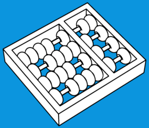
# Conceitos sobre grafos II

MC558 - Projeto e Análise de Algoritmos II

2

01/24



Santiago Valdés Ravelo
https://ic.unicamp.br/~santiago/
ravelo@unicamp.br

*“Facebook isn’t helping you make new connections, Facebook doesn’t develop new relationships, Facebook is just trying to be the most accurate model of your social graph.”*

Sean Parker

# Grafos bipartidos

## Definição

Uma **BIPARTIÇÃO** de um conjunto $V$ é um par $(A, B)$ tal que:

## Definição

Uma **BIPARTIÇÃO** de um conjunto $V$ é um par $(A, B)$ tal que:

- $A \cap B = \emptyset$ e

## Definição

Uma **BIPARTIÇÃO** de um conjunto $V$ é um par $(A, B)$ tal que:

- $A \cap B = \emptyset$ e
- $A \cup B = V$.

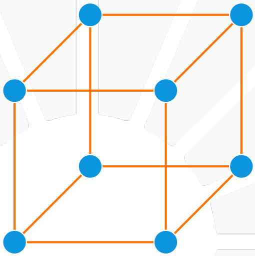
## Definição

Uma **BIPARTIÇÃO** de um conjunto $V$ é um par $(A, B)$ tal que:

- $A \cap B = \emptyset$ e
- $A \cup B = V$.

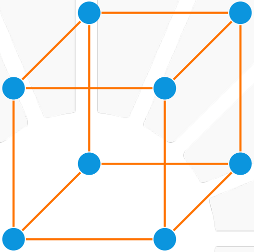
Um grafo $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ é **BIPARTIDO** se existe uma partição $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ de $\mathbf{V}$ tal que toda aresta de $G$ tem um extremo em $\mathbf{A}$ e outro em $\mathbf{B}$.

## Exemplo



Esse grafo é bipartido?

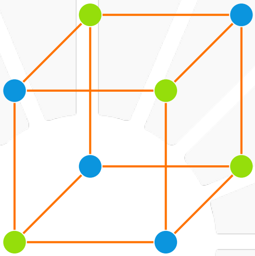
## Exemplo



Esse grafo é bipartido?

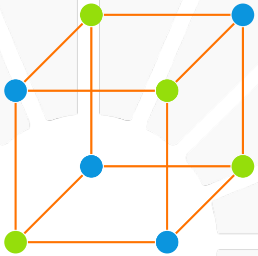
Podemos indicar cada parte com uma cor: **azul** ou **verde**.

## Exemplo



É bipartido!

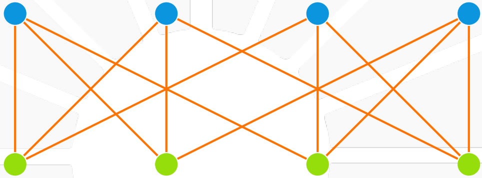
## Exemplo



É bipartido!

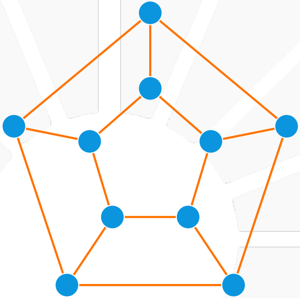
Um grafo $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ é bipartido se for possível colorir os vértices de $G$ com **DUAS CORES** de modo que vértices adjacentes tenham cores distintas.

## Exemplo



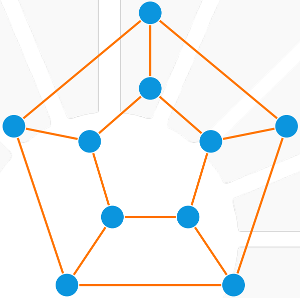
Isto pode ser visto melhor com outro desenho.

## Exemplo



Este grafo **NÃO** é bipartido.

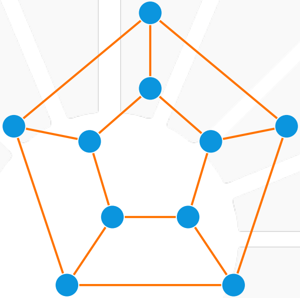
## Exemplo



Este grafo **NÃO** é bipartido.

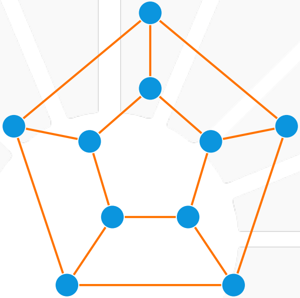
Podemos apresentar uma justificativa simples?

## Condição necessária para um grafo ser bipartido



Um grafo bipartido não pode conter ciclos de comprimento ímpar!

## Condição necessária para um grafo ser bipartido



Um grafo bipartido não pode conter ciclos de comprimento ímpar!

Essa é uma condição suficiente? basta não ter ciclos ímpares?

## Condição necessária e suficiente

**Teorema**

*Seja $G$ um grafo. Então $G$ é bipartido se e somente se $G$ não possuir um ciclo ímpar.*

## Condição necessária e suficiente

### Teorema

*Seja $G$ um grafo. Então $G$ é bipartido se e somente se $G$ não possuir um ciclo ímpar.*

Demonstração:

## Condição necessária e suficiente

**Teorema**

*Seja $G$ um grafo. Então $G$ é bipartido se e somente se $G$ não possuir um ciclo ímpar.*

Demonstração:

- Já vimos que se $G$ tem um ciclo ímpar, ele não é bipartido.

## Condição necessária e suficiente

**Teorema**

*Seja $G$ um grafo. Então $G$ é bipartido se e somente se $G$ não possuir um ciclo ímpar.*

Demonstração:

- Já vimos que se $G$ tem um ciclo ímpar, ele não é bipartido.
- Assim, resta demonstrar a recíproca.

## Condição necessária e suficiente

**Teorema**

*Seja $G$ um grafo. Então $G$ é bipartido se e somente se $G$ não possuir um ciclo ímpar.*

Demonstração:

- Já vimos que se $G$ tem um ciclo ímpar, ele não é bipartido.
- Assim, resta demonstrar a recíproca.
- Podemos supor que $G$ é conexo. Por quê?

## Condição necessária e suficiente

**Teorema**

*Seja $G$ um grafo. Então $G$ é bipartido se e somente se $G$ não possuir um ciclo ímpar.*

Demonstração:

- Já vimos que se $G$ tem um ciclo ímpar, ele não é bipartido.
- Assim, resta demonstrar a recíproca.
- Podemos supor que $G$ é conexo. Por quê?
- Antes de continuar a prova, vejamos outros resultados...

# Árvore geradora

## Propriedade

### Fato (1)

*Todo grafo conexo contém uma árvore geradora.*

## Propriedade

**Fato (1)**

*Todo grafo conexo contém uma árvore geradora.*

Provar o fato a partir do seguinte resultado (exercício):

## Propriedade

**Fato (1)**

*Todo grafo conexo contém uma árvore geradora.*

Provar o fato a partir do seguinte resultado (exercício):

**Lema**

*Seja $G$ um grafo conexo e seja $C$ um ciclo de $G$. Se* ***e*** *é uma aresta de $C$ então $G -$* ***e*** *é conexo.*

## Propriedade

### Fato (1)

*Todo grafo conexo contém uma árvore geradora.*

Provar o fato a partir do seguinte resultado (exercício):

### Lema

*Seja $G$ um grafo conexo e seja $C$ um ciclo de $G$. Se* $\boldsymbol{e}$ *é uma aresta de $C$ então $G - \boldsymbol{e}$ é conexo.*

A recíproca também vale:

## Propriedade

**Fato (1)**

*Todo grafo conexo contém uma árvore geradora.*

Provar o fato a partir do seguinte resultado (exercício):

**Lema**

*Seja $G$ um grafo conexo e seja $C$ um ciclo de $G$. Se* **e** *é uma aresta de $C$ então $G -$* **e** *é conexo.*

A recíproca também vale:

**Lema**

*Seja $G$ um grafo conexo e seja* **e** *uma aresta de $G$. Se $G -$* **e** *é conexo então* **e** *pertence a algum ciclo de $G$.*

## Árvores e grafos bipartidos

### Fato (2)

*Toda árvore* $T = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$ *é um grafo bipartido.*

## Árvores e grafos bipartidos

### Fato (2)

*Toda árvore $T = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ é um grafo bipartido.*

É possível provar por indução em $|\mathbf{V}|$. Demonstre como exercício.

# Árvore geradora

## Fato (3)

*Seja* $T = (\boldsymbol{V}, \mathbf{E'})$ *uma árvore geradora de um grafo* $G = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$*.* *Então para toda aresta* $\boldsymbol{e} \in \boldsymbol{E} \setminus \mathbf{E'}$ *existe um único ciclo em* $T + \boldsymbol{e} = (\boldsymbol{V}, \mathbf{E'} \cup \{\mathbf{e}\})$*.*

## Árvore geradora

### Fato (3)

*Seja $T = (V, \mathbf{E}')$ uma árvore geradora de um grafo $G = (V, E)$. Então para toda aresta $e \in E \setminus \mathbf{E}'$ existe um único ciclo em $T + e = (V, \mathbf{E}' \cup \{\mathbf{e}\})$.*

Demonstração:

# Árvore geradora

## Fato (3)

*Seja* $T = (\boldsymbol{V}, \mathbf{E'})$ *uma árvore geradora de um grafo* $G = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$*. Então para toda aresta* $\boldsymbol{e} \in \boldsymbol{E} \setminus \mathbf{E'}$ *existe um único ciclo em* $T + \boldsymbol{e} = (\boldsymbol{V}, \mathbf{E'} \cup \{\mathbf{e}\})$*.*

Demonstração:

- Sejam **u,v** os extremos de **e**.

# Árvore geradora

## Fato (3)

*Seja* $T = (\mathbf{V}, \mathbf{E}')$ *uma árvore geradora de um grafo* $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$*. Então para toda aresta* $\mathbf{e} \in \mathbf{E} \setminus \mathbf{E}'$ *existe um único ciclo em* $T + \mathbf{e} = (\mathbf{V}, \mathbf{E}' \cup \{\mathbf{e}\})$*.*

Demonstração:

- Sejam **u,v** os extremos de **e**.
- Como $T$ é árvore, existe um único caminho $P$ de **u** a **v** em $T$.

# Árvore geradora

**Fato (3)**

*Seja $T = (\mathbf{V}, \mathbf{E'})$ uma árvore geradora de um grafo $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$. Então para toda aresta $\mathbf{e} \in \mathbf{E} \setminus \mathbf{E'}$ existe um único ciclo em $T + \mathbf{e} = (\mathbf{V}, \mathbf{E'} \cup \{\mathbf{e}\})$.*

Demonstração:

- Sejam **u,v** os extremos de **e**.
- Como $T$ é árvore, existe um único caminho $P$ de **u** a **v** em $T$.
- Portanto, $P + \mathbf{e}$ é o único ciclo em $T + \mathbf{e}$.

# Árvore geradora

## Fato (3)

*Seja* $T = (\mathbf{V}, \mathbf{E}')$ *uma árvore geradora de um grafo* $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$*. Então para toda aresta* $\mathbf{e} \in \mathbf{E} \setminus \mathbf{E}'$ *existe um único ciclo em* $T + \mathbf{e} = (\mathbf{V}, \mathbf{E}' \cup \{\mathbf{e}\})$*.*

Demonstração:

- Sejam **u,v** os extremos de **e**.
- Como $T$ é árvore, existe um único caminho $P$ de **u** a **v** em $T$.
- Portanto, $P + \mathbf{e}$ é o único ciclo em $T + \mathbf{e}$.

O único ciclo de $T + \mathbf{e}$ é chamado de **CICLO FUNDAMENTAL**.

## Demonstração do teorema

Agora estamos prontos para demonstrar a segunda parte do teorema:

## Demonstração do teorema

Agora estamos prontos para demonstrar a segunda parte do teorema:

**Teorema**

*Seja G um grafo. Então G é bipartido se e somente se G não possuir um ciclo ímpar.*

# Demonstração do teorema

Agora estamos prontos para demonstrar a segunda parte do teorema:

**Teorema**

*Seja $G$ um grafo. Então $G$ é bipartido se e somente se $G$ não possuir um ciclo ímpar.*

Demonstração:

## Demonstração do teorema

Agora estamos prontos para demonstrar a segunda parte do teorema:

**Teorema**

*Seja $G$ um grafo. Então $G$ é bipartido se e somente se $G$ não possuir um ciclo ímpar.*

Demonstração:

- Resta mostrar que se $G$ não tem ciclo ímpar, ele é bipartido.

## Demonstração do teorema

Agora estamos prontos para demonstrar a segunda parte do teorema:

**Teorema**

*Seja $G$ um grafo. Então $G$ é bipartido se e somente se $G$ não possuir um ciclo ímpar.*

Demonstração:

- Resta mostrar que se $G$ não tem ciclo ímpar, ele é bipartido.
- Lembre, podemos supor que $G$ seja conexo.

## Demonstração do teorema

Agora estamos prontos para demonstrar a segunda parte do teorema:

**Teorema**

*Seja $G$ um grafo. Então $G$ é bipartido se e somente se $G$ não possuir um ciclo ímpar.*

Demonstração:

- Resta mostrar que se $G$ não tem ciclo ímpar, ele é bipartido.
- Lembre, podemos supor que $G$ seja conexo.
- Suponha que $G$ não contenha um ciclo ímpar.

## Demonstração do teorema

Agora estamos prontos para demonstrar a segunda parte do teorema:

**Teorema**

*Seja $G$ um grafo. Então $G$ é bipartido se e somente se $G$ não possuir um ciclo ímpar.*

Demonstração:

- Resta mostrar que se $G$ não tem ciclo ímpar, ele é bipartido.
- Lembre, podemos supor que $G$ seja conexo.
- Suponha que $G$ não contenha um ciclo ímpar.
- Construiremos uma bipartição $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ de $\mathbf{V}$ tal que toda aresta de $G$ tem um extremo em $\mathbf{A}$ e outro em $\mathbf{B}$.

## Demonstração do teorema

- Pelo Fato 1, $G$ contém uma árvore geradora $T = (\mathbf{V}, \mathbf{E'})$.

## Demonstração do teorema

- Pelo Fato 1, $G$ contém uma árvore geradora $T = (\mathbf{V}, \mathbf{E'})$.
- Pelo Fato 2, $T$ possui uma uma bipartição $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ de $\mathbf{V}$ tal que toda aresta de $T$ tem um extremo em $\mathbf{A}$ e outro em $\mathbf{B}$.

## Demonstração do teorema

- Pelo Fato 1, $G$ contém uma árvore geradora $T = (\mathbf{V}, \mathbf{E}')$.
- Pelo Fato 2, $T$ possui uma uma bipartição $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ de $\mathbf{V}$ tal que toda aresta de $T$ tem um extremo em $\mathbf{A}$ e outro em $\mathbf{B}$.
- Mostraremos que toda aresta de $\mathbf{E} \setminus \mathbf{E}'$ tem um extremo em $\mathbf{A}$ e outro em $\mathbf{B}$.

## Demonstração do teorema

Seja $\mathbf{e}$ uma aresta de $\mathbf{E} \setminus \mathbf{E'}$:

## Demonstração do teorema

Seja **e** uma aresta de $\mathbf{E} \setminus \mathbf{E'}$:

- Pelo Fato 3, existe um único ciclo $C$ em $T + \mathbf{e}$ que contém **e**.

## Demonstração do teorema

Seja **e** uma aresta de $\mathbf{E} \setminus \mathbf{E'}$:

- Pelo Fato 3, existe um único ciclo $C$ em $T + \mathbf{e}$ que contém **e**.
- Se os extremos de **e** são da mesma parte (**A** ou **B**),

## Demonstração do teorema

Seja **e** uma aresta de $\mathbf{E} \setminus \mathbf{E'}$:

- Pelo Fato 3, existe um único ciclo $C$ em $T + \mathbf{e}$ que contém **e**.
- Se os extremos de **e** são da mesma parte (**A** ou **B**),
- então $C$ é um ciclo ímpar, o que é uma **CONTRADIÇÃO**!

## Demonstração do teorema

Seja **e** uma aresta de $\mathbf{E} \setminus \mathbf{E'}$:

- Pelo Fato 3, existe um único ciclo $C$ em $T + \mathbf{e}$ que contém **e**.
- Se os extremos de **e** são da mesma parte (**A** ou **B**),
- então $C$ é um ciclo ímpar, o que é uma **CONTRADIÇÃO**!
- Portanto, os extremos de **e** estão em partes distintas.

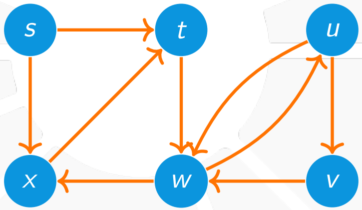
# Grafos direcionados

## Definição

Um **GRAFO DIRECIONADO** ou **DÍGRAFO** é definido de forma semelhante, com a diferença que as arestas (chamadas também de **ARCOS**) consistem de **PARES ORDENADOS** de vértices.

## Definição

Um **GRAFO DIRECIONADO** ou **DÍGRAFO** é definido de forma semelhante, com a diferença que as arestas (chamadas também de **ARCOS**) consistem de **PARES ORDENADOS** de vértices.



## Adjacência de grafos direcionados

Considere uma aresta $\mathbf{e} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ de um grafo direcionado $G$:

## Adjacência de grafos direcionados

Considere uma aresta $\mathbf{e} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ de um grafo direcionado $G$:

- Dizemos que **e** sai de **u** e entra em **v**.

## Adjacência de grafos direcionados

Considere uma aresta $\mathbf{e} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ de um grafo direcionado $G$:

- Dizemos que **e** sai de **u** e entra em **v**.
- O vértice **u** é a **CAUDA** de **e**.

## Adjacência de grafos direcionados

Considere uma aresta $\mathbf{e} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ de um grafo direcionado $G$:

- Dizemos que **e** sai de **u** e entra em **v**.
- O vértice **u** é a **CAUDA** de **e**.
- O vértice **v** é **CABEÇA** de **e**.

## Adjacência de grafos direcionados

Considere uma aresta $\mathbf{e} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ de um grafo direcionado $G$:

- Dizemos que **e** sai de **u** e entra em **v**.
- O vértice **u** é a **CAUDA** de **e**.
- O vértice **v** é **CABEÇA** de **e**.

Temos dois tipos de grau para grafos direcionados:

## Adjacência de grafos direcionados

Considere uma aresta $\mathbf{e} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ de um grafo direcionado $G$:

- Dizemos que **e** sai de **u** e entra em **v**.
- O vértice **u** é a **CAUDA** de **e**.
- O vértice **v** é **CABEÇA** de **e**.

Temos dois tipos de grau para grafos direcionados:

- **GRAU DE SAÍDA:** $d^+(\mathbf{v})$ é o número de arestas que saem de **v**.

## Adjacência de grafos direcionados

Considere uma aresta $\mathbf{e} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ de um grafo direcionado $G$:

- Dizemos que **e** sai de **u** e entra em **v**.
- O vértice **u** é a **CAUDA** de **e**.
- O vértice **v** é **CABEÇA** de **e**.

Temos dois tipos de grau para grafos direcionados:

- **GRAU DE SAÍDA:** $d^{+}(\mathbf{v})$ é o número de arestas que saem de **v**.
- **GRAU DE ENTRADA:** $d^{-}(\mathbf{v})$ é o número de arestas que entram em **v**.

## Adjacência de grafos direcionados

Considere uma aresta $\mathbf{e} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ de um grafo direcionado $G$:

- Dizemos que **e** sai de **u** e entra em **v**.
- O vértice **u** é a **CAUDA** de **e**.
- O vértice **v** é **CABEÇA** de **e**.

Temos dois tipos de grau para grafos direcionados:

- **GRAU DE SAÍDA:** $d^+(\mathbf{v})$ é o número de arestas que saem de **v**.
- **GRAU DE ENTRADA:** $d^-(\mathbf{v})$ é o número de arestas que entram em **v**.

### Teorema

*Para todo grafo direcionado* $G = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$ *temos:*

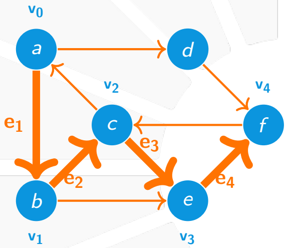
$$\sum_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} d^+(v) = \sum_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} d^-(v) = |E|.$$

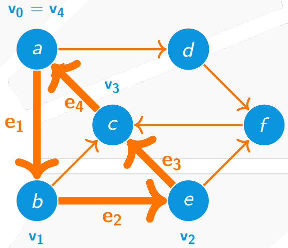
# Passeios em grafos direcionados

Em um **PASSEIO DIRECIONADO** de um grafo direcionado todas as arestas seguem o mesmo sentido.

## Passeios em grafos direcionados

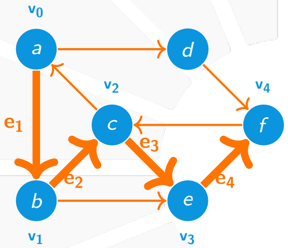
Em um **PASSEIO DIRECIONADO** de um grafo direcionado todas as arestas seguem o mesmo sentido.

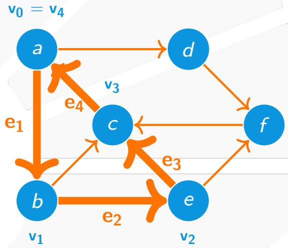


## Passeios em grafos direcionados

Em um **PASSEIO DIRECIONADO** de um grafo direcionado todas as arestas seguem o mesmo sentido.

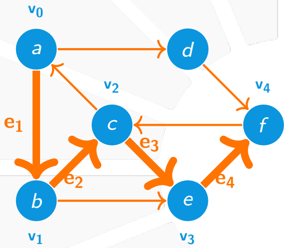


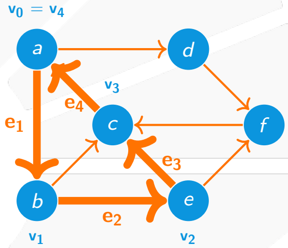




- Definimos **CAMINHOS E CICLOS DIRECIONADOS** analogamente, assim como subgrafos de um grafo direcionado.

## Passeios em grafos direcionados

Em um **PASSEIO DIRECIONADO** de um grafo direcionado todas as arestas seguem o mesmo sentido.




- Definimos **CAMINHOS E CICLOS DIRECIONADOS** analogamente, assim como subgrafos de um grafo direcionado.
- Noções de conexidade serão vistas depois.

## Refletindo sobre as definições

**Vamos fazer alguns exercícios?**

## Exercício 1

Seja $G$ um grafo direcionado e **u,v** vértices de $G$. Mostre que se existe um passeio de **u** a **v** em $G$, então existe um caminho de **u** a **v** em $G$.

## Exercício 2

Seja $G$ um grafo direcionado e **u,v,w** vértices de $G$. Mostre que se em $G$ existem um caminho de **u** a **v** e um caminho de **v** a **w** então existe um caminho de $u$ a $w$ em $G$.

## Exercício 3

É verdade que todo passeio fechado em um grafo direcionado contém um ciclo direcionado?

# Cortes em digrafos

## Cortes em grafos direcionados

Seja $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ um grafo direcionado e seja $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$.

## Cortes em grafos direcionados

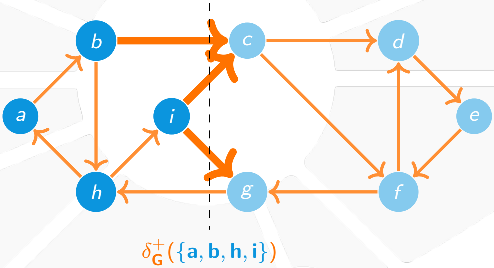
Seja $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ um grafo direcionado e seja $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$.

Denote por $\delta^{+}_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})$ o **CORTE DIRECIONADO** de $G$ induzido por $\mathbf{S}$, que contém o conjunto de arestas de $G$ com cauda em $\mathbf{S}$ e cabeça em $\mathbf{V} \setminus \mathbf{S}$.

## Cortes em grafos direcionados

Seja $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ um grafo direcionado e seja $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$.

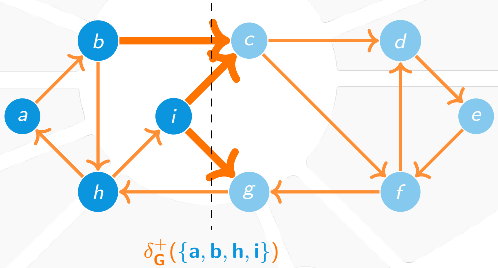
Denote por $\delta^+_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})$ o **CORTE DIRECIONADO** de $G$ induzido por $\mathbf{S}$, que contém o conjunto de arestas de $G$ com cauda em $\mathbf{S}$ e cabeça em $\mathbf{V} \setminus \mathbf{S}$.



## Cortes em grafos direcionados

Seja $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ um grafo direcionado e seja $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$.

Denote por $\delta^+_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})$ o **CORTE DIRECIONADO** de $G$ induzido por $\mathbf{S}$, que contém o conjunto de arestas de $G$ com cauda em $\mathbf{S}$ e cabeça em $\mathbf{V} \setminus \mathbf{S}$.




Se $\mathbf{s} \in \mathbf{S}$ e $\mathbf{t} \in \mathbf{V} \setminus \mathbf{S}$ dizemos que $\delta^+_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})$ **SEPARA** $\mathbf{s}$ de $\mathbf{t}$.

## Caminhos versus cortes direcionados

**Lema**

*Seja $G$ um grafo direcionado e sejam* **s,t** *vértices distintos de $G$. Então, exatamente uma das afirmações é verdadeira:*

## Caminhos versus cortes direcionados

### Lema

*Seja $G$ um grafo direcionado e sejam* **s,t** *vértices distintos de $G$. Então, exatamente uma das afirmações é verdadeira:*

(a) *Existe um caminho de* **s** *a* **t** *em $G$, ou*

## Caminhos versus cortes direcionados

**Lema**

*Seja $G$ um grafo direcionado e sejam* $\mathbf{s},\mathbf{t}$ *vértices distintos de $G$. Então, exatamente uma das afirmações é verdadeira:*

(a) *Existe um caminho de* $\mathbf{s}$ *a* $\mathbf{t}$ *em $G$, ou*

(b) *existe um corte direcionado* $\delta^+_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})$ *que separa* $\mathbf{s}$ *de* $\mathbf{t}$ *tal que* $\delta^+_{\mathbf{G}}(\mathbf{S}) = \emptyset$.

## Caminhos versus cortes direcionados

### Lema

*Seja $G$ um grafo direcionado e sejam* $\mathbf{s,t}$ *vértices distintos de $G$. Então, exatamente uma das afirmações é verdadeira:*

(a) *Existe um caminho de* $\mathbf{s}$ *a* $\mathbf{t}$ *em $G$, ou*

(b) *existe um corte direcionado* $\delta^+_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})$ *que separa* $\mathbf{s}$ *de* $\mathbf{t}$ *tal que* $\delta^+_{\mathbf{G}}(\mathbf{S}) = \emptyset$.

A demonstração é análoga à do lema para grafos não direcionados. Faça como exercício.

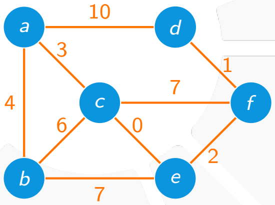
# Grafos ponderados

## Definição

Um grafo (direcionado ou não) é **PONDERADO** se a cada aresta **e** do grafo está associado um valor real **w(e)**, denominado **PESO** ou **CUSTO** da aresta.

## Definição

Um grafo (direcionado ou não) é **PONDERADO** se a cada aresta **e** do grafo está associado um valor real **w(e)**, denominado **PESO** ou **CUSTO** da aresta.



# Representação de grafos

## Motivação prática

Grafos podem modelar diversas estruturas reais:

## Motivação prática

Grafos podem modelar diversas estruturas reais:

1. Se computadores são representados por vértices, então as conexões entre eles correspondem a arestas.

## Motivação prática

Grafos podem modelar diversas estruturas reais:

1. Se computadores são representados por vértices, então as conexões entre eles correspondem a arestas.
2. Se as cidades forem representadas por vértices, então as estradas correspondem a arestas direcionadas.

## Motivação prática

Grafos podem modelar diversas estruturas reais:

1. Se computadores são representados por vértices, então as conexões entre eles correspondem a arestas.
2. Se as cidades forem representadas por vértices, então as estradas correspondem a arestas direcionadas.
3. etc.

## Motivação prática

Grafos podem modelar diversas estruturas reais:

1. Se computadores são representados por vértices, então as conexões entre eles correspondem a arestas.
2. Se as cidades forem representadas por vértices, então as estradas correspondem a arestas direcionadas.
3. etc.

Queremos construir algoritmos genéricos:

## Motivação prática

Grafos podem modelar diversas estruturas reais:

1. Se computadores são representados por vértices, então as conexões entre eles correspondem a arestas.
2. Se as cidades forem representadas por vértices, então as estradas correspondem a arestas direcionadas.
3. etc.

Queremos construir algoritmos genéricos:

- Vamos estudar algoritmos para grafos de modo **ABSTRATO**,

## Motivação prática

Grafos podem modelar diversas estruturas reais:

1. Se computadores são representados por vértices, então as conexões entre eles correspondem a arestas.
2. Se as cidades forem representadas por vértices, então as estradas correspondem a arestas direcionadas.
3. etc.

Queremos construir algoritmos genéricos:

- Vamos estudar algoritmos para grafos de modo **ABSTRATO**,
- mas que sejam aplicados em problemas **CONCRETOS**.

## Problemas

**Problema do caminho mínimo.** Dadas as cidades, as distâncias entre elas e duas cidades $A$ e $B$, determinar um **TRAJETO MAIS CURTO** de $A$ até $B$.

## Problemas

**Problema do caminho mínimo.** Dadas as cidades, as distâncias entre elas e duas cidades $A$ e $B$, determinar um **TRAJETO MAIS CURTO** de $A$ até $B$.

**Problema da árvore geradora mínima.** Dados os computadores e o custo de conectar cada par de computadores, projetar uma rede de **MENOR CUSTO** possível interconectando todos os computadores.

## Problemas

**Problema do caminho mínimo.** Dadas as cidades, as distâncias entre elas e duas cidades $A$ e $B$, determinar um **TRAJETO MAIS CURTO** de $A$ até $B$.

**Problema da árvore geradora mínima.** Dados os computadores e o custo de conectar cada par de computadores, projetar uma rede de **MENOR CUSTO** possível interconectando todos os computadores.

**Problema do emparelhamento máximo.** Dadas vagas de empregos e uma lista de candidatos para cada vaga, determinar uma lista de associações candidato-emprego de **MAIOR TAMANHO** possível.

## Problemas

**Problema do caixeiro viajante.** Dadas cidades e as distâncias entre elas, encontrar um rota de **COMPRIMENTO MÍNIMO** que visita todas as cidades.

## Problemas

**Problema do caixeiro viajante.** Dadas cidades e as distâncias entre elas, encontrar um rota de **COMPRIMENTO MÍNIMO** que visita todas as cidades.

**Problema do carteiro chinês.** Dadas as ruas de um bairro, encontrar uma rota fechada de **COMPRIMENTO MÍNIMO** que passa por todas as ruas.

# Representação interna de grafos

Representamos grafos de duas maneiras principais:

## Representação interna de grafos

Representamos grafos de duas maneiras principais:

1. **MATRIZ DE ADJACÊNCIA**.

## Representação interna de grafos

Representamos grafos de duas maneiras principais:

1. **MATRIZ DE ADJACÊNCIA**.
2. **LISTAS DE ADJACÊNCIA**.

## Representação interna de grafos

Representamos grafos de duas maneiras principais:

1. **MATRIZ DE ADJACÊNCIA**.
2. **LISTAS DE ADJACÊNCIA**.

Qual estrutura de dados escolher?

## Representação interna de grafos

Representamos grafos de duas maneiras principais:

1. **MATRIZ DE ADJACÊNCIA**.
2. **LISTAS DE ADJACÊNCIA**.

Qual estrutura de dados escolher?

- Depende do problema sendo tratado e das operações realizadas pelo algoritmo.

## Representação interna de grafos

Representamos grafos de duas maneiras principais:

1. **MATRIZ DE ADJACÊNCIA**.
2. **LISTAS DE ADJACÊNCIA**.

Qual estrutura de dados escolher?

- Depende do problema sendo tratado e das operações realizadas pelo algoritmo.
- A estrutura escolhida afeta a **COMPLEXIDADE DO ALGORITMO**.

## Matriz de adjacência

A **MATRIZ DE ADJACÊNCIA** de um grafo simples $G$ é uma matriz quadrada $A$ de ordem $|\mathbf{V}|$ tal que:

## Matriz de adjacência

A **MATRIZ DE ADJACÊNCIA** de um grafo simples $G$ é uma matriz quadrada $A$ de ordem $|\mathbf{V}|$ tal que:

$$A[\mathbf{i,j}] = \begin{cases} 1 & \text{se } (\mathbf{i,j}) \in \mathbf{E}, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

## Matriz de adjacência

A **MATRIZ DE ADJACÊNCIA** de um grafo simples $G$ é uma matriz quadrada $A$ de ordem $|\mathbf{V}|$ tal que:

$$A[\mathbf{i,j}] = \begin{cases} 1 & \text{se } (\mathbf{i,j}) \in \mathbf{E}, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- O grafo pode ser direcionado ou não.

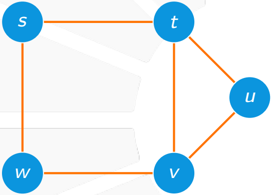
## Matriz de adjacência

A **MATRIZ DE ADJACÊNCIA** de um grafo simples $G$ é uma matriz quadrada $A$ de ordem $|\mathbf{V}|$ tal que:

$$A[\mathbf{i,j}] = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{(i,j)} \in \mathbf{E}, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

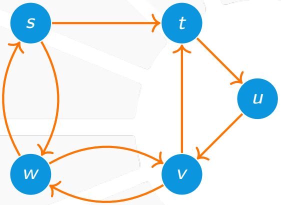
- O grafo pode ser direcionado ou não.
- Se $G$ for não direcionado, então a matriz $A$ é simétrica.

# Matriz de adjacência




| | s | t | u | v | w |
|---|---|---|---|---|---|
| s | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| t | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| u | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| v | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| w | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |

## Matriz de adjacência




$$
\begin{array}{c|ccccc|}
 & s & t & u & v & w \\
\hline
s & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
t & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
u & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
v & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
w & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

## Listas de adjacência

Para representar um grafo $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ por **LISTAS DE ADJACÊNCIAS**:

## Listas de adjacência

Para representar um grafo $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ por **LISTAS DE ADJACÊNCIAS**:

- Criamos uma lista ligada Adj[**v**] para cada vértice **v**.

## Listas de adjacência

Para representar um grafo $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ por **LISTAS DE ADJACÊNCIAS**:

- Criamos uma lista ligada Adj[**v**] para cada vértice **v**.
- Adicionamos a Adj[**v**] todos os vértices adjacentes a **v**.

## Listas de adjacência

Para representar um grafo $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ por **LISTAS DE ADJACÊNCIAS**:

- Criamos uma lista ligada Adj[**v**] para cada vértice **v**.
- Adicionamos a Adj[**v**] todos os vértices adjacentes a **v**.

Como representamos uma aresta **(u,v)**?

## Listas de adjacência

Para representar um grafo $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ por **LISTAS DE ADJACÊNCIAS**:

- Criamos uma lista ligada Adj[**v**] para cada vértice **v**.
- Adicionamos a Adj[**v**] todos os vértices adjacentes a **v**.

Como representamos uma aresta **(u,v)**?

- Se a aresta for direcionada, então **v** está em Adj[**u**].

## Listas de adjacência

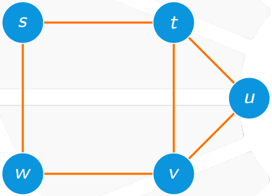
Para representar um grafo $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ por **LISTAS DE ADJACÊNCIAS**:

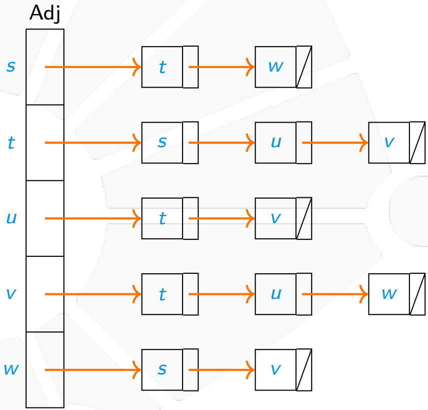
- Criamos uma lista ligada Adj[**v**] para cada vértice **v**.
- Adicionamos a Adj[**v**] todos os vértices adjacentes a **v**.

Como representamos uma aresta **(u,v)**?

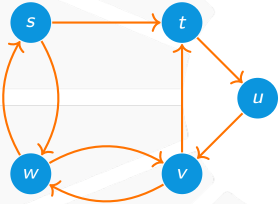
- Se a aresta for direcionada, então **v** está em Adj[**u**].
- Se a aresta for não direcionada, então **v** está em Adj[**u**] e **u** está em Adj[**v**].

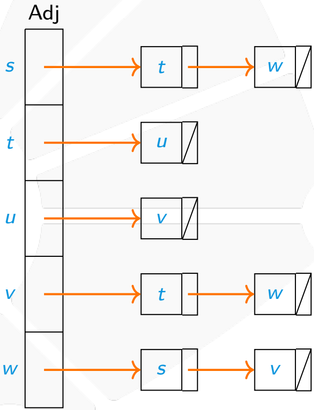
# Listas de adjacência



# Listas de adjacências



## Notação para complexidade

Considere um grafo $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$:

## Notação para complexidade

Considere um grafo $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$:

- Vamos simplificar a **NOTAÇÃO ASSINTÓTICA**.

## Notação para complexidade

Considere um grafo $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$:

- Vamos simplificar a **NOTAÇÃO ASSINTÓTICA**.
- Escrevemos $\mathbf{V}$ e $\mathbf{E}$ ao invés de $|\mathbf{V}|$ e $|\mathbf{E}|$.

## Notação para complexidade

Considere um grafo $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$:

- Vamos simplificar a **NOTAÇÃO ASSINTÓTICA**.
- Escrevemos $\mathbf{V}$ e $\mathbf{E}$ ao invés de $|\mathbf{V}|$ e $|\mathbf{E}|$.
- Por exemplo, $O(\mathbf{E}^2 \log \mathbf{V})$ ao invés de $O(|\mathbf{E}|^2 \log |\mathbf{V}|)$.

## Matriz versus listas

A melhor representação depende do algoritmo.

## Matriz versus listas

A melhor representação depende do algoritmo.

1. Matriz de adjacência:

## Matriz versus listas

A melhor representação depende do algoritmo.

1. Matriz de adjacência:
   - É fácil verificar se **(u, v)** é uma aresta de $G$.

## Matriz versus listas

A melhor representação depende do algoritmo.

1. Matriz de adjacência:
   - É fácil verificar se **(u, v)** é uma aresta de $G$.
   - O espaço utilizado é $\Theta(\mathbf{V}^2)$.

## Matriz versus listas

A melhor representação depende do algoritmo.

1. Matriz de adjacência:
   - É fácil verificar se **(u, v)** é uma aresta de $G$.
   - O espaço utilizado é $\Theta(\mathbf{V}^2)$.
   - Adequada para grafos densos (com $|\mathbf{E}| = \Theta(\mathbf{V}^2)$).

## Matriz versus listas

A melhor representação depende do algoritmo.

1. Matriz de adjacência:
   - É fácil verificar se **(u, v)** é uma aresta de $G$.
   - O espaço utilizado é $\Theta(\mathbf{V}^2)$.
   - Adequada para grafos densos (com $|\mathbf{E}| = \Theta(\mathbf{V}^2)$).
2. Listas de adjacência:

## Matriz versus listas

A melhor representação depende do algoritmo.

1. Matriz de adjacência:
   - É fácil verificar se **(u, v)** é uma aresta de $G$.
   - O espaço utilizado é $\Theta(\mathbf{V}^2)$.
   - Adequada para grafos densos (com $|\mathbf{E}| = \Theta(\mathbf{V}^2)$).
2. Listas de adjacência:
   - É fácil listar os vértices adjacentes de um dado vértice **v**.

## Matriz versus listas

A melhor representação depende do algoritmo.

1. Matriz de adjacência:
   - É fácil verificar se **(u, v)** é uma aresta de $G$.
   - O espaço utilizado é $\Theta(\mathbf{V}^2)$.
   - Adequada para grafos densos (com $|\mathbf{E}| = \Theta(\mathbf{V}^2)$).
2. Listas de adjacência:
   - É fácil listar os vértices adjacentes de um dado vértice **v**.
   - O espaço utilizado é $\Theta(\mathbf{V} + \mathbf{E})$.

## Matriz versus listas

A melhor representação depende do algoritmo.

1. Matriz de adjacência:
   - É fácil verificar se **(u, v)** é uma aresta de $G$.
   - O espaço utilizado é $\Theta(\mathbf{V}^2)$.
   - Adequada para grafos densos (com $|\mathbf{E}| = \Theta(\mathbf{V}^2)$).
2. Listas de adjacência:
   - É fácil listar os vértices adjacentes de um dado vértice **v**.
   - O espaço utilizado é $\Theta(\mathbf{V} + \mathbf{E})$.
   - Adequada a grafos esparsos (com $|\mathbf{E}| = \Theta(\mathbf{V})$).

## Extensões

- Há alternativas para representar grafos, mas matrizes e listas de adjacência são as mais usadas.

## Extensões

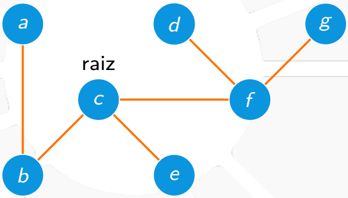
- Há alternativas para representar grafos, mas matrizes e listas de adjacência são as mais usadas.
- Essas representações podem ser usadas para grafos ponderados, grafos com laços e arestas múltiplas, grafos com pesos nos vértices etc.

## Extensões

- Há alternativas para representar grafos, mas matrizes e listas de adjacência são as mais usadas.
- Essas representações podem ser usadas para grafos ponderados, grafos com laços e arestas múltiplas, grafos com pesos nos vértices etc.
- Para determinados algoritmos é importante manter **ESTRUTURAS DE DADOS ADICIONAIS**.

## Representação de árvores

Uma **ÁRVORE ENRAIZADA** é uma árvore com um vértice especial chamado **RAIZ**.



## Representação de árvores

Uma **ÁRVORE DIRECIONADA** com raiz **r** é um grafo direcionado acíclico $T = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ tal que:

## Representação de árvores

Uma **ÁRVORE DIRECIONADA** com raiz **r** é um grafo direcionado acíclico $T = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ tal que:

1. $d^{-}(\mathbf{r}) = 0$,

## Representação de árvores

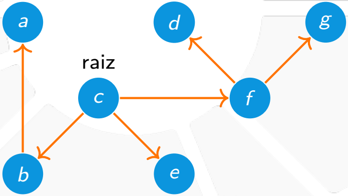
Uma **ÁRVORE DIRECIONADA** com raiz $\mathbf{r}$ é um grafo direcionado acíclico $T = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ tal que:

1. $d^-(\mathbf{r}) = 0$,
2. $d^-(\mathbf{v}) = 1$ para $\mathbf{v} \in \mathbf{V} \setminus \{\mathbf{r}\}$.

## Representação de árvores

Uma **ÁRVORE DIRECIONADA** com raiz $\mathbf{r}$ é um grafo direcionado acíclico $T = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ tal que:

1. $d^-(\mathbf{r}) = 0$,
2. $d^-(\mathbf{v}) = 1$ para $\mathbf{v} \in \mathbf{V} \setminus \{\mathbf{r}\}$.



## Representação de árvores

Representar uma árvore enraizada com um vetor $\pi$ de **PREDECESSORES**.

| vértice | a | b | c | d | e | f | g |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\pi$ | b | c | $N$ | f | c | c | f |

## Representação de árvores

Representar uma árvore enraizada com um vetor $\pi$ de **PREDECESSORES**.

| vértice | a | b | c | d | e | f | g |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\pi$ | b | c | $N$ | f | c | c | f |

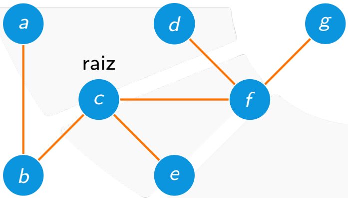
O símbolo $N$ indica a ausência de predecessor.

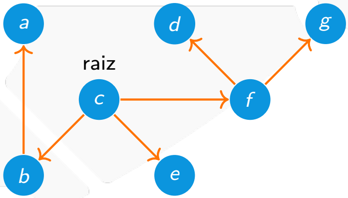
# Representação de árvores

Representar uma árvore enraizada com um vetor $\pi$ de **PREDECESSORES**.

| vértice | **a** | **b** | **c** | **d** | **e** | **f** | **g** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\pi$ | **b** | **c** | $N$ | **f** | **c** | **c** | **f** |

O símbolo $N$ indica a ausência de predecessor.



## Alguns detalhes de implementação

- Nos algoritmos que veremos, usamos a representação de um grafo (direcionado ou não) por listas de adjacências.

## Alguns detalhes de implementação

- Nos algoritmos que veremos, usamos a representação de um grafo (direcionado ou não) por listas de adjacências.

- Em uma implementação real de um algoritmo, provavelmente a representação **NÃO** é dada a priori.

## Alguns detalhes de implementação

- Nos algoritmos que veremos, usamos a representação de um grafo (direcionado ou não) por listas de adjacências.
- Em uma implementação real de um algoritmo, provavelmente a representação **NÃO** é dada a priori.
- Assim, é necessário construir tal representação a partir da dos dados de entrada.

## Alguns detalhes de implementação

- Nos algoritmos que veremos, usamos a representação de um grafo (direcionado ou não) por listas de adjacências.

- Em uma implementação real de um algoritmo, provavelmente a representação **NÃO** é dada a priori.

- Assim, é necessário construir tal representação a partir da dos dados de entrada.

- Como construir a representação de um grafo depende do formato da entrada.

## Exemplo de entrada

Suponha que a entrada é um arquivo texto:

## Exemplo de entrada

Suponha que a entrada é um arquivo texto:

```
5 7
0 1
0 2
1 2
1 3
2 3
2 4
3 4
```

## Exemplo de entrada

Suponha que a entrada é um arquivo texto:

```
5 7
0 1
0 2
1 2
1 3
2 3
2 4
3 4
```

- O arquivo representa um grafo não direcionado.

## Exemplo de entrada

Suponha que a entrada é um arquivo texto:

```
5 7
0 1
0 2
1 2
1 3
2 3
2 4
3 4
```

- O arquivo representa um grafo não direcionado.
- A primeira linha contém $|\mathbf{V}|$ e $|\mathbf{E}|$.

## Exemplo de entrada

Suponha que a entrada é um arquivo texto:

```
5 7
0 1
0 2
1 2
1 3
2 3
2 4
3 4
```

- O arquivo representa um grafo não direcionado.
- A primeira linha contém $|\mathbf{V}|$ e $|\mathbf{E}|$.
- Os vértices são numerados de 0 a $|\mathbf{V}| - 1$.

## Exemplo de entrada

Suponha que a entrada é um arquivo texto:

```
5 7
0 1
0 2
1 2
1 3
2 3
2 4
3 4
```

- O arquivo representa um grafo não direcionado.
- A primeira linha contém $|\mathbf{V}|$ e $|\mathbf{E}|$.
- Os vértices são numerados de 0 a $|\mathbf{V}| - 1$.
- As próximas $|\mathbf{E}|$ linhas representam os extremos das arestas.

## Exemplo de construção

**Algoritmo 1:** CONSTRUIR-ADJ()

leia $n$ e $m$
**repita** *m vezes*
    leia a próxima aresta $(u, v)$
    insira $v$ na lista Adj$[u]$
    insira $u$ na lista Adj$[v]$
**devolva** Adj

## Calculando o quadrado

O **QUADRADO** de um grafo direcionado $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ é o grafo direcionado $G^2 = (\mathbf{V}, \mathbf{E}^2)$ tal que:

## Calculando o quadrado

O **QUADRADO** de um grafo direcionado $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ é o grafo direcionado $G^2 = (\mathbf{V}, \mathbf{E^2})$ tal que:

- **(u,v)** $\in$ $\mathbf{E^2}$ se e somente se existe um caminho de comprimento no máximo dois de **u** a **v** em $G$.

## Calculando o quadrado

O **QUADRADO** de um grafo direcionado $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ é o grafo direcionado $G^2 = (\mathbf{V}, \mathbf{E^2})$ tal que:

- **(u,v)** $\in$ $\mathbf{E^2}$ se e somente se existe um caminho de comprimento no máximo dois de **u** a **v** em $G$.

Dado $G$, vamos calcular $G^2$:

## Calculando o quadrado

O **QUADRADO** de um grafo direcionado $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ é o grafo direcionado $G^2 = (\mathbf{V}, \mathbf{E^2})$ tal que:

- **(u,v)** $\in$ $\mathbf{E^2}$ se e somente se existe um caminho de comprimento no máximo dois de **u** a **v** em $G$.

Dado $G$, vamos calcular $G^2$:

1. Utilizando matriz de adjacência.

## Calculando o quadrado

O **QUADRADO** de um grafo direcionado $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ é o grafo direcionado $G^2 = (\mathbf{V}, \mathbf{E^2})$ tal que:

- **(u,v)** $\in$ $\mathbf{E^2}$ se e somente se existe um caminho de comprimento no máximo dois de **u** a **v** em $G$.

Dado $G$, vamos calcular $G^2$:

1. Utilizando matriz de adjacência.
2. Utilizando listas de adjacência.

## Quadrado com matriz de adjacência

**Algoritmo 2:** $\textsc{Quadrado}(M)$

$N \leftarrow M$
**para cada** $u \in V$
  **para cada** $v \in V$
    **para cada** $w \in V$
      **se** $N[u,v] = 0$
        $N[u,v] \leftarrow M[u,w] \cdot M[w,v]$
**devolva** $N$

Complexidade: $\Theta(V^3)$.

## Quadrado com listas de adjacências

**Algoritmo 3:** QUADRADO(Adj)

crie uma cópia Adj′ de Adj
**para cada** $v \in V$
    **para cada** $u \in$ Adj[$v$]
        concatene uma cópia de Adj[$u$] a Adj′[$v$]
**para cada** $v \in V$
    ordene Adj′[$v$] usando COUNTING-SORT
    elimine as repetições de Adj′[$v$] em tempo linear
**devolva** Adj′

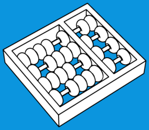
Complexidade: $\Theta(VE)$.

# Conceitos sobre grafos II

MC558 - Projeto e Análise de Algoritmos II

01/24

2



Santiago Valdés Ravelo
https://ic.unicamp.br/~santiago/
ravelo@unicamp.br

UNICAMP