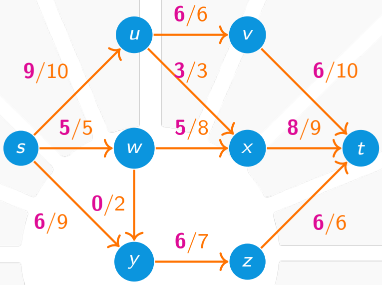
Problema do fluxo máximo



Redes de fluxos modelam várias situações:

- **VAZÃO DE LÍQUIDO** (água, petróleo) através de canos.
- **DISTRIBUIÇÃO DE PRODUTOS** através de redes de fornecimento.

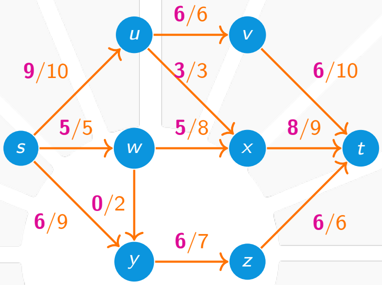
Problema do fluxo máximo



Redes de fluxos modelam várias situações:

- **VAZÃO DE LÍQUIDO** (água, petróleo) através de canos.
- **DISTRIBUIÇÃO DE PRODUTOS** através de redes de fornecimento.
- **CORRENTE ELÉTRICA** através de fios condutores.

Problema do fluxo máximo



Redes de fluxos modelam várias situações:

- **VAZÃO DE LÍQUIDO** (água, petróleo) através de canos.
- **DISTRIBUIÇÃO DE PRODUTOS** através de redes de fornecimento.
- **CORRENTE ELÉTRICA** através de fios condutores.
- **INFORMAÇÃO** (bits) através de redes de comunicação.

Formalizando

Uma **REDE DE FLUXO** é uma quádrupla $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$ onde:

Formalizando

Uma **REDE DE FLUXO** é uma quádrupla $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$ onde:

- $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ é um grafo direcionado,

Formalizando

Uma **REDE DE FLUXO** é uma quádrupla $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$ onde:

- $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ é um grafo direcionado,
- $c : \mathbf{E} \to \mathbb{R}_+$ representa as capacidade das arestas,

Formalizando

Uma **REDE DE FLUXO** é uma quádrupla $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$ onde:

- $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ é um grafo direcionado,
- $c : \mathbf{E} \to \mathbb{R}_+$ representa as capacidade das arestas,
- $\mathbf{s}$ e $\mathbf{t}$ são vértices de G chamados de **FONTE** e **TERMINAL**.

Simplificações

Fazemos as seguintes hipóteses para uma rede $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$:

Simplificações

Fazemos as seguintes hipóteses para uma rede $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$:

- G não contém laços.

Simplificações

Fazemos as seguintes hipóteses para uma rede $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$:

- G não contém laços.
- Se **(u,v)** $\notin$ **E** então denotamos $c(\mathbf{u,v}) = 0$.

Simplificações

Fazemos as seguintes hipóteses para uma rede $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$:

- G não contém laços.
- Se **(u,v)** $\notin$ **E** então denotamos $c(\mathbf{u,v}) = 0$.
- Todo vértice pertence a algum caminho de **s** a **t**.

Simplificações

Fazemos as seguintes hipóteses para uma rede $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$:

- G não contém laços.
- Se **(u,v)** $\notin$ **E** então denotamos $c(\mathbf{u,v}) = 0$.
- Todo vértice pertence a algum caminho de **s** a **t**.
- Se a aresta **(u,v)** $\in$ **E**, então a **ARESTA REVERSA** **(v,u)** $\notin$ **E**.

Simplificações

Fazemos as seguintes hipóteses para uma rede $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$:

- G não contém laços.
- Se **(u,v)** $\notin$ **E** então denotamos $c(\mathbf{u,v}) = 0$.
- Todo vértice pertence a algum caminho de **s** a **t**.
- Se a aresta **(u,v)** $\in$ **E**, então a **ARESTA REVERSA** **(v,u)** $\notin$ **E**.

Isso simplifica nosso estudo:

Simplificações

Fazemos as seguintes hipóteses para uma rede $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$:

- G não contém laços.
- Se **(u,v)** $\notin$ **E** então denotamos $c(\mathbf{u,v}) = 0$.
- Todo vértice pertence a algum caminho de **s** a **t**.
- Se a aresta **(u,v)** $\in$ **E**, então a **ARESTA REVERSA** **(v,u)** $\notin$ **E**.

Isso simplifica nosso estudo:

- Veremos depois o que fazer se as hipóteses não valerem.

Simplificações

Fazemos as seguintes hipóteses para uma rede $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$:

- G não contém laços.
- Se **(u,v)** $\notin$ **E** então denotamos $c(\mathbf{u,v}) = 0$.
- Todo vértice pertence a algum caminho de **s** a **t**.
- Se a aresta **(u,v)** $\in$ **E**, então a **ARESTA REVERSA** **(v,u)** $\notin$ **E**.

Isso simplifica nosso estudo:

- Veremos depois o que fazer se as hipóteses não valerem.
- O custo será aumentar o tamanho do grafo.

Fluxo

Um **FLUXO** em uma rede $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$ é uma função $f : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

Fluxo

Um **FLUXO** em uma rede $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$ é uma função $f : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. **Restrição de capacidade:** para todo $\mathbf{u,v} \in \mathbf{V}$ temos que:

$$0 \leq f(\mathbf{u,v}) \leq c(\mathbf{u,v}).$$

Fluxo

Um **FLUXO** em uma rede $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$ é uma função $f : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. **Restrição de capacidade:** para todo $\mathbf{u,v} \in \mathbf{V}$ temos que:

$$0 \leq f(\mathbf{u,v}) \leq c(\mathbf{u,v}).$$

2. **Conservação de fluxo:** para todo $\mathbf{u} \in \mathbf{V} \setminus \{\mathbf{s,t}\}$ temos que

$$\sum_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} f(\mathbf{v,u}) = \sum_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} f(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Fluxo

Um **FLUXO** em uma rede $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$ é uma função $f : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. **Restrição de capacidade:** para todo $\mathbf{u,v} \in \mathbf{V}$ temos que:

$$0 \leq f(\mathbf{u,v}) \leq c(\mathbf{u,v}).$$

2. **Conservação de fluxo:** para todo $\mathbf{u} \in \mathbf{V} \setminus \{\mathbf{s,t}\}$ temos que

$$\sum_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} f(\mathbf{v,u}) = \sum_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} f(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Observações:

Fluxo

Um **FLUXO** em uma rede $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$ é uma função $f : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. **Restrição de capacidade:** para todo $\mathbf{u,v} \in \mathbf{V}$ temos que:

$$0 \leq f(\mathbf{u,v}) \leq c(\mathbf{u,v}).$$

2. **Conservação de fluxo:** para todo $\mathbf{u} \in \mathbf{V} \setminus \{\mathbf{s,t}\}$ temos que

$$\sum_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} f(\mathbf{v,u}) = \sum_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} f(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Observações:

- A segunda condição é conhecida como lei de Kirchhoff.

Fluxo

Um **FLUXO** em uma rede $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$ é uma função $f : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. **Restrição de capacidade:** para todo $\mathbf{u,v} \in \mathbf{V}$ temos que:

$$0 \leq f(\mathbf{u,v}) \leq c(\mathbf{u,v}).$$

2. **Conservação de fluxo:** para todo $\mathbf{u} \in \mathbf{V} \setminus \{\mathbf{s,t}\}$ temos que

$$\sum_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} f(\mathbf{v,u}) = \sum_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} f(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Observações:

- A segunda condição é conhecida como lei de Kirchhoff.
- Se $(\mathbf{u,v}) \notin \mathbf{E}$ então $f(\mathbf{u,v}) = 0 = c(\mathbf{u,v})$.

Fluxo

Um **FLUXO** em uma rede $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$ é uma função $f : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. **Restrição de capacidade:** para todo $\mathbf{u,v} \in \mathbf{V}$ temos que:

$$0 \leq f(\mathbf{u,v}) \leq c(\mathbf{u,v}).$$

2. **Conservação de fluxo:** para todo $\mathbf{u} \in \mathbf{V} \setminus \{\mathbf{s,t}\}$ temos que

$$\sum_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} f(\mathbf{v,u}) = \sum_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} f(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Observações:

- A segunda condição é conhecida como lei de Kirchhoff.
- Se $(\mathbf{u,v}) \notin \mathbf{E}$ então $f(\mathbf{u,v}) = 0 = c(\mathbf{u,v})$.
- Dizemos que $f(\mathbf{u,v})$ é o **FLUXO QUE PASSA POR** $(\mathbf{u,v})$.

Valor de fluxo

O **VALOR** de um fluxo f é definido como:

$$|f| = \sum_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} f(\mathbf{s},\mathbf{v}) - \sum_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} f(\mathbf{v},\mathbf{s}).$$

Valor de fluxo

O **VALOR** de um fluxo f é definido como:

$$|f| = \sum_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} f(\mathbf{s},\mathbf{v}) - \sum_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} f(\mathbf{v},\mathbf{s}).$$

- Ou seja, $|f|$ é o fluxo que sai da fonte menos o fluxo que entra.

Valor de fluxo

O **VALOR** de um fluxo f é definido como:

$$|f| = \sum_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} f(\mathbf{s},\mathbf{v}) - \sum_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} f(\mathbf{v},\mathbf{s}).$$

- Ou seja, $|f|$ é o fluxo que sai da fonte menos o fluxo que entra.
- Não confundir $|f|$ com o valor absoluto ou cardinalidade.

Problema do fluxo máximo

Problema

Entrada: *Uma rede de fluxo* $(G, c, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t})$.

Solução: *Um fluxo* f *dessa rede.*

Objetivo: ***MAXIMIZAR*** $|f|$.

Um exemplo

Considere a companhia **Bola Feliz**, que:

Um exemplo

Considere a companhia **Bola Feliz**, que:

- Produz bolas de futebol em um uma **fábrica** em Guarulhos.

Um exemplo

Considere a companhia **Bola Feliz**, que:

- Produz bolas de futebol em um uma **fábrica** em Guarulhos.
- Deseja armazená-las em um **depósito** em Rio Claro.

Um exemplo

Considere a companhia **Bola Feliz**, que:

- Produz bolas de futebol em um uma **fábrica** em Guarulhos.
- Deseja armazená-las em um **depósito** em Rio Claro.
- Para transportá-las, ela aluga espaço em caminhões, que transitam pelas cidades:

Um exemplo

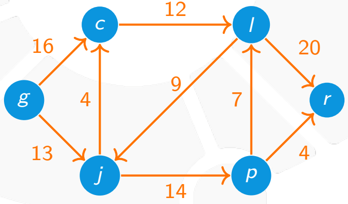
Considere a companhia **Bola Feliz**, que:

- Produz bolas de futebol em um uma **fábrica** em Guarulhos.
- Deseja armazená-las em um **depósito** em Rio Claro.
- Para transportá-las, ela aluga espaço em caminhões, que transitam pelas cidades:
  Guarulhos (**g**), Campinas (**c**), Jundiaí (**j**), Limeira (**l**), Piracicaba (**p**), Rio Claro (**r**).

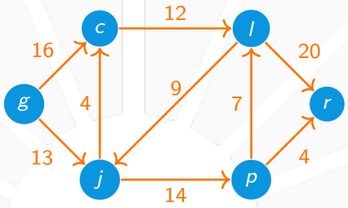
Um exemplo

Considere a companhia **Bola Feliz**, que:

- Produz bolas de futebol em um uma **fábrica** em Guarulhos.
- Deseja armazená-las em um **depósito** em Rio Claro.
- Para transportá-las, ela aluga espaço em caminhões, que transitam pelas cidades:
  Guarulhos (**g**), Campinas (**c**), Jundiaí (**j**), Limeira (**l**), Piracicaba (**p**), Rio Claro (**r**).

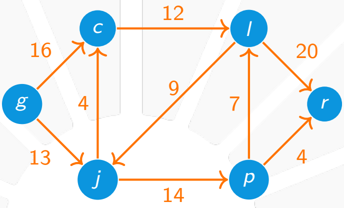


Um exemplo



Os caminhões viajam entre as cidades definidas:

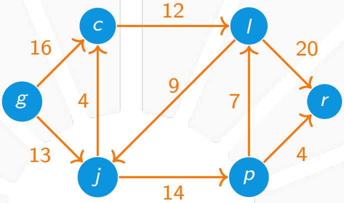
Um exemplo



Os caminhões viajam entre as cidades definidas:

- Cada rota de caminhão corresponde a uma aresta **(u,v)**.

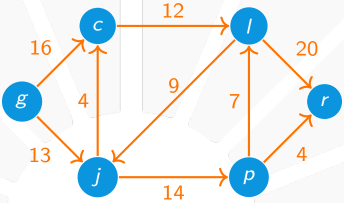
Um exemplo



Os caminhões viajam entre as cidades definidas:

- Cada rota de caminhão corresponde a uma aresta **(u,v)**.
- Cada caminhão pode transportar até c(**u,v**) caixas.

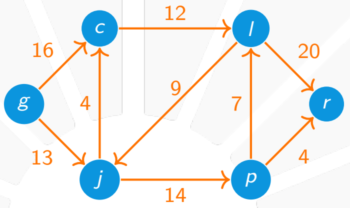
Um exemplo



Os caminhões viajam entre as cidades definidas:

- Cada rota de caminhão corresponde a uma aresta **(u,v)**.
- Cada caminhão pode transportar até c(**u,v**) caixas.
- A empresa Bola Feliz não pode alterar os trajetos.

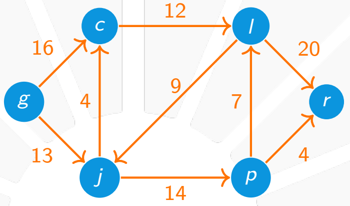
Um exemplo



Os caminhões viajam entre as cidades definidas:

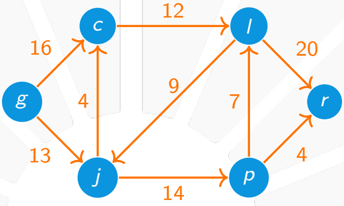
- Cada rota de caminhão corresponde a uma aresta **(u,v)**.
- Cada caminhão pode transportar até c(**u,v**) caixas.
- A empresa Bola Feliz não pode alterar os trajetos.
- Tampouco pode ultrapassar as capacidades desses caminhões.

Um exemplo



Quantas caixas a empresa Bola Feliz pode produzir por dia?

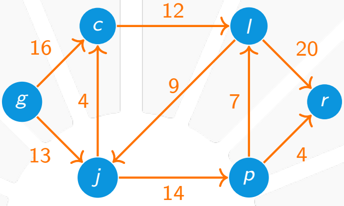
Um exemplo



Quantas caixas a empresa Bola Feliz pode produzir por dia?

- Ela deve produzir p caixas em cada dia.

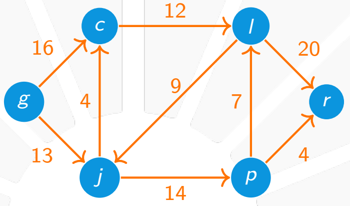
Um exemplo



Quantas caixas a empresa Bola Feliz pode produzir por dia?

- Ela deve produzir p caixas em cada dia.
- Não se importa com o tempo de viagem.

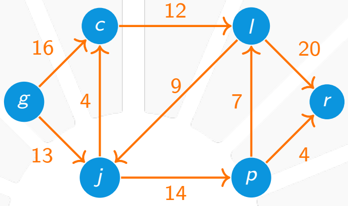
Um exemplo



Quantas caixas a empresa Bola Feliz pode produzir por dia?

- Ela deve produzir p caixas em cada dia.
- Não se importa com o tempo de viagem.
- Contudo, deve mandar todas as p caixas ao fim do dia.

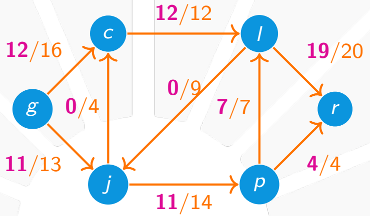
Um exemplo



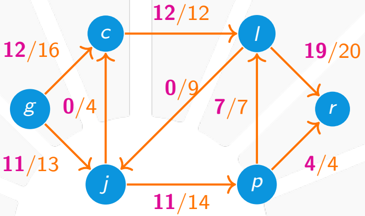
Quantas caixas a empresa Bola Feliz pode produzir por dia?

- Ela deve produzir p caixas em cada dia.
- Não se importa com o tempo de viagem.
- Contudo, deve mandar todas as p caixas ao fim do dia.
- Qual o **MAIOR** valor de p possível?

Um exemplo

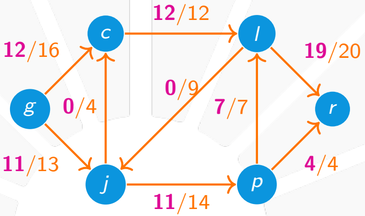


Um exemplo



Uma **SOLUÇÃO ÓTIMA** com valor $p = 23$ está indicada.

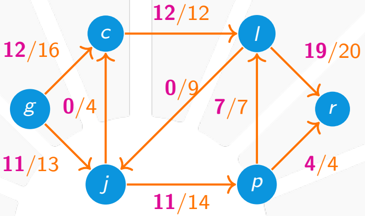
Um exemplo



Uma **SOLUÇÃO ÓTIMA** com valor $p = 23$ está indicada.

O problema da empresa Bola Feliz corresponde ao fluxo máximo:

Um exemplo

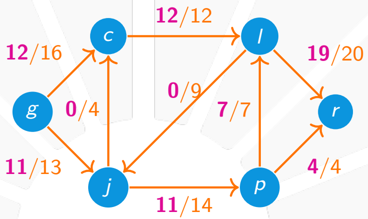


Uma **SOLUÇÃO ÓTIMA** com valor $p = 23$ está indicada.

O problema da empresa Bola Feliz corresponde ao fluxo máximo:

- Ela deseja um fluxo f (estritamente) inteiro.

Um exemplo

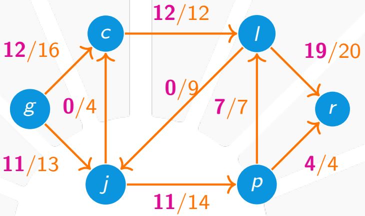


Uma **SOLUÇÃO ÓTIMA** com valor $p = 23$ está indicada.

O problema da empresa Bola Feliz corresponde ao fluxo máximo:

- Ela deseja um fluxo f (estritamente) inteiro.
- Ou seja, que f(**u,v**) seja inteiro para cada **(u,v)**.

Um exemplo

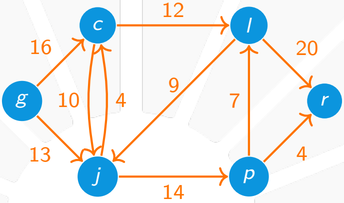


Uma **SOLUÇÃO ÓTIMA** com valor $p = 23$ está indicada.

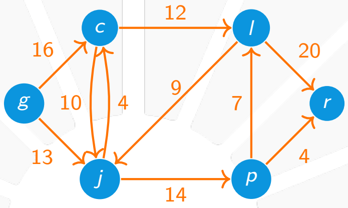
O problema da empresa Bola Feliz corresponde ao fluxo máximo:

- Ela deseja um fluxo f (estritamente) inteiro.
- Ou seja, que $f(\mathbf{u,v})$ seja inteiro para cada **(u,v)**.
- Veremos que se as capacidades são números inteiros, então existe um **FLUXO MÁXIMO** que é inteiro.

Modelando problemas com arcos antiparalelos

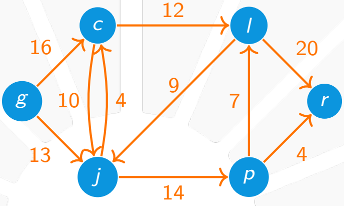


Modelando problemas com arcos antiparalelos



Suponha que a rede de rotas mudou:

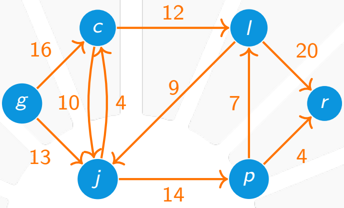
Modelando problemas com arcos antiparalelos



Suponha que a rede de rotas mudou:

- A companhia de caminhões ofereceu espaço para transportar até 10 caixas de Campinas a Jundiaí.

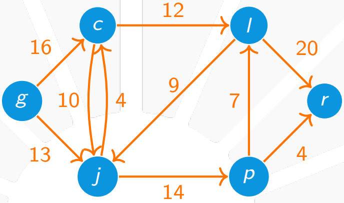
Modelando problemas com arcos antiparalelos



Suponha que a rede de rotas mudou:

- A companhia de caminhões ofereceu espaço para transportar até 10 caixas de Campinas a Jundiaí.
- A nova rede possui **ARESTAS ANTIPARALELAS** **(c,j)** e **(j,c)**.

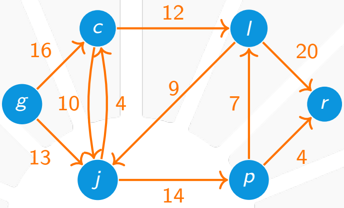
Modelando problemas com arcos antiparalelos



Suponha que a rede de rotas mudou:

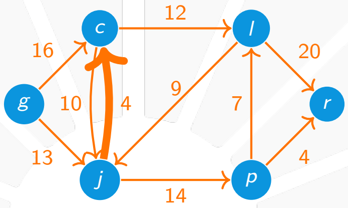
- A companhia de caminhões ofereceu espaço para transportar até 10 caixas de Campinas a Jundiaí.
- A nova rede possui **ARESTAS ANTIPARALELAS (c,j)** e **(j,c)**.
- Mas presumimos que não existam arestas desse tipo.

Modelando problemas com arcos antiparalelos



Podemos transformar em uma rede **SEM ARESTAS ANTIPARALELAS**:

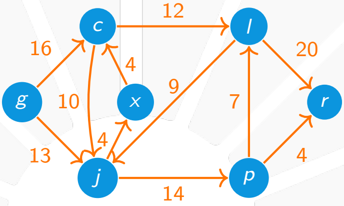
Modelando problemas com arcos antiparalelos



Podemos transformar em uma rede **SEM ARESTAS ANTIPARALELAS**:

- Escolha uma das arestas antiparalelas, no caso, **(j,c)**.

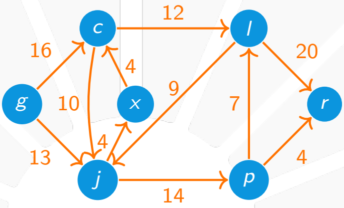
Modelando problemas com arcos antiparalelos



Podemos transformar em uma rede **SEM ARESTAS ANTIPARALELAS**:

- Escolha uma das arestas antiparalelas, no caso, **(j,c)**.
- Substitua-a por duas novas arestas **(j,x)** e **(x,c)**.

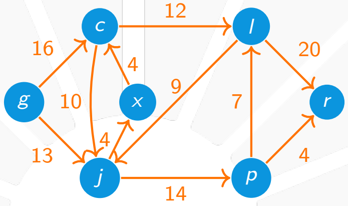
Modelando problemas com arcos antiparalelos



Podemos transformar em uma rede **SEM ARESTAS ANTIPARALELAS**:

- Escolha uma das arestas antiparalelas, no caso, **(j,c)**.
- Substitua-a por duas novas arestas **(j,x)** e **(x,c)**.
- Cada um tem a mesma capacidade da aresta original.

Modelando problemas com arcos antiparalelos



Podemos transformar em uma rede **SEM ARESTAS ANTIPARALELAS**:

- Escolha uma das arestas antiparalelas, no caso, **(j,c)**.
- Substitua-a por duas novas arestas **(j,x)** e **(x,c)**.
- Cada um tem a mesma capacidade da aresta original.
- A nova rede tem um fluxo máximo equivalente.

Redes com múltiplas fontes e terminais

Podemos considerar redes com **MÚLTIPLAS** fontes e terminais:

Redes com múltiplas fontes e terminais

Podemos considerar redes com **MÚLTIPLAS** fontes e terminais:

- A empresa Bola Feliz poderia ter *m* fábricas $\mathbf{s_1, \ldots, s_m}$.

Redes com múltiplas fontes e terminais

Podemos considerar redes com **MÚLTIPLAS** fontes e terminais:

- A empresa Bola Feliz poderia ter *m* fábricas $\mathbf{s_1, \dots, s_m}$.
- Também, poderia ter *n* depósitos $\mathbf{t_1, \dots, t_n}$.

Redes com múltiplas fontes e terminais

Podemos considerar redes com **MÚLTIPLAS** fontes e terminais:

- A empresa Bola Feliz poderia ter *m* fábricas $\mathbf{s_1, \ldots, s_m}$.
- Também, poderia ter *n* depósitos $\mathbf{t_1, \ldots, t_n}$.
- Isso define uma **VARIANTE** do problema do fluxo máximo.

Redes com múltiplas fontes e terminais

Podemos considerar redes com **MÚLTIPLAS** fontes e terminais:

- A empresa Bola Feliz poderia ter *m* fábricas $\mathbf{s_1, \ldots, s_m}$.
- Também, poderia ter *n* depósitos $\mathbf{t_1, \ldots, t_n}$.
- Isso define uma **VARIANTE** do problema do fluxo máximo.

Podemos **REDUZIR** para a versão com fonte e terminal únicos:

Redes com múltiplas fontes e terminais

Podemos considerar redes com **MÚLTIPLAS** fontes e terminais:

- A empresa Bola Feliz poderia ter m fábricas $\mathbf{s_1}, \ldots, \mathbf{s_m}$.
- Também, poderia ter n depósitos $\mathbf{t_1}, \ldots, \mathbf{t_n}$.
- Isso define uma **VARIANTE** do problema do fluxo máximo.

Podemos **REDUZIR** para a versão com fonte e terminal únicos:

1. Acrescente uma fonte $\mathbf{s}$ e, para cada $i = 1, \ldots, m$, adicione uma nova aresta $(\mathbf{s}, \mathbf{s_i})$ com capacidade ∞.

Redes com múltiplas fontes e terminais

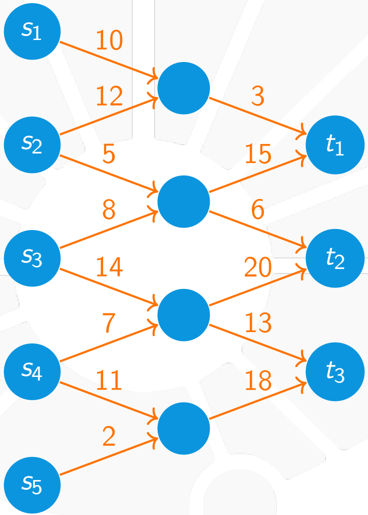
Podemos considerar redes com **MÚLTIPLAS** fontes e terminais:

- A empresa Bola Feliz poderia ter m fábricas $\mathbf{s_1}, \ldots, \mathbf{s_m}$.
- Também, poderia ter n depósitos $\mathbf{t_1}, \ldots, \mathbf{t_n}$.
- Isso define uma **VARIANTE** do problema do fluxo máximo.

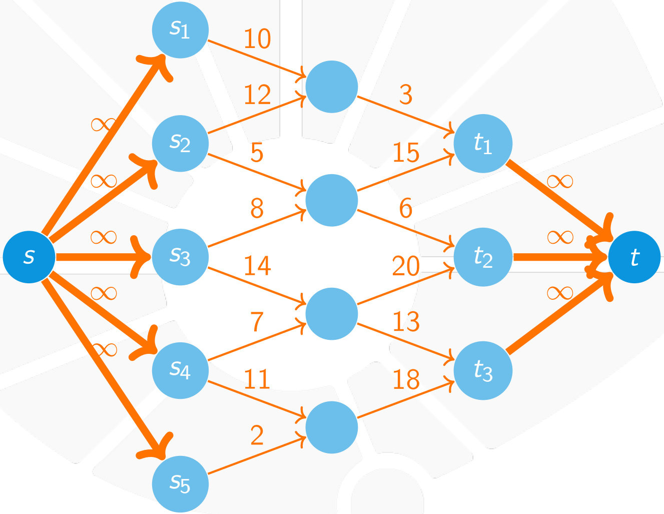
Podemos **REDUZIR** para a versão com fonte e terminal únicos:

1. Acrescente uma fonte $\mathbf{s}$ e, para cada $i = 1, \ldots, m$, adicione uma nova aresta $(\mathbf{s}, \mathbf{s_i})$ com capacidade ∞.
2. Acrescente um terminal $\mathbf{t}$ e, para cada $i = 1, \ldots, n$, adicione uma nova aresta $(\mathbf{t_i}, \mathbf{t})$ com capacidade ∞.

Redes com múltiplas fontes e terminais



Redes com múltiplas fontes e terminais



Método de Ford-Fulkerson

Solucionando fluxo máximo

Veremos um **MÉTODO** para resolver o problema do fluxo máximo:

Solucionando fluxo máximo

Veremos um **MÉTODO** para resolver o problema do fluxo máximo:

- Projetado por Ford e Fulkerson independentemente.

Solucionando fluxo máximo

Veremos um **MÉTODO** para resolver o problema do fluxo máximo:

- Projetado por Ford e Fulkerson independentemente.
- Não é um **ALGORITMO** completamente especificado.

Solucionando fluxo máximo

Veremos um **MÉTODO** para resolver o problema do fluxo máximo:

- Projetado por Ford e Fulkerson independentemente.
- Não é um **ALGORITMO** completamente especificado.
- Há várias implementações desse método.

Solucionando fluxo máximo

Veremos um **MÉTODO** para resolver o problema do fluxo máximo:

- Projetado por Ford e Fulkerson independentemente.
- Não é um **ALGORITMO** completamente especificado.
- Há várias implementações desse método.

Baseado em três conceitos fundamentais:

Solucionando fluxo máximo

Veremos um **MÉTODO** para resolver o problema do fluxo máximo:

- Projetado por Ford e Fulkerson independentemente.
- Não é um **ALGORITMO** completamente especificado.
- Há várias implementações desse método.

Baseado em três conceitos fundamentais:

1. Redes residuais.

Solucionando fluxo máximo

Veremos um **MÉTODO** para resolver o problema do fluxo máximo:

- Projetado por Ford e Fulkerson independentemente.
- Não é um **ALGORITMO** completamente especificado.
- Há várias implementações desse método.

Baseado em três conceitos fundamentais:

1. Redes residuais.
2. Caminhos aumentadores.

Solucionando fluxo máximo

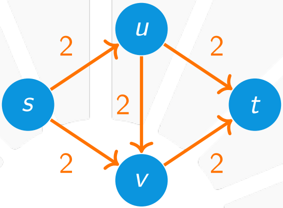
Veremos um **MÉTODO** para resolver o problema do fluxo máximo:

- Projetado por Ford e Fulkerson independentemente.
- Não é um **ALGORITMO** completamente especificado.
- Há várias implementações desse método.

Baseado em três conceitos fundamentais:

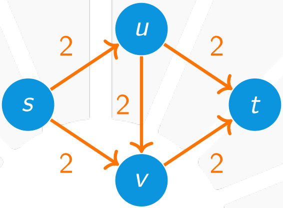
1. Redes residuais.
2. Caminhos aumentadores.
3. Dualidade e cortes.

Intuição do método de Ford-Fulkerson



Vamos ilustrar com um exemplo simples:

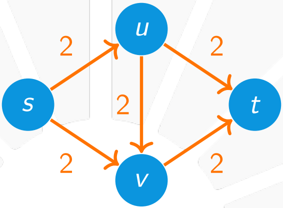
Intuição do método de Ford-Fulkerson



Vamos ilustrar com um exemplo simples:

- É claro que o valor do fluxo máximo é 4.

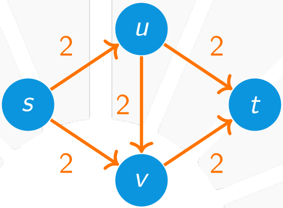
Intuição do método de Ford-Fulkerson



Vamos ilustrar com um exemplo simples:

- É claro que o valor do fluxo máximo é 4.
- Para entender o método, vamos esquecer disso.

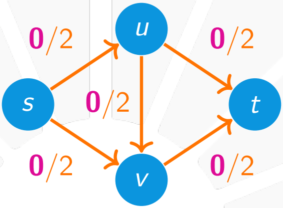
Intuição do método de Ford-Fulkerson



Vamos ilustrar com um exemplo simples:

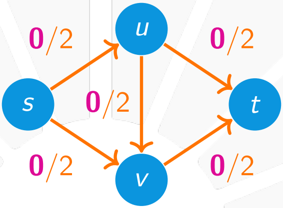
- É claro que o valor do fluxo máximo é 4.
- Para entender o método, vamos esquecer disso.
- Iremos definir um fluxo sistematicamente.

Intuição do método de Ford-Fulkerson



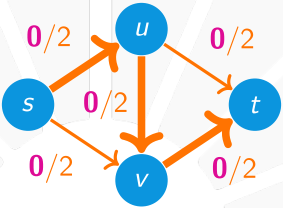
- Começamos com fluxo nulo em todas as arestas.

Intuição do método de Ford-Fulkerson



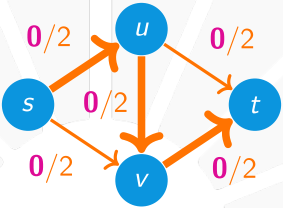
- Começamos com fluxo nulo em todas as arestas.
- O valor deste fluxo é zero.

Intuição do método de Ford-Fulkerson



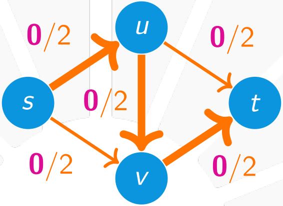
- Encontramos um **CAMINHO** de **s** a **t**.

Intuição do método de Ford-Fulkerson



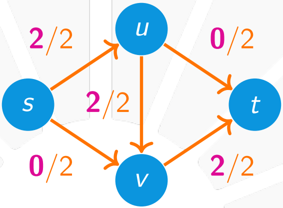
- Encontramos um **CAMINHO** de **s** a **t**.
- Podemos aumentar o fluxo nas arestas do caminho.

Intuição do método de Ford-Fulkerson



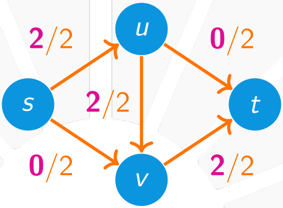
- Encontramos um **CAMINHO** de **s** a **t**.
- Podemos aumentar o fluxo nas arestas do caminho.
- Nesse exemplo, podemos aumentar de **2** em cada aresta.

Intuição do método de Ford-Fulkerson



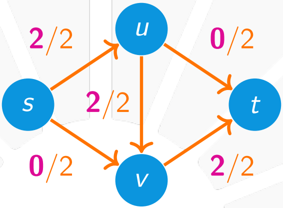
- Com isso, obtemos um fluxo de valor 2.

Intuição do método de Ford-Fulkerson



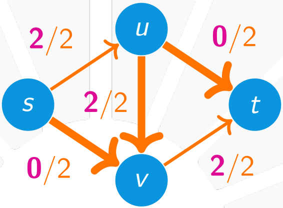
- Com isso, obtemos um fluxo de valor 2.
- Mas várias arestas ficaram saturadas.

Intuição do método de Ford-Fulkerson



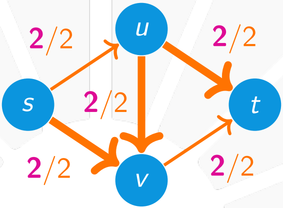
- Com isso, obtemos um fluxo de valor 2.
- Mas várias arestas ficaram saturadas.
- Não há caminho para aumentar o fluxo como antes.

Intuição do método de Ford-Fulkerson



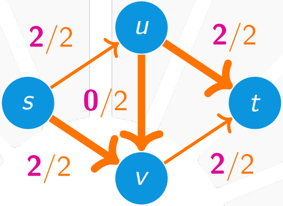
- Podemos considerar um pseudocaminho.

Intuição do método de Ford-Fulkerson



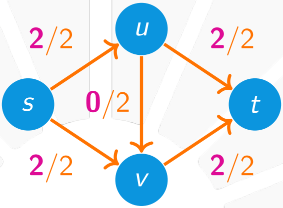
- Podemos considerar um pseudocaminho.
- Aumentamos o fluxo nas arestas que **AVANÇAM**.

Intuição do método de Ford-Fulkerson



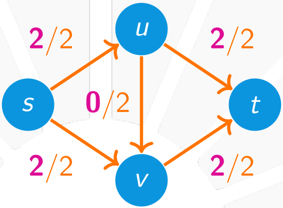
- Podemos considerar um pseudocaminho.
- Aumentamos o fluxo nas arestas que **AVANÇAM**.
- Diminuímos o fluxo nas arestas que **RECUAM**.

Intuição do método de Ford-Fulkerson



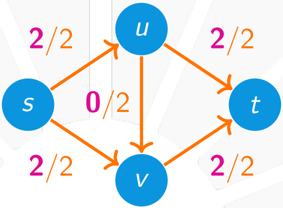
- Obtemos um fluxo com valor 4.

Intuição do método de Ford-Fulkerson



- Obtemos um fluxo com valor 4.
- Neste exemplo é fácil ver que ele é máximo.

Intuição do método de Ford-Fulkerson



- Obtemos um fluxo com valor 4.
- Neste exemplo é fácil ver que ele é máximo.
- O motivo é que toda aresta que sai de **s** está saturada.

Aumentar fluxo ao longo de um pseudocaminho

$$v_1 \rightarrow v_2 \leftarrow v_3 \leftarrow v_4 \rightarrow v_5 \leftarrow v_6 \rightarrow v_7 \rightarrow v_8$$

Como obter um novo fluxo válido e maior?

Aumentar fluxo ao longo de um pseudocaminho

$$v_1 \xrightarrow{+\alpha} v_2 \xleftarrow{-\alpha} v_3 \xleftarrow{-\alpha} v_4 \xrightarrow{+\alpha} v_5 \xleftarrow{-\alpha} v_6 \xrightarrow{+\alpha} v_7 \xrightarrow{+\alpha} v_8$$

Como obter um novo fluxo válido e maior?

- Aumentamos ou diminuímos o fluxo das arestas por $\alpha > 0$.

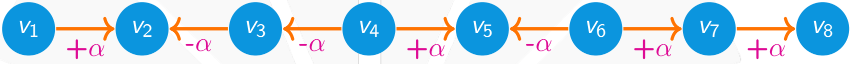
Aumentar fluxo ao longo de um pseudocaminho

$$v_1 \xrightarrow{+\alpha} v_2 \xleftarrow{-\alpha} v_3 \xleftarrow{-\alpha} v_4 \xrightarrow{+\alpha} v_5 \xleftarrow{-\alpha} v_6 \xrightarrow{+\alpha} v_7 \xrightarrow{+\alpha} v_8$$

Como obter um novo fluxo válido e maior?

- Aumentamos ou diminuímos o fluxo das arestas por $\alpha > 0$.
- Note que mantemos a conservação de fluxo.

Aumentar fluxo ao longo de um pseudocaminho



Como obter um novo fluxo válido e maior?

- Aumentamos ou diminuímos o fluxo das arestas por $\alpha > 0$.
- Note que mantemos a conservação de fluxo.
- Ademais, o valor do novo fluxo é maior.

Aumentar fluxo ao longo de um pseudocaminho

$$v_1 \xrightarrow{+\alpha} v_2 \xleftarrow{-\alpha} v_3 \xleftarrow{-\alpha} v_4 \xrightarrow{+\alpha} v_5 \xleftarrow{-\alpha} v_6 \xrightarrow{+\alpha} v_7 \xrightarrow{+\alpha} v_8$$

Como obter um novo fluxo válido e maior?

- Aumentamos ou diminuímos o fluxo das arestas por $\alpha > 0$.
- Note que mantemos a conservação de fluxo.
- Ademais, o valor do novo fluxo é maior.
- Falta garantir que os fluxos sejam **NÃO NEGATIVOS** e respeitem às **CAPACIDADES**.

Redes residuais

A **REDE RESIDUAL** obtida de $(G, c, \mathbf{s,t})$ a partir de um fluxo f é a rede $(G_f, c_f, \mathbf{s,t})$ com $G_f = (\mathbf{V}, \mathbf{E_f})$ em que para cada $\mathbf{(u,v)} \in \mathbf{E}$:

Redes residuais

A **REDE RESIDUAL** obtida de $(G, c, \mathbf{s,t})$ a partir de um fluxo f é a rede $(G_f, c_f, \mathbf{s,t})$ com $G_f = (\mathbf{V}, \mathbf{E_f})$ em que para cada $\mathbf{(u,v)} \in \mathbf{E}$:

1. Se $f(\mathbf{u,v}) < c(\mathbf{u,v})$, então $\mathbf{(u,v)} \in \mathbf{E_f}$ e $c_f(\mathbf{u,v}) = c(\mathbf{u,v}) - f(\mathbf{u,v})$.

$$u \xrightarrow{\mathbf{f} < c} v \quad \Rightarrow \quad u \xrightarrow{c_f = c - \mathbf{f}} v$$

Redes residuais

A **REDE RESIDUAL** obtida de $(G, c, \mathbf{s,t})$ a partir de um fluxo f é a rede $(G_f, c_f, \mathbf{s,t})$ com $G_f = (\mathbf{V}, \mathbf{E_f})$ em que para cada $\mathbf{(u,v)} \in \mathbf{E}$:

1. Se $f(\mathbf{u,v}) < c(\mathbf{u,v})$, então $\mathbf{(u,v)} \in \mathbf{E_f}$ e $c_f(\mathbf{u,v}) = c(\mathbf{u,v}) - f(\mathbf{u,v})$.

$$u \xrightarrow{\mathbf{f} < c} v \quad \Rightarrow \quad u \xrightarrow{c_f = c - \mathbf{f}} v$$

2. Se $f(\mathbf{u,v}) > 0$, então $\mathbf{(v,u)} \in \mathbf{E_f}$ e $c_f(\mathbf{v,u}) = f(\mathbf{u,v})$.

$$u \xrightarrow{\mathbf{f} > 0} v \quad \Rightarrow \quad u \xleftarrow{c_f = \mathbf{f}} v$$

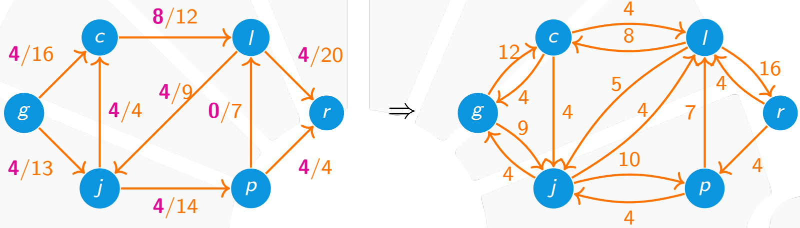
Redes residuais

$$u \xrightarrow{\mathbf{f} < c} v \quad \Rightarrow \quad u \xrightarrow{c_f = c - \mathbf{f}} v$$

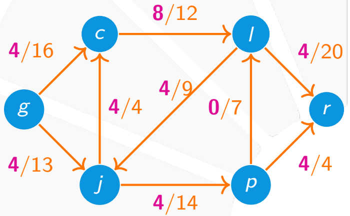
$$u \xrightarrow{\mathbf{f} > 0} v \quad \Rightarrow \quad u \xleftarrow{c_f = \mathbf{f}} v$$

Note que, como não há arestas antiparalelas em G, não há ambiguidade na definição de $c_f(\mathbf{u,v})$ nem de $c_f(\mathbf{v,u})$.

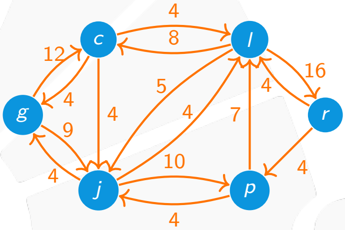
Redes residuais: um exemplo



Redes residuais: um exemplo

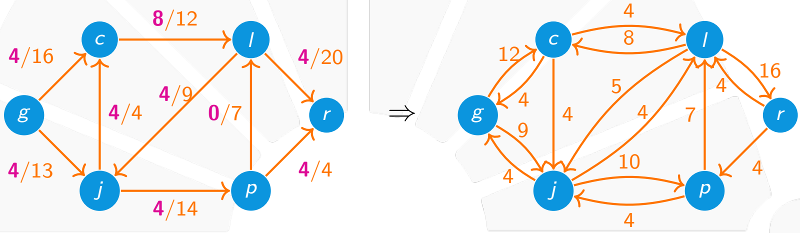


⇒



Observações:

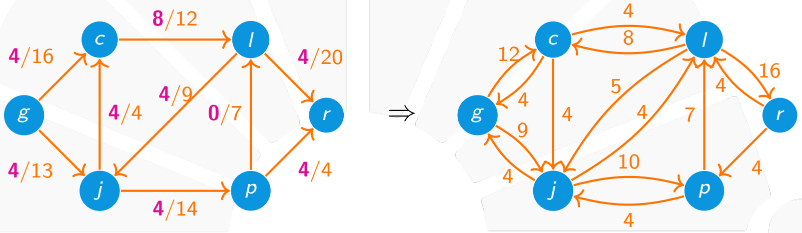
Redes residuais: um exemplo



Observações:

- O número de arestas da rede residual é $|\mathbf{E_f}| \leq 2|\mathbf{E}|$.

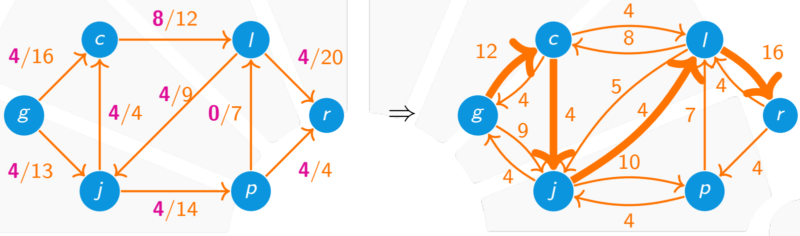
Redes residuais: um exemplo



Observações:

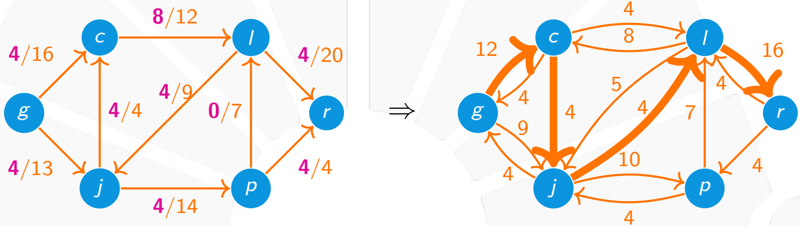
- O número de arestas da rede residual é $|\mathbf{E_f}| \leq 2|\mathbf{E}|$.
- A rede residual pode conter arestas antiparalelas.

Caminhos aumentadores



Um **CAMINHO AUMENTADOR** é um caminho de **s** a **t** na rede residual G_f que:

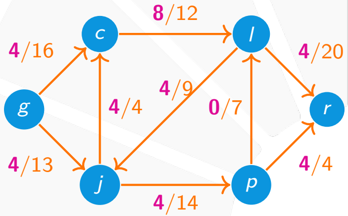
Caminhos aumentadores



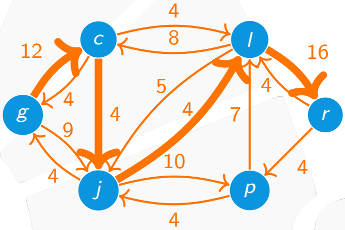
Um **CAMINHO AUMENTADOR** é um caminho de **s** a **t** na rede residual G_f que:

- Corresponde a um pseudocaminho da rede original.

Caminhos aumentadores



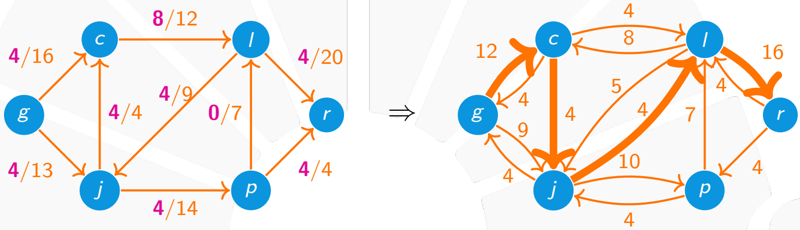
⇒



Um **CAMINHO AUMENTADOR** é um caminho de **s** a **t** na rede residual G_f que:

- Corresponde a um pseudocaminho da rede original.
- Se existir, então podemos aumentar o valor do fluxo.

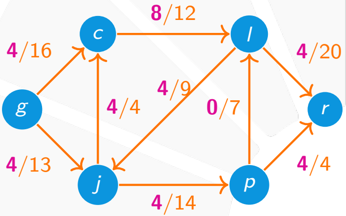
Capacidade do caminho



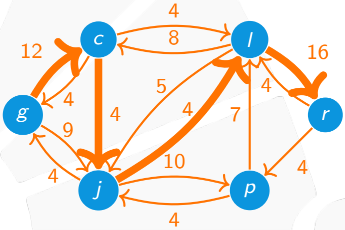
A **CAPACIDADE RESIDUAL** de um caminho aumentador P é:

$$c_f(P) = \min\{c_f(\mathbf{u},\mathbf{v}) : (\mathbf{u},\mathbf{v}) \in P\}.$$

Capacidade do caminho



$\Rightarrow$

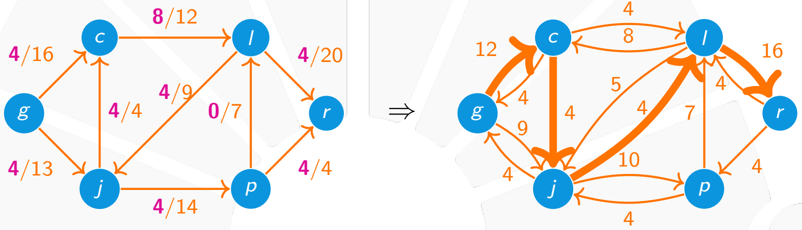


A **CAPACIDADE RESIDUAL** de um caminho aumentador P é:

$$c_f(P) = \min\{c_f(\mathbf{u},\mathbf{v}) : (\mathbf{u},\mathbf{v}) \in P\}.$$

Observe que, $c_f(P) > 0$.

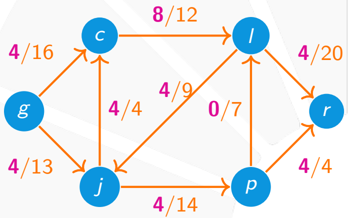
Arestas do caminho



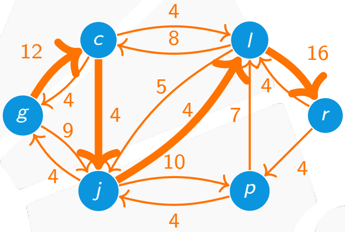
Podemos dividir o conjunto de arestas de P em dois conjuntos:

$\mathbf{P}^+ = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbf{P} : (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbf{E}\}$ e $\mathbf{P}^- = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbf{P} : (\mathbf{v}, \mathbf{u}) \in \mathbf{E}\}$

Arestas do caminho



⇒

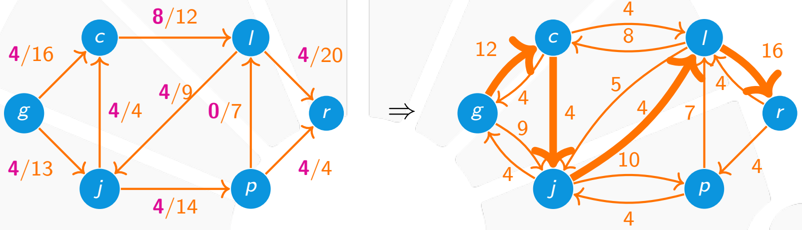


Podemos dividir o conjunto de arestas de P em dois conjuntos:

$\mathbf{P}^+ = \{(\mathbf{u},\mathbf{v}) \in \mathbf{P} : (\mathbf{u},\mathbf{v}) \in \mathbf{E}\}$ e $\mathbf{P}^- = \{(\mathbf{u},\mathbf{v}) \in \mathbf{P} : (\mathbf{v},\mathbf{u}) \in \mathbf{E}\}$

Uma aresta de P:

Arestas do caminho



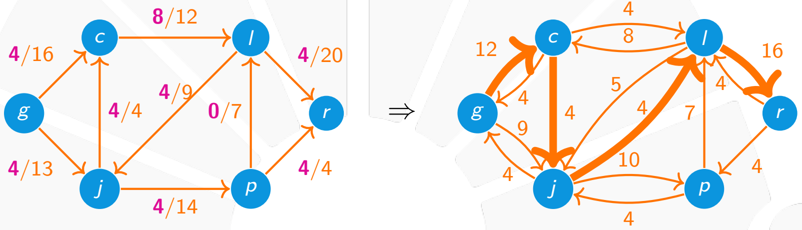
Podemos dividir o conjunto de arestas de P em dois conjuntos:

$$\mathbf{P}^+ = \{(\mathbf{u},\mathbf{v}) \in \mathbf{P} : (\mathbf{u},\mathbf{v}) \in \mathbf{E}\} \quad \text{e} \quad \mathbf{P}^- = \{(\mathbf{u},\mathbf{v}) \in \mathbf{P} : (\mathbf{v},\mathbf{u}) \in \mathbf{E}\}$$

Uma aresta de P:

- Pertence a $\mathbf{P}^+$ se também for uma aresta $\mathbf{E}$.

Arestas do caminho



Podemos dividir o conjunto de arestas de P em dois conjuntos:

$\mathbf{P^+ = \{(u,v) \in P : (u,v) \in E\}}$ e $\mathbf{P^- = \{(u,v) \in P : (v,u) \in E\}}$

Uma aresta de P:

- Pertence a $\mathbf{P^+}$ se também for uma aresta $\mathbf{E}$.
- Pertence a $\mathbf{P^-}$ se sua reversa é aresta de $\mathbf{E}$.

Aumentando um fluxo

Seja $\alpha = c_f(P)$ a capacidade residual de P.

Aumentando um fluxo

Seja $\alpha = c_f(P)$ a capacidade residual de P.

- Aumentamos o valor do fluxo f usando P.

Aumentando um fluxo

Seja $\alpha = c_f(P)$ a capacidade residual de P.

- Aumentamos o valor do fluxo f usando P.
- Criamos um novo fluxo $f \uparrow P : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}_+$ definido como:

Aumentando um fluxo

Seja $\alpha = c_f(P)$ a capacidade residual de P.

- Aumentamos o valor do fluxo f usando P.
- Criamos um novo fluxo $f \uparrow P : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}_+$ definido como:

$$f \uparrow P(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \begin{cases} f(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \alpha & \text{se } (\mathbf{u},\mathbf{v}) \in \mathbf{P}^+, \\ f(\mathbf{u},\mathbf{v}) - \alpha & \text{se } (\mathbf{v},\mathbf{u}) \in \mathbf{P}^-, \\ f(\mathbf{u},\mathbf{v}) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Aumentando um fluxo

Seja $\alpha = c_f(P)$ a capacidade residual de P.

- Aumentamos o valor do fluxo f usando P.
- Criamos um novo fluxo $f \uparrow P : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}_+$ definido como:

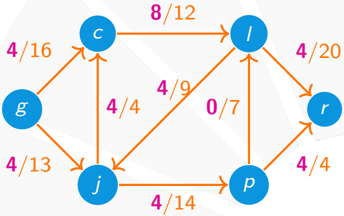
$$f \uparrow P(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \begin{cases} f(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \alpha & \text{se } (\mathbf{u},\mathbf{v}) \in \mathbf{P}^+, \\ f(\mathbf{u},\mathbf{v}) - \alpha & \text{se } (\mathbf{v},\mathbf{u}) \in \mathbf{P}^-, \\ f(\mathbf{u},\mathbf{v}) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Lema

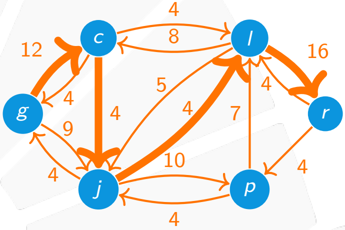
Seja $(G, c, \mathbf{s},\mathbf{t})$ uma rede e f um fluxo nessa rede. Se P é um caminho em G_f, então $f \uparrow P$ é um fluxo em $(G, c, \mathbf{s},\mathbf{t})$ com valor:

$$|f \uparrow P| = |f| + c_f(P).$$

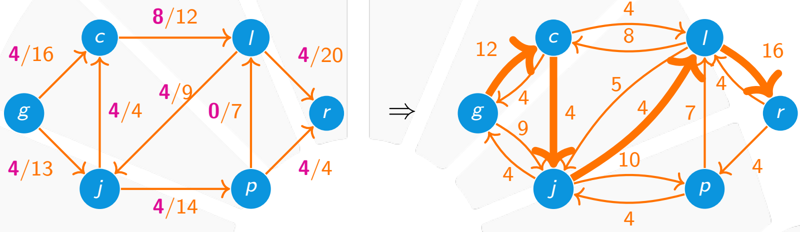
Caminhos aumentadores



$\Rightarrow$

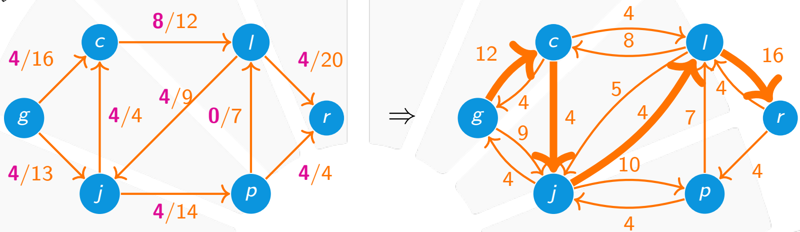


Caminhos aumentadores

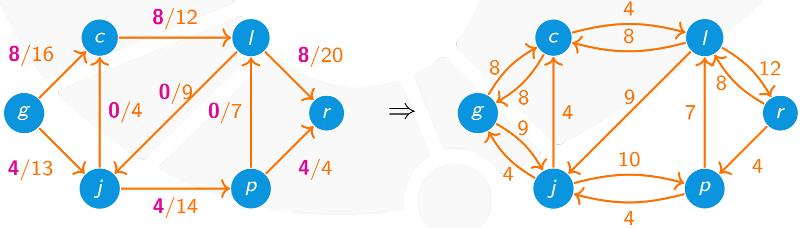


A capacidade residual do caminho aumentador é 4.

Caminhos aumentadores



A capacidade residual do caminho aumentador é 4.



Método de Ford-Fulkerson

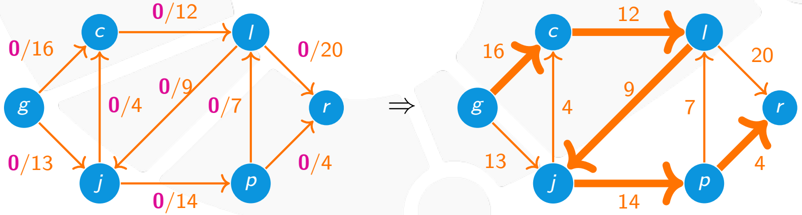
Algoritmo 1: $\textsc{Ford-Fulkerson}(G, c, s, t)$

$f \leftarrow 0$

enquanto *existe um caminho aumentador P em G_f*

  $f \leftarrow f \uparrow P$ ▷ G_f é atualizado também

devolva f



Método de Ford-Fulkerson

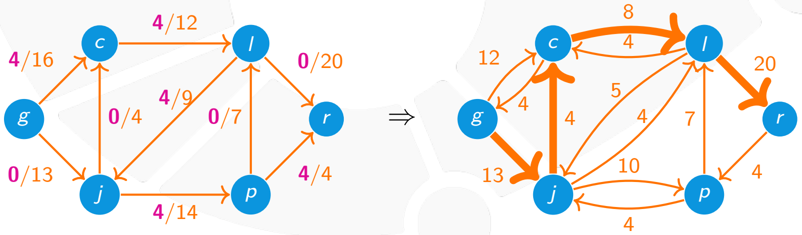
Algoritmo 2: FORD-FULKERSON(G, c, s, t)

1 $f \leftarrow 0$

2 **enquanto** *existe um caminho aumentador P em G_f*

3 $f \leftarrow f \uparrow P$ ▷ G_f é atualizado também

4 **devolva** f



Método de Ford-Fulkerson

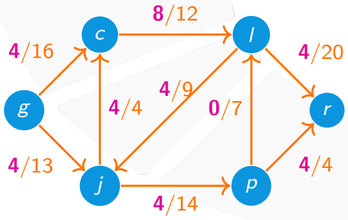
Algoritmo 3: $\textsc{Ford-Fulkerson}(G, c, s, t)$

1 $f \leftarrow 0$

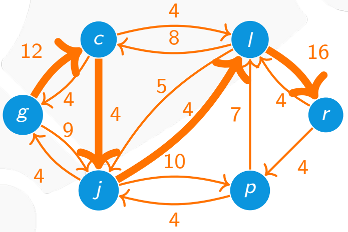
2 **enquanto** *existe um caminho aumentador P em G_f*

3 $\quad f \leftarrow f \uparrow P$ $\qquad \triangleright$ G_f é atualizado também

4 **devolva** f



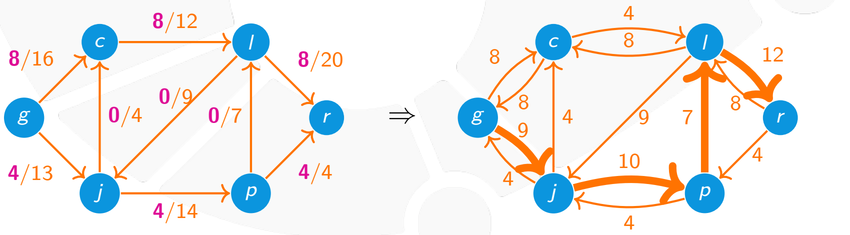
$\Rightarrow$



Método de Ford-Fulkerson

Algoritmo 4: Ford-Fulkerson(G, c, s, t)

$f \leftarrow 0$
enquanto *existe um caminho aumentador P em G_f*
  $f \leftarrow f \uparrow P$ ▷ G_f é atualizado também
devolva f



Método de Ford-Fulkerson

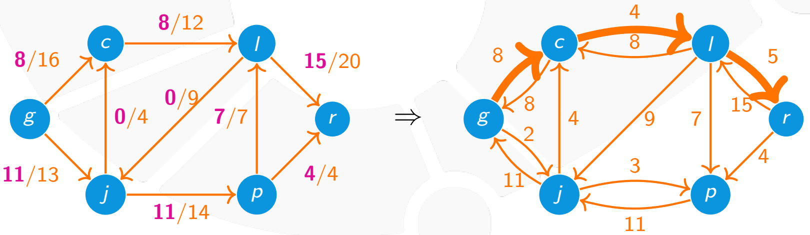
Algoritmo 5: $\textsc{Ford-Fulkerson}(G, c, s, t)$

$f \leftarrow 0$

enquanto *existe um caminho aumentador P em G_f*

  $f \leftarrow f \uparrow P$ $\triangleright$ G_f é atualizado também

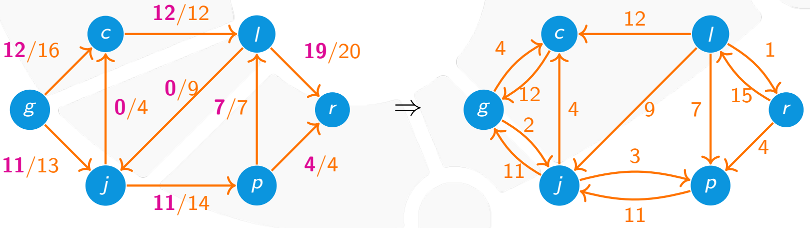
devolva f



Método de Ford-Fulkerson

Algoritmo 6: Ford-Fulkerson(G, c, s, t)

$f \leftarrow 0$
enquanto *existe um caminho aumentador* P *em* G_f
    $f \leftarrow f \uparrow P$ ▷ G_f é atualizado também
devolva f



Método de Ford-Fulkerson

Perguntas:

Método de Ford-Fulkerson

Perguntas:

- Este método para? Qual é a complexidade?

Método de Ford-Fulkerson

Perguntas:

- Este método para? Qual é a complexidade?
- Por que o fluxo f que ele devolve é máximo?

Método de Ford-Fulkerson

Perguntas:

- Este método para? Qual é a complexidade?
- Por que o fluxo f que ele devolve é máximo?

Para responder isso, introduziremos alguns conceitos:

Método de Ford-Fulkerson

Perguntas:

- Este método para? Qual é a complexidade?
- Por que o fluxo f que ele devolve é máximo?

Para responder isso, introduziremos alguns conceitos:

- O **CORTE** de uma rede de fluxo.

Método de Ford-Fulkerson

Perguntas:

- Este método para? Qual é a complexidade?
- Por que o fluxo f que ele devolve é máximo?

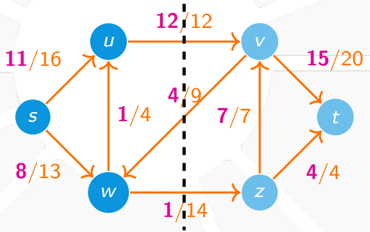
Para responder isso, introduziremos alguns conceitos:

- O **CORTE** de uma rede de fluxo.
- A **CAPACIDADE** desse corte.

Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

Cortes

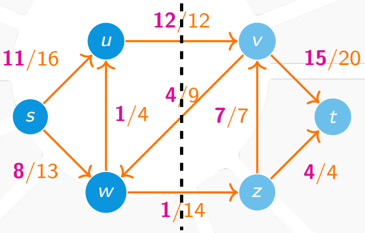
Dado um grafo $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ e uma rede $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$, um **CORTE** nessa rede é uma partição $(\mathbf{S}, \mathbf{T})$ de $\mathbf{V}$ em dois conjuntos $\mathbf{S}$ e $\mathbf{T} = \mathbf{V} \setminus \mathbf{S}$ tais que $\mathbf{s} \in \mathbf{S}$ e $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$.



Fluxo líquido ao longo de um corte

O **FLUXO LÍQUIDO** ao longo de um corte $(\mathbf{S},\mathbf{T})$ é definido como:

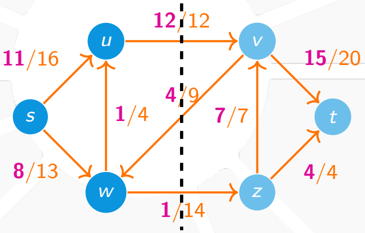
$$f(\mathbf{S},\mathbf{T}) = \sum_{\mathbf{u}\in\mathbf{S}}\sum_{\mathbf{v}\in\mathbf{T}} f(\mathbf{u},\mathbf{v}) - \sum_{\mathbf{u}\in\mathbf{S}}\sum_{\mathbf{v}\in\mathbf{T}} f(\mathbf{v},\mathbf{u}).$$



Fluxo líquido ao longo de um corte

O **FLUXO LÍQUIDO** ao longo de um corte $(\mathbf{S},\mathbf{T})$ é definido como:

$$f(\mathbf{S},\mathbf{T}) = \sum_{\mathbf{u}\in\mathbf{S}} \sum_{\mathbf{v}\in\mathbf{T}} f(\mathbf{u},\mathbf{v}) - \sum_{\mathbf{u}\in\mathbf{S}} \sum_{\mathbf{v}\in\mathbf{T}} f(\mathbf{v},\mathbf{u}).$$

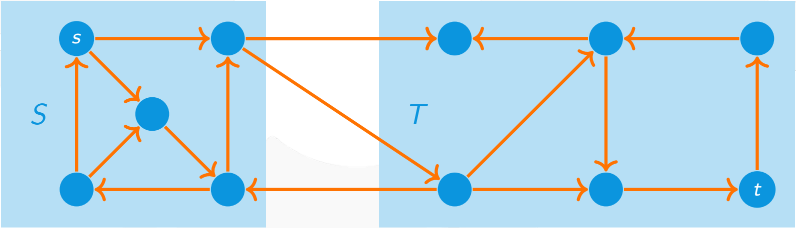


Lembre que: $|f| = \sum_{\mathbf{v}\in\mathbf{V}} f(\mathbf{s},\mathbf{v}) - \sum_{\mathbf{v}\in\mathbf{V}} f(\mathbf{v},\mathbf{s}) = f(\{\mathbf{s}\}, \mathbf{V} \setminus \{\mathbf{s}\})$.

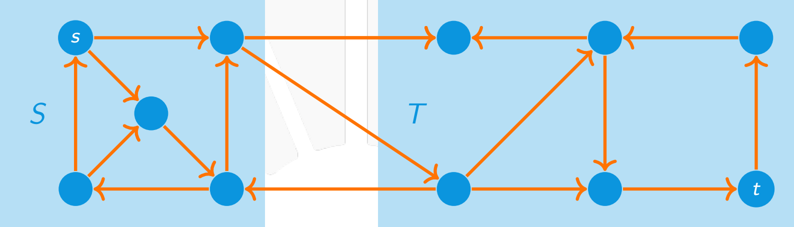
Fluxo líquido ao longo de um corte

Lema

Sejam f um fluxo e $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{T})$ um corte qualquer de uma rede $(G, c, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t})$. Então, $f(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{T}) = |f|$.

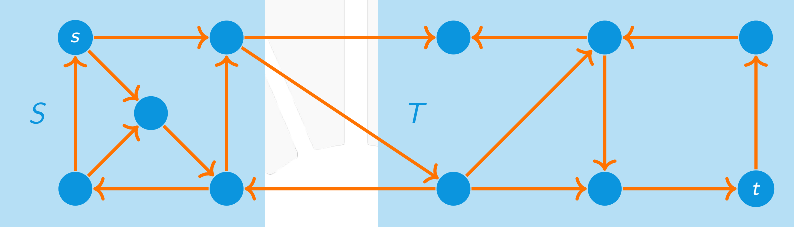


Demonstração do lema



Denote $f(\mathbf{S},\mathbf{S}) = \sum_{\mathbf{u}\in\mathbf{S}} \sum_{\mathbf{v}\in\mathbf{S}} f(\mathbf{u},\mathbf{v})$.

Demonstração do lema

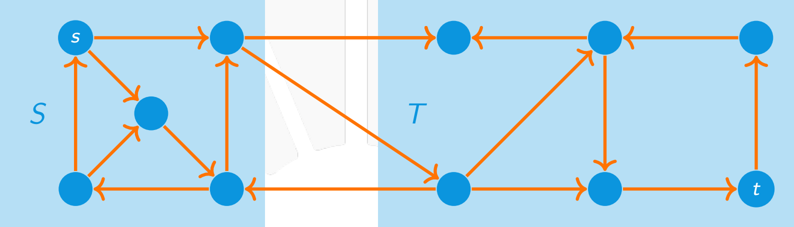


Denote $f(\mathbf{S},\mathbf{S}) = \sum_{\mathbf{u}\in\mathbf{S}} \sum_{\mathbf{v}\in\mathbf{S}} f(\mathbf{u},\mathbf{v})$.

(a) Então,

$$\sum_{\mathbf{u}\in\mathbf{S}} \sum_{\mathbf{v}\in\mathbf{V}} f(\mathbf{u},\mathbf{v}) = f(\mathbf{S},\mathbf{S}) + \sum_{\mathbf{x}\in\mathbf{S}} \sum_{\mathbf{y}\in\mathbf{T}} f(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

Demonstração do lema



Denote $f(\mathbf{S},\mathbf{S}) = \sum_{\mathbf{u}\in\mathbf{S}} \sum_{\mathbf{v}\in\mathbf{S}} f(\mathbf{u},\mathbf{v})$.

(a) Então,

$$\sum_{\mathbf{u}\in\mathbf{S}} \sum_{\mathbf{v}\in\mathbf{V}} f(\mathbf{u},\mathbf{v}) = f(\mathbf{S},\mathbf{S}) + \sum_{\mathbf{x}\in\mathbf{S}} \sum_{\mathbf{y}\in\mathbf{T}} f(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

(b) Analogamente,

$$\sum_{\mathbf{u}\in\mathbf{S}} \sum_{\mathbf{v}\in\mathbf{V}} f(\mathbf{v},\mathbf{u}) = f(\mathbf{S},\mathbf{S}) + \sum_{\mathbf{x}\in\mathbf{S}} \sum_{\mathbf{y}\in\mathbf{T}} f(\mathbf{y},\mathbf{x}).$$

Demonstração do lema

(a) $\sum_{\mathbf{u} \in \mathbf{S}} \sum_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} f(\mathbf{u},\mathbf{v}) = f(\mathbf{S},\mathbf{S}) + \sum_{\mathbf{x} \in \mathbf{S}} \sum_{\mathbf{y} \in \mathbf{T}} f(\mathbf{x},\mathbf{y})$.

Demonstração do lema

(a) $\sum_{\mathbf{u} \in \mathbf{S}} \sum_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} f(\mathbf{u},\mathbf{v}) = f(\mathbf{S},\mathbf{S}) + \sum_{\mathbf{x} \in \mathbf{S}} \sum_{\mathbf{y} \in \mathbf{T}} f(\mathbf{x},\mathbf{y})$.

(b) $\sum_{\mathbf{u} \in \mathbf{S}} \sum_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} f(\mathbf{v},\mathbf{u}) = f(\mathbf{S},\mathbf{S}) + \sum_{\mathbf{x} \in \mathbf{S}} \sum_{\mathbf{y} \in \mathbf{T}} f(\mathbf{y},\mathbf{x})$.

Demonstração do lema

(a) $\sum_{\mathbf{u} \in \mathbf{S}} \sum_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} f(\mathbf{u},\mathbf{v}) = f(\mathbf{S},\mathbf{S}) + \sum_{\mathbf{x} \in \mathbf{S}} \sum_{\mathbf{y} \in \mathbf{T}} f(\mathbf{x},\mathbf{y})$.

(b) $\sum_{\mathbf{u} \in \mathbf{S}} \sum_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} f(\mathbf{v},\mathbf{u}) = f(\mathbf{S},\mathbf{S}) + \sum_{\mathbf{x} \in \mathbf{S}} \sum_{\mathbf{y} \in \mathbf{T}} f(\mathbf{y},\mathbf{x})$.

Subtraindo **(b)** de **(a)**, obtemos:

Demonstração do lema

(a) $\sum_{\mathbf{u}\in\mathbf{S}}\sum_{\mathbf{v}\in\mathbf{V}} f(\mathbf{u},\mathbf{v}) = f(\mathbf{S},\mathbf{S}) + \sum_{\mathbf{x}\in\mathbf{S}}\sum_{\mathbf{y}\in\mathbf{T}} f(\mathbf{x},\mathbf{y})$.

(b) $\sum_{\mathbf{u}\in\mathbf{S}}\sum_{\mathbf{v}\in\mathbf{V}} f(\mathbf{v},\mathbf{u}) = f(\mathbf{S},\mathbf{S}) + \sum_{\mathbf{x}\in\mathbf{S}}\sum_{\mathbf{y}\in\mathbf{T}} f(\mathbf{y},\mathbf{x})$.

Subtraindo **(b)** de **(a)**, obtemos:

$$\sum_{\mathbf{u}\in\mathbf{S}}\sum_{\mathbf{v}\in\mathbf{V}} f(\mathbf{u},\mathbf{v}) - \sum_{\mathbf{u}\in\mathbf{S}}\sum_{\mathbf{v}\in\mathbf{V}} f(\mathbf{v},\mathbf{u}) = \sum_{\mathbf{x}\in\mathbf{S}}\sum_{\mathbf{y}\in\mathbf{T}} f(\mathbf{x},\mathbf{y}) - \sum_{\mathbf{x}\in\mathbf{S}}\sum_{\mathbf{y}\in\mathbf{T}} f(\mathbf{y},\mathbf{x})$$

Demonstração do lema

(a) $\sum_{u \in S} \sum_{v \in V} f(u,v) = f(S,S) + \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} f(x,y)$.

(b) $\sum_{u \in S} \sum_{v \in V} f(v,u) = f(S,S) + \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} f(y,x)$.

Subtraindo **(b)** de **(a)**, obtemos:

$$\sum_{u \in S} \sum_{v \in V} f(u,v) - \sum_{u \in S} \sum_{v \in V} f(v,u) = \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} f(x,y) - \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} f(y,x)$$

$$\sum_{u \in S} \left(\sum_{v \in V} f(u,v) - \sum_{v \in V} f(v,u) \right) = f(S,T)$$

Demonstração do lema

(a) $\sum_{u \in S} \sum_{v \in V} f(u,v) = f(S,S) + \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} f(x,y)$.

(b) $\sum_{u \in S} \sum_{v \in V} f(v,u) = f(S,S) + \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} f(y,x)$.

Subtraindo **(b)** de **(a)**, obtemos:

$$\sum_{u \in S} \sum_{v \in V} f(u,v) - \sum_{u \in S} \sum_{v \in V} f(v,u) = \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} f(x,y) - \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} f(y,x)$$

$$\sum_{u \in S} \left(\sum_{v \in V} f(u,v) - \sum_{v \in V} f(v,u) \right) = f(S,T)$$

$$\sum_{v \in V} (f(s,v) - f(v,s)) = f(S,T)$$

Demonstração do lema

(a) $\sum_{u \in S} \sum_{v \in V} f(u,v) = f(S,S) + \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} f(x,y)$.

(b) $\sum_{u \in S} \sum_{v \in V} f(v,u) = f(S,S) + \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} f(y,x)$.

Subtraindo **(b)** de **(a)**, obtemos:

$$\sum_{u \in S} \sum_{v \in V} f(u,v) - \sum_{u \in S} \sum_{v \in V} f(v,u) = \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} f(x,y) - \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} f(y,x)$$

$$\sum_{u \in S} \left(\sum_{v \in V} f(u,v) - \sum_{v \in V} f(v,u) \right) = f(S,T)$$

$$\sum_{v \in V} (f(s,v) - f(v,s)) = f(S,T)$$

$$|f| = f(S,T).$$

Capacidade de um corte

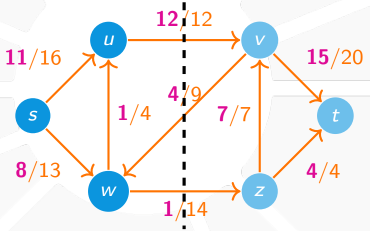
A **CAPACIDADE** de um corte ($\mathbf{S,T}$) é definida como:

$$c(\mathbf{S,T}) = \sum_{\mathbf{u} \in \mathbf{S}} \sum_{\mathbf{v} \in \mathbf{T}} c(\mathbf{u,v}).$$

Capacidade de um corte

A **CAPACIDADE** de um corte $(\mathbf{S},\mathbf{T})$ é definida como:

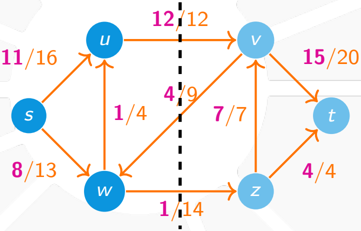
$$c(\mathbf{S},\mathbf{T}) = \sum_{\mathbf{u} \in \mathbf{S}} \sum_{\mathbf{v} \in \mathbf{T}} c(\mathbf{u},\mathbf{v}).$$



Capacidade de um corte

A **CAPACIDADE** de um corte $(\mathbf{S},\mathbf{T})$ é definida como:

$$c(\mathbf{S},\mathbf{T}) = \sum_{\mathbf{u}\in\mathbf{S}} \sum_{\mathbf{v}\in\mathbf{T}} c(\mathbf{u},\mathbf{v}).$$

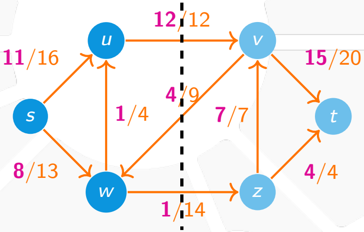


Um **CORTE MÍNIMO** em uma rede é um corte cuja capacidade é mínima entre todos os cortes da rede.

Relação entre fluxos e cortes

Corolário

Sejam f um fluxo e $(\boldsymbol{S},\boldsymbol{T})$ um corte qualquer de uma rede $(G, c, \boldsymbol{s},\boldsymbol{t})$. Então $|f| \leq c(\boldsymbol{S},\boldsymbol{T})$.



Demonstração do corolário

$$
\begin{aligned}
|f| &= f(\mathbf{S},\mathbf{T}) \\
&= \sum_{\mathbf{u}\in\mathbf{S}} \sum_{\mathbf{v}\in\mathbf{T}} f(\mathbf{u},\mathbf{v}) - \sum_{\mathbf{u}\in\mathbf{S}} \sum_{\mathbf{v}\in\mathbf{T}} f(\mathbf{v},\mathbf{u}) \\
&\leq \sum_{\mathbf{u}\in\mathbf{S}} \sum_{\mathbf{v}\in\mathbf{T}} f(\mathbf{u},\mathbf{v}) \\
&\leq \sum_{\mathbf{u}\in\mathbf{S}} \sum_{\mathbf{v}\in\mathbf{T}} c(\mathbf{u},\mathbf{v}) \\
&= c(\mathbf{S},\mathbf{T}).
\end{aligned}
$$

Relação entre fluxos e cortes

Corolário

Sejam f um fluxo e $(\boldsymbol{S,T})$ um corte qualquer de uma rede $(G, c, \boldsymbol{s,t})$. Então $|f| \leq c(\boldsymbol{S,T})$.

Relação entre fluxos e cortes

Corolário

Sejam f um fluxo e $(\boldsymbol{S,T})$ *um corte qualquer de uma rede* $(G, c, \boldsymbol{s,t})$. *Então* $|f| \leq c(\boldsymbol{S,T})$.

- Esse corolário implica que o valor de um fluxo máximo é menor ou igual que a capacidade de um corte mínimo.

Relação entre fluxos e cortes

Corolário

Sejam f um fluxo e $(\boldsymbol{S,T})$ um corte qualquer de uma rede $(G, c, \boldsymbol{s,t})$. Então $|f| \leq c(\boldsymbol{S,T})$.

- Esse corolário implica que o valor de um fluxo máximo é menor ou igual que a capacidade de um corte mínimo.
- Veremos que, na verdade, essas quantidades são iguais.

Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

Teorema

Seja f um fluxo de uma rede $(G, c, \boldsymbol{s,t})$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

Teorema

Seja f um fluxo de uma rede $(G, c, \boldsymbol{s,t})$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) *f é um fluxo máximo.*

Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

Teorema

Seja f um fluxo de uma rede $(G, c, \boldsymbol{s,t})$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) *f é um fluxo máximo.*

(2) *A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.*

Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

Teorema

Seja f um fluxo de uma rede $(G, c, \boldsymbol{s,t})$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) *f é um fluxo máximo.*

(2) *A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.*

(3) *$|f| = c(\boldsymbol{S,T})$ para algum corte $(\boldsymbol{S,T})$ de $(G, c, \boldsymbol{s,t})$.*

Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

Teorema

Seja f um fluxo de uma rede $(G, c, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t})$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) *f é um fluxo máximo.*

(2) *A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.*

(3) *$|f| = c(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{T})$ para algum corte $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{T})$ de $(G, c, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t})$.*

Demonstração de **(1)** $\Rightarrow$ **(2)**:

Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

Teorema

Seja f um fluxo de uma rede $(G, c, \boldsymbol{s,t})$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) *f é um fluxo máximo.*

(2) *A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.*

(3) *$|f| = c(\boldsymbol{S,T})$ para algum corte $(\boldsymbol{S,T})$ de $(G, c, \boldsymbol{s,t})$.*

Demonstração de **(1)** $\Rightarrow$ **(2)**:

- Suponha que f seja um fluxo máximo.

Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

Teorema

Seja f um fluxo de uma rede $(G, c, \mathbf{s,t})$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) *f é um fluxo máximo.*

(2) *A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.*

(3) *$|f| = c(\boldsymbol{S,T})$ para algum corte $(\boldsymbol{S,T})$ de $(G, c, \mathbf{s,t})$.*

Demonstração de **(1)** $\Rightarrow$ **(2)**:

- Suponha que f seja um fluxo máximo.
- Suponha, por contradição, que G_f contenha um caminho P.

Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

Teorema

Seja f um fluxo de uma rede $(G, c, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t})$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) *f é um fluxo máximo.*

(2) *A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.*

(3) *$|f| = c(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{T})$ para algum corte $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{T})$ de $(G, c, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t})$.*

Demonstração de **(1)** $\Rightarrow$ **(2)**:

- Suponha que f seja um fluxo máximo.
- Suponha, por contradição, que G_f contenha um caminho P.
- Então, $f \uparrow P$ é um fluxo com valor maior que o valor de f.

Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

Teorema

Seja f um fluxo de uma rede $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) *f é um fluxo máximo.*

(2) *A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.*

(3) *$|f| = c(\mathbf{S}, \mathbf{T})$ para algum corte $(\mathbf{S}, \mathbf{T})$ de $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$.*

Demonstração de **(1)** $\Rightarrow$ **(2)**:

- Suponha que f seja um fluxo máximo.
- Suponha, por contradição, que G_f contenha um caminho P.
- Então, $f \uparrow P$ é um fluxo com valor maior que o valor de f.
- Isso é uma contradição, porque f é máximo.

Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

(2) A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.

(3) $|f| = c(\mathbf{S,T})$ para algum corte $(\mathbf{S,T})$ de $(G, c, \mathbf{s,t})$.

Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

(2) A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.

(3) $|f| = c(\mathbf{S},\mathbf{T})$ para algum corte $(\mathbf{S},\mathbf{T})$ de $(G, c, \mathbf{s},\mathbf{t})$.

Demonstração de **(2)** $\Rightarrow$ **(3)**:

Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

(2) A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.

(3) $|f| = c(\mathbf{S,T})$ para algum corte $(\mathbf{S,T})$ de $(G, c, \mathbf{s,t})$.

Demonstração de **(2)** $\Rightarrow$ **(3)**:

- Suponha que G_f não possui caminhos aumentadores.

Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

(2) A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.

(3) $|f| = c(\mathbf{S},\mathbf{T})$ para algum corte $(\mathbf{S},\mathbf{T})$ de $(G, c, \mathbf{s},\mathbf{t})$.

Demonstração de **(2)** $\Rightarrow$ **(3)**:

- Suponha que G_f não possui caminhos aumentadores.
- Ou seja, não existe caminho de **s** a **t** em G_f.

Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

(2) A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.

(3) $|f| = c(\mathbf{S},\mathbf{T})$ para algum corte $(\mathbf{S},\mathbf{T})$ de $(G, c, \mathbf{s},\mathbf{t})$.

Demonstração de **(2)** $\Rightarrow$ **(3)**:

- Suponha que G_f não possui caminhos aumentadores.
- Ou seja, não existe caminho de **s** a **t** em G_f.
- Defina:

$$\mathbf{S} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} : \text{existe caminho de } \mathbf{s} \text{ a } \mathbf{v} \text{ em } G_f\} \quad \text{e} \quad \mathbf{T} = \mathbf{V} \setminus \mathbf{S}.$$

Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

(2) A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.

(3) $|f| = c(\mathbf{S},\mathbf{T})$ para algum corte $(\mathbf{S},\mathbf{T})$ de $(G, c, \mathbf{s},\mathbf{t})$.

Demonstração de **(2)** $\Rightarrow$ **(3)**:

- Suponha que G_f não possui caminhos aumentadores.
- Ou seja, não existe caminho de **s** a **t** em G_f.
- Defina:

$$\mathbf{S} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} : \text{existe caminho de } \mathbf{s} \text{ a } \mathbf{v} \text{ em } G_f\} \quad \text{e} \quad \mathbf{T} = \mathbf{V} \setminus \mathbf{S}.$$

- Observe que, $\mathbf{s} \in \mathbf{S}$ e $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$, então $(\mathbf{S},\mathbf{T})$ é um corte.

Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

(2) A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.

(3) $|f| = c(\mathbf{S,T})$ para algum corte $(\mathbf{S,T})$ de $(G, c, \mathbf{s,t})$.

Considere vértices $\mathbf{u} \in \mathbf{S}$ e $\mathbf{v} \in \mathbf{T}$.

Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

(2) A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.

(3) $|f| = c(\mathbf{S,T})$ para algum corte $(\mathbf{S,T})$ de $(G, c, \mathbf{s,t})$.

Considere vértices $\mathbf{u} \in \mathbf{S}$ e $\mathbf{v} \in \mathbf{T}$.

- Note que, G_f não contém aresta $\mathbf{(u,v)}$.

Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

(2) A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.

(3) $|f| = c(\mathbf{S},\mathbf{T})$ para algum corte $(\mathbf{S},\mathbf{T})$ de $(G, c, \mathbf{s},\mathbf{t})$.

Considere vértices $\mathbf{u} \in \mathbf{S}$ e $\mathbf{v} \in \mathbf{T}$.

- Note que, G_f não contém aresta **(u,v)**.
- Isso implica que:

Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

(2) A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.

(3) $|f| = c(\mathbf{S,T})$ para algum corte $(\mathbf{S,T})$ de $(G, c, \mathbf{s,t})$.

Considere vértices $\mathbf{u} \in \mathbf{S}$ e $\mathbf{v} \in \mathbf{T}$.

- Note que, G_f não contém aresta $(\mathbf{u,v})$.
- Isso implica que:
  (a) Se $(\mathbf{u,v}) \in \mathbf{E}$, então $f(\mathbf{u,v}) = c(\mathbf{u,v})$.

Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

(2) A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.

(3) $|f| = c(\mathbf{S},\mathbf{T})$ para algum corte $(\mathbf{S},\mathbf{T})$ de $(G, c, \mathbf{s},\mathbf{t})$.

Considere vértices $\mathbf{u} \in \mathbf{S}$ e $\mathbf{v} \in \mathbf{T}$.

- Note que, G_f não contém aresta $(\mathbf{u},\mathbf{v})$.
- Isso implica que:
  - (a) Se $(\mathbf{u},\mathbf{v}) \in \mathbf{E}$, então $f(\mathbf{u},\mathbf{v}) = c(\mathbf{u},\mathbf{v})$.
  - (b) Se $(\mathbf{v},\mathbf{u}) \in \mathbf{E}$, então $f(\mathbf{v},\mathbf{u}) = 0$.

Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

(2) A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.

(3) $|f| = c(\mathbf{S},\mathbf{T})$ para algum corte $(\mathbf{S},\mathbf{T})$ de $(G, c, \mathbf{s}, \mathbf{t})$.

Considere vértices $\mathbf{u} \in \mathbf{S}$ e $\mathbf{v} \in \mathbf{T}$.

- Note que, G_f não contém aresta $(\mathbf{u},\mathbf{v})$.
- Isso implica que:
  (a) Se $(\mathbf{u},\mathbf{v}) \in \mathbf{E}$, então $f(\mathbf{u},\mathbf{v}) = c(\mathbf{u},\mathbf{v})$.
  (b) Se $(\mathbf{v},\mathbf{u}) \in \mathbf{E}$, então $f(\mathbf{v},\mathbf{u}) = 0$.

Portanto,

Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

(2) A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.

(3) $|f| = c(\mathbf{S,T})$ para algum corte $(\mathbf{S,T})$ de $(G, c, \mathbf{s,t})$.

Considere vértices $\mathbf{u} \in \mathbf{S}$ e $\mathbf{v} \in \mathbf{T}$.

- Note que, G_f não contém aresta $(\mathbf{u,v})$.
- Isso implica que:
  (a) Se $(\mathbf{u,v}) \in \mathbf{E}$, então $f(\mathbf{u,v}) = c(\mathbf{u,v})$.
  (b) Se $(\mathbf{v,u}) \in \mathbf{E}$, então $f(\mathbf{v,u}) = 0$.

Portanto,

$$|f| = f(\mathbf{S,T}) = \sum_{\mathbf{u}\in\mathbf{S}} \sum_{\mathbf{v}\in\mathbf{T}} f(\mathbf{u,v}) - \sum_{\mathbf{u}\in\mathbf{S}} \sum_{\mathbf{v}\in\mathbf{T}} f(\mathbf{v,u})$$

Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

(2) A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.

(3) $|f| = c(\mathbf{S,T})$ para algum corte $(\mathbf{S,T})$ de $(G, c, \mathbf{s,t})$.

Considere vértices $\mathbf{u} \in \mathbf{S}$ e $\mathbf{v} \in \mathbf{T}$.

- Note que, G_f não contém aresta $(\mathbf{u,v})$.
- Isso implica que:
  - (a) Se $(\mathbf{u,v}) \in \mathbf{E}$, então $f(\mathbf{u,v}) = c(\mathbf{u,v})$.
  - (b) Se $(\mathbf{v,u}) \in \mathbf{E}$, então $f(\mathbf{v,u}) = 0$.

Portanto,

$$|f| = f(\mathbf{S,T}) = \sum_{\mathbf{u}\in\mathbf{S}} \sum_{\mathbf{v}\in\mathbf{T}} f(\mathbf{u,v}) - \sum_{\mathbf{u}\in\mathbf{S}} \sum_{\mathbf{v}\in\mathbf{T}} f(\mathbf{v,u}) = \sum_{\mathbf{u}\in\mathbf{S}} \sum_{\mathbf{v}\in\mathbf{T}} c(\mathbf{u,v}) - \sum_{\mathbf{u}\in\mathbf{S}} \sum_{\mathbf{v}\in\mathbf{T}} 0$$

Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

(2) A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.

(3) $|f| = c(\mathbf{S},\mathbf{T})$ para algum corte $(\mathbf{S},\mathbf{T})$ de $(G, c, \mathbf{s},\mathbf{t})$.

Considere vértices $\mathbf{u} \in \mathbf{S}$ e $\mathbf{v} \in \mathbf{T}$.

- Note que, G_f não contém aresta $(\mathbf{u},\mathbf{v})$.
- Isso implica que:
  (a) Se $(\mathbf{u},\mathbf{v}) \in \mathbf{E}$, então $f(\mathbf{u},\mathbf{v}) = c(\mathbf{u},\mathbf{v})$.
  (b) Se $(\mathbf{v},\mathbf{u}) \in \mathbf{E}$, então $f(\mathbf{v},\mathbf{u}) = 0$.

Portanto,

$$|f| = f(\mathbf{S},\mathbf{T}) = \sum_{\mathbf{u}\in\mathbf{S}} \sum_{\mathbf{v}\in\mathbf{T}} f(\mathbf{u},\mathbf{v}) - \sum_{\mathbf{u}\in\mathbf{S}} \sum_{\mathbf{v}\in\mathbf{T}} f(\mathbf{v},\mathbf{u}) = \sum_{\mathbf{u}\in\mathbf{S}} \sum_{\mathbf{v}\in\mathbf{T}} c(\mathbf{u},\mathbf{v}) - \sum_{\mathbf{u}\in\mathbf{S}} \sum_{\mathbf{v}\in\mathbf{T}} 0$$

$$= c(\mathbf{S},\mathbf{T}).$$

Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

(2) A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.

(3) $|f| = c(\mathbf{S,T})$ para algum corte $(\mathbf{S,T})$ de $(G, c, \mathbf{s,t})$.

Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

(2) A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.

(3) $|f| = c(\mathbf{S},\mathbf{T})$ para algum corte $(\mathbf{S},\mathbf{T})$ de $(G, c, \mathbf{s},\mathbf{t})$.

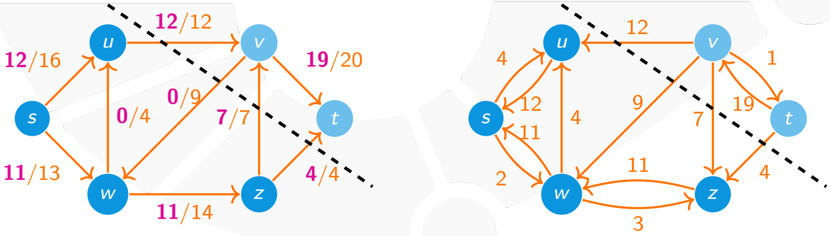
A seguinte figura ilustra a implicação **(2)** $\Rightarrow$ **(3)**:

Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

(2) A rede residual G_f não contém caminhos aumentadores.

(3) $|f| = c(\mathbf{S},\mathbf{T})$ para algum corte $(\mathbf{S},\mathbf{T})$ de $(G, c, \mathbf{s},\mathbf{t})$.

A seguinte figura ilustra a implicação **(2)** $\Rightarrow$ **(3)**:



Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

(3) $|f| = c(\mathbf{S,T})$ para algum corte $(\mathbf{S,T})$ de $(G, c, \mathbf{s,t})$.

(1) f é um fluxo máximo.

Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

(3) $|f| = c(\mathbf{S},\mathbf{T})$ para algum corte $(\mathbf{S},\mathbf{T})$ de $(G, c, \mathbf{s},\mathbf{t})$.

(1) f é um fluxo máximo.

Demonstração de **(3)** $\Rightarrow$ **(1)**:

Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

(3) $|f| = c(\mathbf{S,T})$ para algum corte $(\mathbf{S,T})$ de $(G, c, \mathbf{s,t})$.

(1) f é um fluxo máximo.

Demonstração de **(3)** $\Rightarrow$ **(1)**:

- Considere um corte $(\mathbf{S,T})$ e suponha que $|f| = c(\mathbf{S,T})$.

Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

(3) $|f| = c(\mathbf{S,T})$ para algum corte $(\mathbf{S,T})$ de $(G, c, \mathbf{s,t})$.

(1) f é um fluxo máximo.

Demonstração de **(3)** $\Rightarrow$ **(1)**:

- Considere um corte $(\mathbf{S,T})$ e suponha que $|f| = c(\mathbf{S,T})$.
- Suponha que f' é um corte máximo.

Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

(3) $|f| = c(\mathbf{S},\mathbf{T})$ para algum corte $(\mathbf{S},\mathbf{T})$ de $(G, c, \mathbf{s},\mathbf{t})$.

(1) f é um fluxo máximo.

Demonstração de **(3)** $\Rightarrow$ **(1)**:

- Considere um corte $(\mathbf{S},\mathbf{T})$ e suponha que $|f| = c(\mathbf{S},\mathbf{T})$.
- Suponha que f' é um corte máximo.
- Pelo corolário, sabemos que $|f'| \leq c(\mathbf{S},\mathbf{T}) = |f|$.

Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

(3) $|f| = c(\mathbf{S},\mathbf{T})$ para algum corte $(\mathbf{S},\mathbf{T})$ de $(G, c, \mathbf{s},\mathbf{t})$.

(1) f é um fluxo máximo.

Demonstração de **(3)** $\Rightarrow$ **(1)**:

- Considere um corte $(\mathbf{S},\mathbf{T})$ e suponha que $|f| = c(\mathbf{S},\mathbf{T})$.
- Suponha que f' é um corte máximo.
- Pelo corolário, sabemos que $|f'| \leq c(\mathbf{S},\mathbf{T}) = |f|$.
- Portanto, f também é máximo.

Consequências importantes

O teorema permite responder algumas perguntas:

Consequências importantes

O teorema permite responder algumas perguntas:

- Suponha que f é um fluxo e $(\mathbf{S,T})$ é um corte de uma rede tais que $|f| = c(\mathbf{S,T})$. É verdade que f é um **FLUXO MÁXIMO** e $(\mathbf{S,T})$ é um **CORTE MÍNIMO** dessa rede?

Consequências importantes

O teorema permite responder algumas perguntas:

- Suponha que f é um fluxo e $(\mathbf{S},\mathbf{T})$ é um corte de uma rede tais que $|f| = c(\mathbf{S},\mathbf{T})$. É verdade que f é um **FLUXO MÁXIMO** e $(\mathbf{S},\mathbf{T})$ é um **CORTE MÍNIMO** dessa rede?
- Dado um fluxo f de uma rede, como podemos verificar que f é de fato máximo? Qual é a complexidade do teste?

Consequências importantes

O teorema permite responder algumas perguntas:

- Suponha que f é um fluxo e $(\mathbf{S},\mathbf{T})$ é um corte de uma rede tais que $|f| = c(\mathbf{S},\mathbf{T})$. É verdade que f é um **FLUXO MÁXIMO** e $(\mathbf{S},\mathbf{T})$ é um **CORTE MÍNIMO** dessa rede?
- Dado um fluxo f de uma rede, como podemos verificar que f é de fato máximo? Qual é a complexidade do teste?
- Dado um **FLUXO MÁXIMO** f de uma rede, como podemos encontrar um **CORTE MÍNIMO** dessa rede? Qual é a complexidade?

Como escolher encontrar o caminho aumentador P?

- Podemos escolher um **CAMINHO MAIS CURTO** de **s** a **t** em G_f.

Como escolher encontrar o caminho aumentador P?

- Podemos escolher um **CAMINHO MAIS CURTO** de **s** a **t** em G_f.
- Isso pode ser pode ser feito executando uma BFS.

Como escolher encontrar o caminho aumentador P?

- Podemos escolher um **CAMINHO MAIS CURTO** de **s** a **t** em G_f.
- Isso pode ser pode ser feito executando uma BFS.
- Edmonds e Karp (1972) mostraram que essa implementação do algoritmo tem complexidade $O(VE^2)$.

Como escolher encontrar o caminho aumentador P?

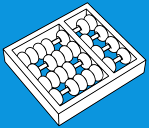
- Podemos escolher um **CAMINHO MAIS CURTO** de **s** a **t** em G_f.
- Isso pode ser pode ser feito executando uma BFS.
- Edmonds e Karp (1972) mostraram que essa implementação do algoritmo tem complexidade $O(VE^2)$.
- Denominamos essa implementação de EDMONDS-KARP.

Fluxo em redes

MC558 - Projeto e Análise de Algoritmos II

8

01/24



Santiago Valdés Ravelo
https://ic.unicamp.br/~santiago/
ravelo@unicamp.br

UNICAMP