

# CONCEITOS SOBRE GRAFOS

MC558 - Projeto e Análise de  
Algoritmos II

Santiago Valdés Ravelo  
[https://ic.unicamp.br/~santiago/  
ravelo@unicamp.br](https://ic.unicamp.br/~santiago/ravelo@unicamp.br)

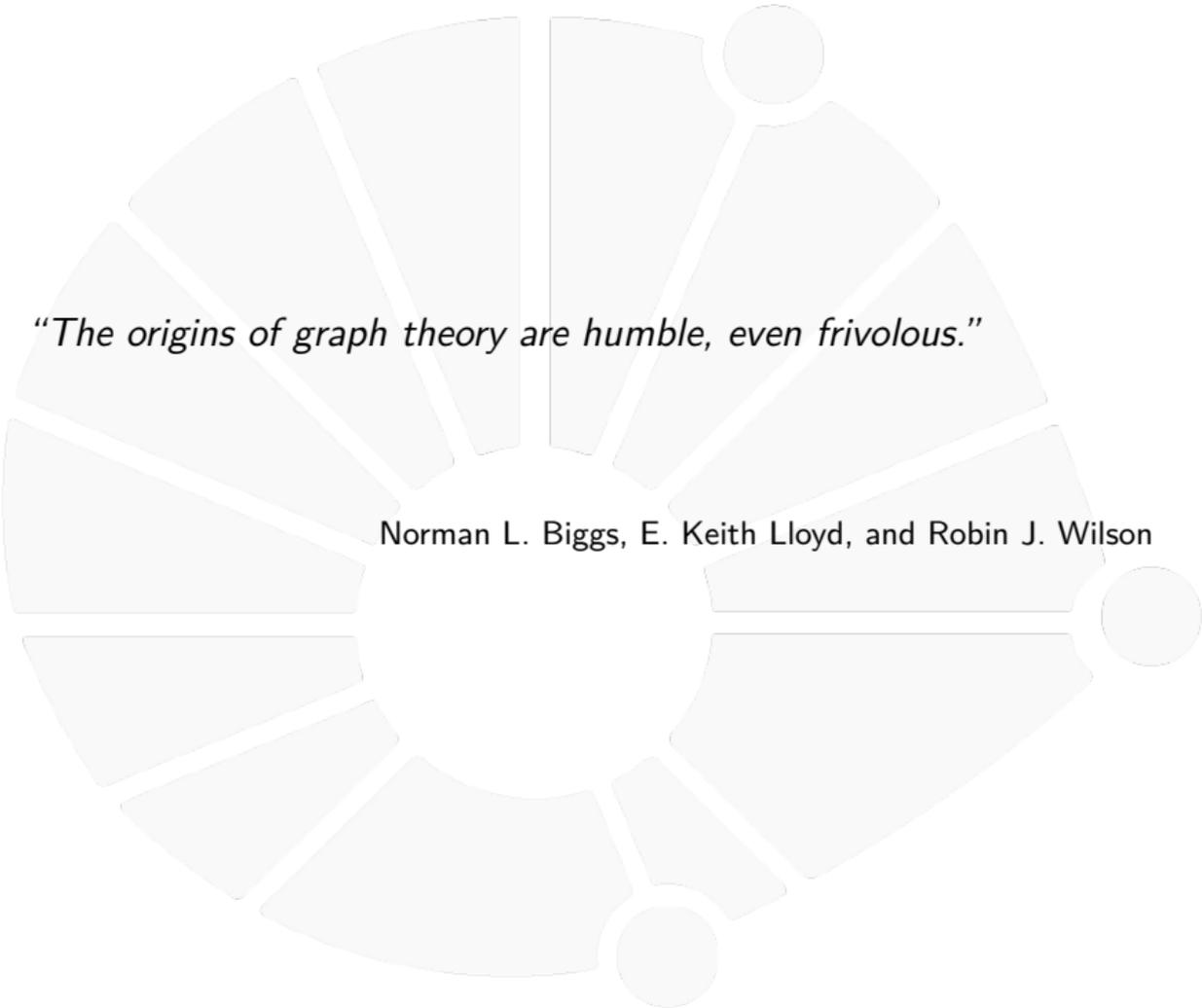
01/24

1



UNICAMP



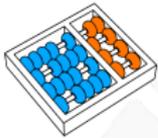


*"The origins of graph theory are humble, even frivolous."*

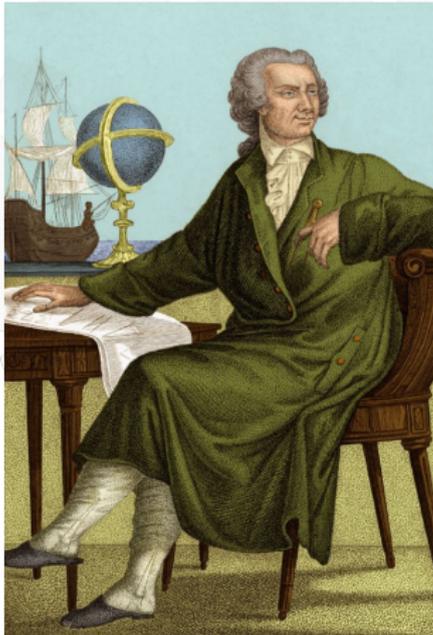
Norman L. Biggs, E. Keith Lloyd, and Robin J. Wilson



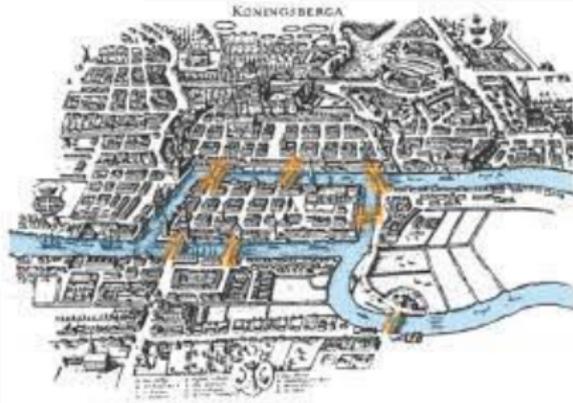
# INTRODUÇÃO



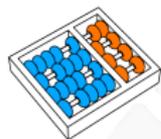
## Origem



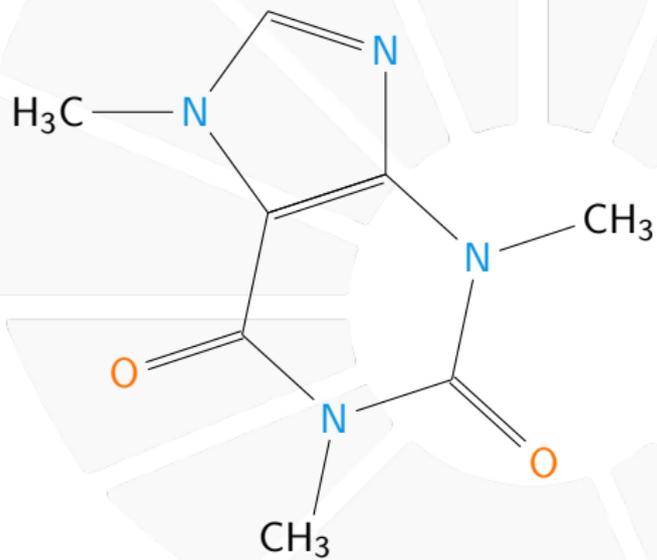
- ▶ Leonhard P. Euler
- ▶ 1735
- ▶ 7 Pontes de Königsberg

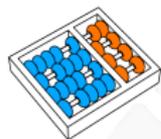




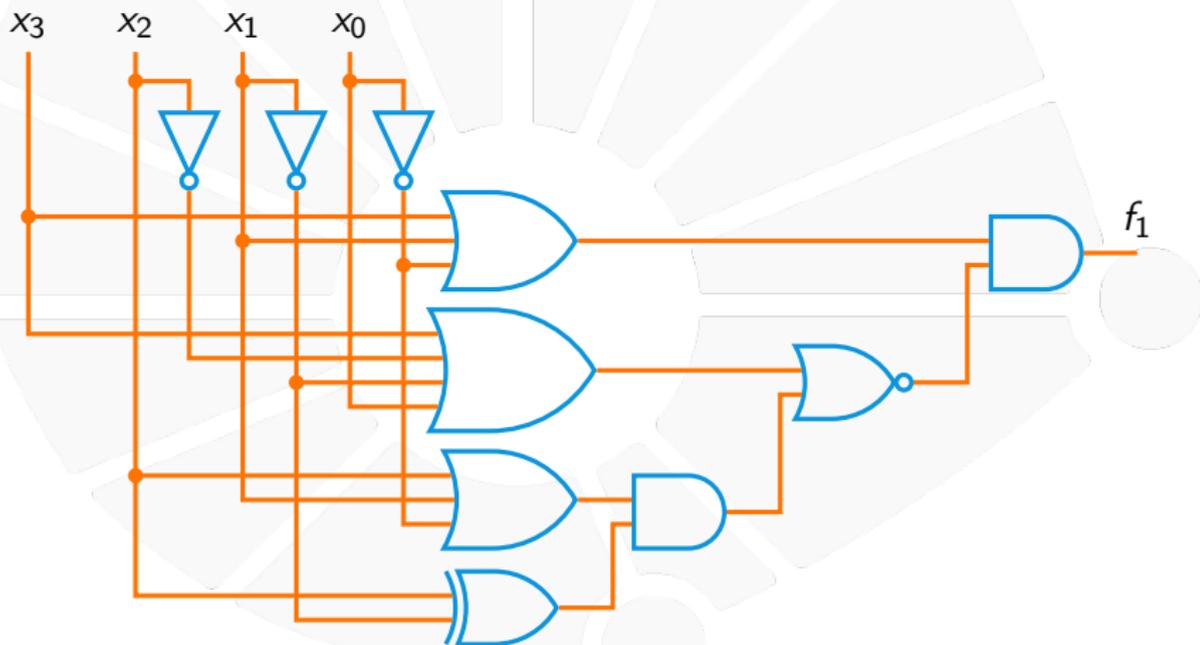


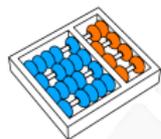
## Aplicações





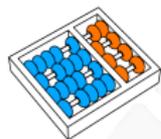
## Aplicações



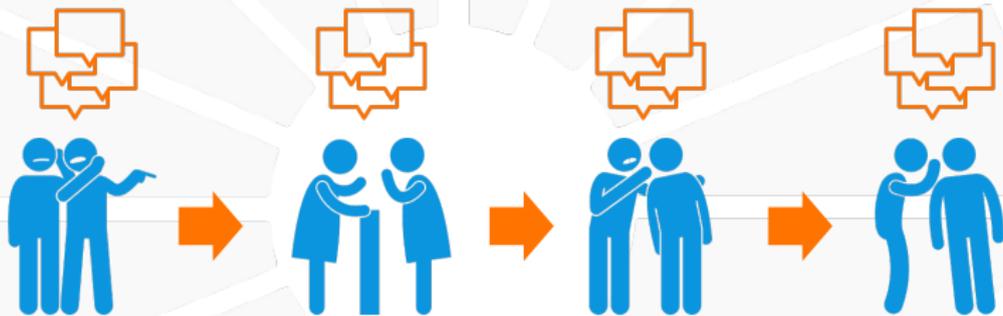


## Aplicações



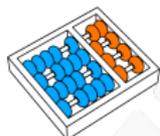


## Aplicações





# CONCEITOS BÁSICOS



## Definição de grafo

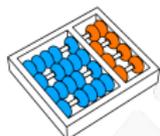
Um **GRAFO** é um par  $G = (V, E)$  onde:



## Definição de grafo

Um **GRAFO** é um par  $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$  onde:

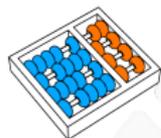
- ▶  $\mathbf{V}$  é um conjunto finito de elementos chamados **VÉRTICES** e



## Definição de grafo

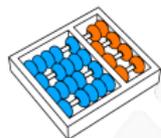
Um **GRAFO** é um par  $G = (V, E)$  onde:

- ▶ **V** é um conjunto finito de elementos chamados **VÉRTICES** e
- ▶ **E** é um conjunto finito de pares **NÃO ORDENADOS** de vértices chamados **ARESTAS**.



## Exemplo de grafo

►  $V = \{a, b, c, d, e\}$



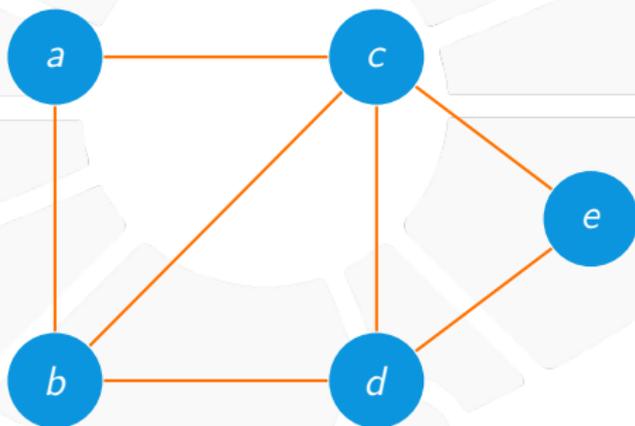
## Exemplo de grafo

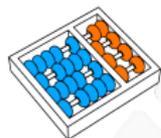
- ▶  $V = \{a, b, c, d, e\}$
- ▶  $E = \{(a, b), (a, c), (b, c), (b, d), (c, d), (c, e), (d, e)\}$



## Exemplo de grafo

- ▶  $V = \{a, b, c, d, e\}$
- ▶  $E = \{(a, b), (a, c), (b, c), (b, d), (c, d), (c, e), (d, e)\}$





## Adjacência e incidência

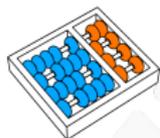
Considere uma aresta  $e=(a, b)$ :



## Adjacência e incidência

Considere uma aresta  $e=(a, b)$ :

- ▶ Para pares não ordenados, temos  $(a,b) = (b,a)$ .



## Adjacência e incidência

Considere uma aresta  $e=(a, b)$ :

- ▶ Para pares não ordenados, temos  $(a,b) = (b,a)$ .
- ▶ Desenhamos a aresta como uma linha ligando os vértices:

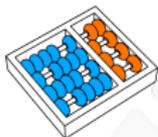


## Adjacência e incidência

Considere uma aresta  $e=(a, b)$ :

- ▶ Para pares não ordenados, temos  $(a,b) = (b,a)$ .
- ▶ Desenhamos a aresta como uma linha ligando os vértices:





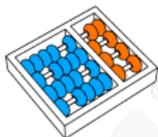
## Adjacência e incidência

Considere uma aresta  $e=(a, b)$ :

- ▶ Para pares não ordenados, temos  $(a,b) = (b,a)$ .
- ▶ Desenhamos a aresta como uma linha ligando os vértices:



- ▶ Dizemos que os vértices  $a$  e  $b$  são os **EXTREMOS** de  $e$ ,



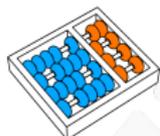
## Adjacência e incidência

Considere uma aresta  $e=(a, b)$ :

- ▶ Para pares não ordenados, temos  $(a,b) = (b,a)$ .
- ▶ Desenhamos a aresta como uma linha ligando os vértices:



- ▶ Dizemos que os vértices  $a$  e  $b$  são os **EXTREMOS** de  $e$ ,
- ▶ também que  $a$  e  $b$  são vértices **ADJACENTES**.



## Adjacência e incidência

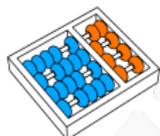
Considere uma aresta  $e=(a, b)$ :

- ▶ Para pares não ordenados, temos  $(a,b) = (b,a)$ .
- ▶ Desenhamos a aresta como uma linha ligando os vértices:



- ▶ Dizemos que os vértices  $a$  e  $b$  são os **EXTREMOS** de  $e$ ,
- ▶ também que  $a$  e  $b$  são vértices **ADJACENTES**.

Para enfatizar a relação entre arestas e vértices:



## Adjacência e incidência

Considere uma aresta  $e=(a, b)$ :

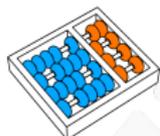
- ▶ Para pares não ordenados, temos  $(a,b) = (b,a)$ .
- ▶ Desenhamos a aresta como uma linha ligando os vértices:



- ▶ Dizemos que os vértices **a** e **b** são os **EXTREMOS** de **e**,
- ▶ também que **a** e **b** são vértices **ADJACENTES**.

Para enfatizar a relação entre arestas e vértices:

- ▶ Dizemos que a aresta **e** é **INCIDENTE** nos vértices **a** e **b**,



## Adjacência e incidência

Considere uma aresta  $e=(a, b)$ :

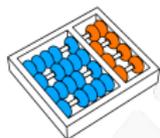
- ▶ Para pares não ordenados, temos  $(a,b) = (b,a)$ .
- ▶ Desenhamos a aresta como uma linha ligando os vértices:



- ▶ Dizemos que os vértices  $a$  e  $b$  são os **EXTREMOS** de  $e$ ,
- ▶ também que  $a$  e  $b$  são vértices **ADJACENTES**.

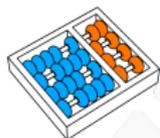
Para enfatizar a relação entre arestas e vértices:

- ▶ Dizemos que a aresta  $e$  é **INCIDENTE** nos vértices  $a$  e  $b$ ,
- ▶ também que os vértices  $a$  e  $b$  são incidentes na aresta  $e$ .



## Multigrafo

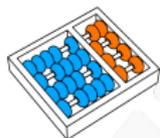
Grafos são generalizados por **MULTIGRAFOS**, que podem conter:



## Multigrafo

Grafos são generalizados por **MULTIGRAFOS**, que podem conter:

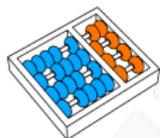
- ▶ **LAÇOS**: arestas com os dois extremos idênticos.



## Multigrafo

Grafos são generalizados por **MULTIGRAFOS**, que podem conter:

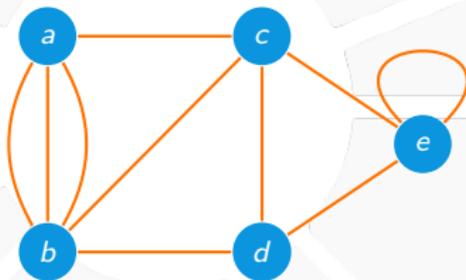
- ▶ **LAÇOS**: arestas com os dois extremos idênticos.
- ▶ **ARESTAS MÚTIPLAS**: duas ou mais arestas com o mesmo par de extremos.

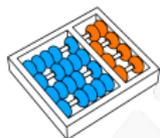


## Multigrafo

Grafos são generalizados por **MULTIGRAFOS**, que podem conter:

- ▶ **LAÇOS**: arestas com os dois extremos idênticos.
- ▶ **ARESTAS MÚLTIPLAS**: duas ou mais arestas com o mesmo par de extremos.

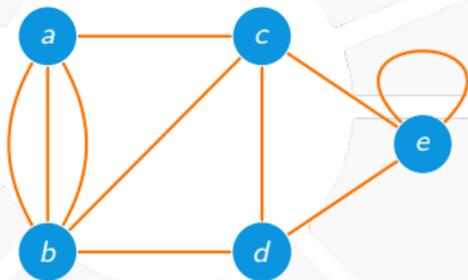




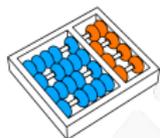
## Multigrafo

Grafos são generalizados por **MULTIGRAFOS**, que podem conter:

- ▶ **LAÇOS**: arestas com os dois extremos idênticos.
- ▶ **ARESTAS MÚTIPLAS**: duas ou mais arestas com o mesmo par de extremos.

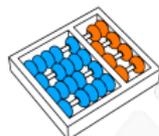


Um grafo é **SIMPLES** se ele não tiver laços ou arestas múltiplas.



## Tamanho do grafo

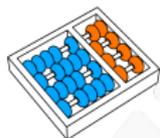
Considere um grafo  $G = (V, E)$ :



## Tamanho do grafo

Considere um grafo  $G = (V, E)$ :

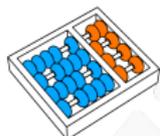
- ▶ Denotamos por  $|V|$  a cardinalidade do conjunto de vértices



## Tamanho do grafo

Considere um grafo  $G = (V, E)$ :

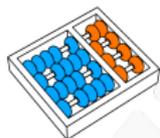
- ▶ Denotamos por  $|V|$  a cardinalidade do conjunto de vértices
- ▶ e por  $|E|$  a cardinalidade do conjunto de arestas.



## Tamanho do grafo

Considere um grafo  $G = (V, E)$ :

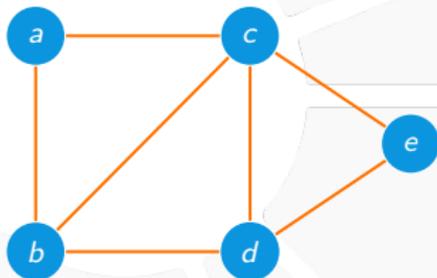
- ▶ Denotamos por  $|V|$  a cardinalidade do conjunto de vértices
- ▶ e por  $|E|$  a cardinalidade do conjunto de arestas.
- ▶ No exemplo abaixo temos  $|V|=5$  e  $|E|=7$ :

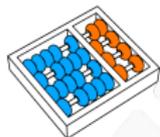


## Tamanho do grafo

Considere um grafo  $G = (V, E)$ :

- ▶ Denotamos por  $|V|$  a cardinalidade do conjunto de vértices
- ▶ e por  $|E|$  a cardinalidade do conjunto de arestas.
- ▶ No exemplo abaixo temos  $|V|=5$  e  $|E|=7$ :

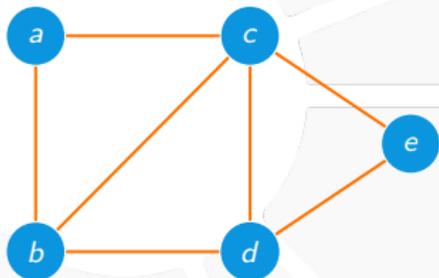




## Tamanho do grafo

Considere um grafo  $G = (V, E)$ :

- ▶ Denotamos por  $|V|$  a cardinalidade do conjunto de vértices
- ▶ e por  $|E|$  a cardinalidade do conjunto de arestas.
- ▶ No exemplo abaixo temos  $|V|=5$  e  $|E|=7$ :

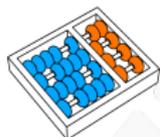


O **TAMANHO** do grafo  $G$  é dado por  $|V| + |E|$ .



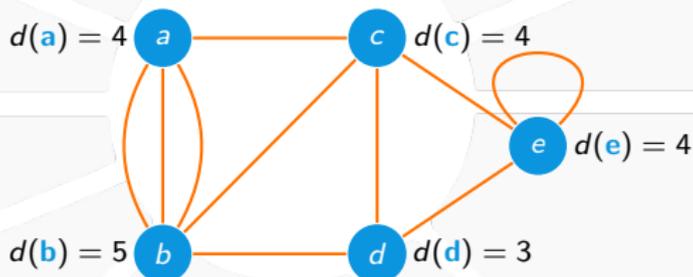
## Grau de um vértice

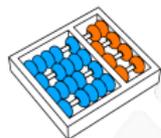
O **GRAU** de um vértice  $v$ , denotado por  $d(v)$  é o número de arestas incidentes a  $v$ , com laços contados duas vezes.



## Grau de um vértice

O **GRAU** de um vértice  $v$ , denotado por  $d(v)$  é o número de arestas incidentes a  $v$ , com laços contados duas vezes.





## Alguns nomes

Considere um vértice  $v$  de um grafo  $G = (V, E)$ :

- ▶ Se  $d(v) = |V| - 1$ , dizemos que  $v$  é um **VÉRTICE UNIVERSAL**.
- ▶ Se  $d(v) = 0$ , dizemos que  $v$  é um **VÉRTICE ISOLADO**.

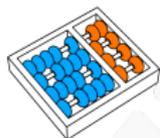


## Relação entre grau dos vértices e número de arestas

## Teorema (Handshaking lemma)

Para todo grafo  $G = (V, E)$ ,

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$



## Grafos completos

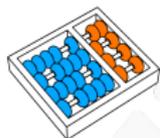
Um grafo é **COMPLETO** se tiver uma aresta  $(u,v)$  para todo par de vértices  $u,v$ :



## Grafos completos

Um grafo é **COMPLETO** se tiver uma aresta  $(u,v)$  para todo par de vértices  $u,v$ :

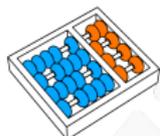
- ▶ Se o número de vértices é  $n$ , então ele tem  $\binom{n}{2}$  arestas.



## Grafos completos

Um grafo é **COMPLETO** se tiver uma aresta  $(u,v)$  para todo par de vértices  $u,v$ :

- ▶ Se o número de vértices é  $n$ , então ele tem  $\binom{n}{2}$  arestas.
- ▶ Portanto, um grafo simples tem **NO MÁXIMO**  $\binom{n}{2}$  arestas.

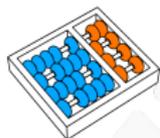


## Grafos completos

Um grafo é **COMPLETO** se tiver uma aresta  $(u,v)$  para todo par de vértices  $u,v$ :

- ▶ Se o número de vértices é  $n$ , então ele tem  $\binom{n}{2}$  arestas.
- ▶ Portanto, um grafo simples tem **NO MÁXIMO**  $\binom{n}{2}$  arestas.

Exemplos de grafos completos:

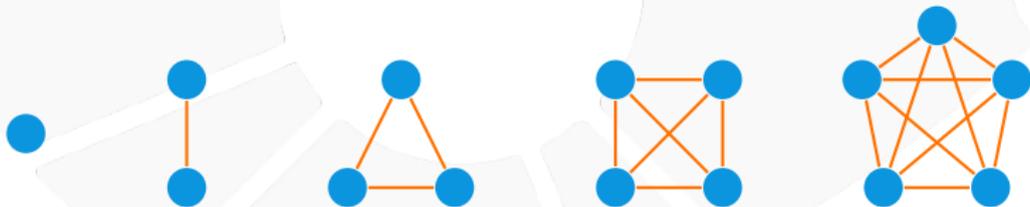


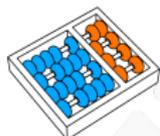
## Grafos completos

Um grafo é **COMPLETO** se tiver uma aresta  $(u,v)$  para todo par de vértices  $u,v$ :

- ▶ Se o número de vértices é  $n$ , então ele tem  $\binom{n}{2}$  arestas.
- ▶ Portanto, um grafo simples tem **NO MÁXIMO**  $\binom{n}{2}$  arestas.

Exemplos de grafos completos:



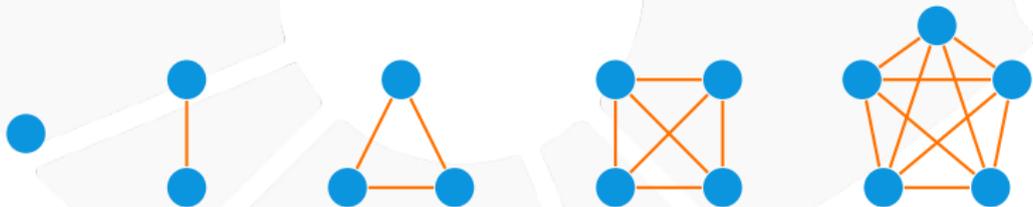


## Grafos completos

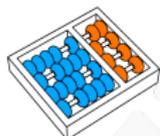
Um grafo é **COMPLETO** se tiver uma aresta  $(u,v)$  para todo par de vértices  $u,v$ :

- ▶ Se o número de vértices é  $n$ , então ele tem  $\binom{n}{2}$  arestas.
- ▶ Portanto, um grafo simples tem **NO MÁXIMO**  $\binom{n}{2}$  arestas.

Exemplos de grafos completos:



Um grafo completo com três vértices é chamado de **TRIÂNGULO**.



## Grafo complementar

O **COMPLEMENTO** de um grafo  $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$  é o grafo  $\overline{G} = (\mathbf{V}, \overline{\mathbf{E}})$ :



## Grafo complementar

O **COMPLEMENTO** de um grafo  $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$  é o grafo  $\overline{G} = (\mathbf{V}, \overline{\mathbf{E}})$ :

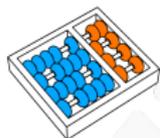
- ▶ Com o mesmo conjunto de vértices,  $\mathbf{V}$



## Grafo complementar

O **COMPLEMENTO** de um grafo  $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$  é o grafo  $\overline{G} = (\mathbf{V}, \overline{\mathbf{E}})$ :

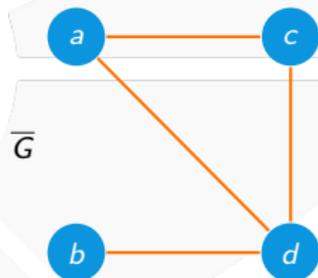
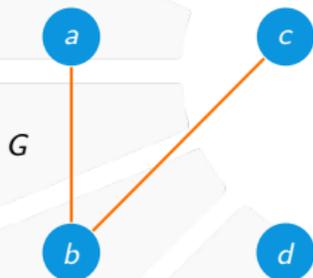
- ▶ Com o mesmo conjunto de vértices,  $\mathbf{V}$
- ▶ e com  $(u,v) \in \overline{\mathbf{E}}$  se e somente se  $(u,v) \notin \mathbf{E}$ .



## Grafo complementar

O **COMPLEMENTO** de um grafo  $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$  é o grafo  $\overline{G} = (\mathbf{V}, \overline{\mathbf{E}})$ :

- ▶ Com o mesmo conjunto de vértices,  $\mathbf{V}$
- ▶ e com  $(u,v) \in \overline{\mathbf{E}}$  se e somente se  $(u,v) \notin \mathbf{E}$ .

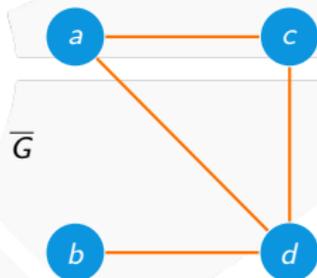
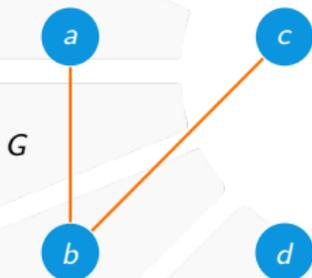




## Grafo complementar

O **COMPLEMENTO** de um grafo  $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$  é o grafo  $\overline{G} = (\mathbf{V}, \overline{\mathbf{E}})$ :

- ▶ Com o mesmo conjunto de vértices,  $\mathbf{V}$
- ▶ e com  $(u,v) \in \overline{\mathbf{E}}$  se e somente se  $(u,v) \notin \mathbf{E}$ .



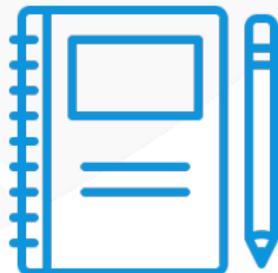
Note que, para qualquer vértice  $\mathbf{v}$ ,  $d_{\overline{G}}(\mathbf{v}) = |\mathbf{V}| - 1 - d_G(\mathbf{v})$ .



## Consequências da complementaridade



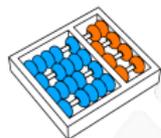
**Vamos fazer alguns exercícios?**





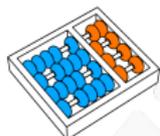
## Exercício 1

Mostre que em uma festa com pelo menos  $n \geq 6$  pessoas, existem três pessoas que se conhecem mutuamente ou três pessoas que não se conhecem mutuamente.



## Exercício 1. Solução

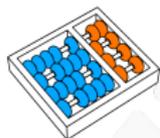
Considere o grafo  $G$  representando as amizades:



## Exercício 1. Solução

Considere o grafo  $G$  representando as amizades:

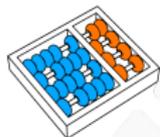
- ▶ Tome um vértice  $v$ . Note de que  $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) \geq 5$ .



## Exercício 1. Solução

Considere o grafo  $G$  representando as amizades:

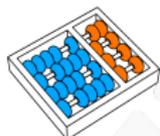
- ▶ Tome um vértice  $v$ . Note de que  $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) \geq 5$ .
- ▶ Logo,  $d_G(v) \geq 3$  ou  $d_{\overline{G}}(v) \geq 3$ .



## Exercício 1. Solução

Considere o grafo  $G$  representando as amizades:

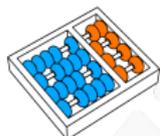
- ▶ Tome um vértice  $v$ . Note de que  $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) \geq 5$ .
- ▶ Logo,  $d_G(v) \geq 3$  ou  $d_{\overline{G}}(v) \geq 3$ .
- ▶ Suponha que  $d_G(v) \geq 3$  (o outro caso é análogo). Então,  $v$  tem três vizinhos  $a, b, c$  em  $G$ :



## Exercício 1. Solução

Considere o grafo  $G$  representando as amizades:

- ▶ Tome um vértice  $v$ . Note de que  $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) \geq 5$ .
- ▶ Logo,  $d_G(v) \geq 3$  ou  $d_{\overline{G}}(v) \geq 3$ .
- ▶ Suponha que  $d_G(v) \geq 3$  (o outro caso é análogo). Então,  $v$  tem três vizinhos  $a, b, c$  em  $G$ :
  1. Se houver aresta entre dois vizinhos, então ela forma triângulo com  $v \Rightarrow 3$  pessoas se conhecem mutuamente.



## Exercício 1. Solução

Considere o grafo  $G$  representando as amizades:

- ▶ Tome um vértice  $v$ . Note de que  $d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) \geq 5$ .
- ▶ Logo,  $d_G(v) \geq 3$  ou  $d_{\overline{G}}(v) \geq 3$ .
- ▶ Suponha que  $d_G(v) \geq 3$  (o outro caso é análogo). Então,  $v$  tem três vizinhos  $a, b, c$  em  $G$ :
  1. Se houver aresta entre dois vizinhos, então ela forma triângulo com  $v \Rightarrow 3$  pessoas se conhecem mutuamente.
  2. Caso contrário,  $a, b, c$  formam um triângulo em  $\overline{G} \Rightarrow 3$  pessoas se desconhecem mutuamente.



## Exercício 2

Suponha que em um grupo  $S$  de  $n$  pessoas, com  $n \geq 4$ , vale o seguinte: em qualquer grupo  $X \subseteq S$  de 4 pessoas, existe uma que conhece as demais pessoas de  $X$ . Mostre que existe uma pessoa em  $S$  que conhece todas as demais pessoas de  $S$ .



## Exercício 2. Solução

Considere o grafo  $G$  representando os desconhecidos amizados:



## Exercício 2. Solução

Considere o grafo  $G$  representando os desconhecidos amizade:

- ▶ Dois vértices são ligados se as pessoas não se conhecem.



## Exercício 2. Solução

Considere o grafo  $G$  representando os desconhecidos amigos:

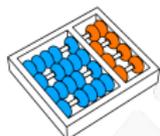
- ▶ Dois vértices são ligados se as pessoas não se conhecem.
- ▶ Queremos encontrar um vértice isolado de  $G$ .



## Exercício 2. Solução

Considere o grafo  $G$  representando os desconhecidos amizados:

- ▶ Dois vértices são ligados se as pessoas não se conhecem.
- ▶ Queremos encontrar um vértice isolado de  $G$ .
- ▶ Se o grafo não tiver arestas, problema solucionado. Caso contrário, consideremos a aresta  $(x,y)$ .

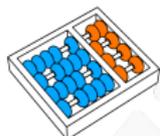


## Exercício 2. Solução

Considere o grafo  $G$  representando os desconhecidos amizados:

- ▶ Dois vértices são ligados se as pessoas não se conhecem.
- ▶ Queremos encontrar um vértice isolado de  $G$ .
- ▶ Se o grafo não tiver arestas, problema solucionado. Caso contrário, consideremos a aresta  $(x,y)$ .

Tome um subconjunto de vértices  $X = \{x, y, z, w\}$ :



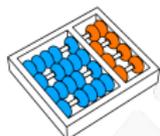
## Exercício 2. Solução

Considere o grafo  $G$  representando os desconhecidos amizados:

- ▶ Dois vértices são ligados se as pessoas não se conhecem.
- ▶ Queremos encontrar um vértice isolado de  $G$ .
- ▶ Se o grafo não tiver arestas, problema solucionado. Caso contrário, consideremos a aresta  $(x,y)$ .

Tome um subconjunto de vértices  $X = \{x, y, z, w\}$ :

- ▶ Necessariamente,  $w$  conhece  $\{x, y, z\}$ , ou  $z$  conhece  $\{x, y, w\}$ .



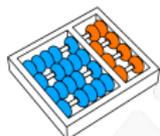
## Exercício 2. Solução

Considere o grafo  $G$  representando os desconhecidos amizados:

- ▶ Dois vértices são ligados se as pessoas não se conhecem.
- ▶ Queremos encontrar um vértice isolado de  $G$ .
- ▶ Se o grafo não tiver arestas, problema solucionado. Caso contrário, consideremos a aresta  $(x,y)$ .

Tome um subconjunto de vértices  $X = \{x, y, z, w\}$ :

- ▶ Necessariamente,  $w$  conhece  $\{x, y, z\}$ , ou  $z$  conhece  $\{x, y, w\}$ .
- ▶ Sem perda de generalidade, suponha que  $w$  conhece  $\{x, y, z\}$ .



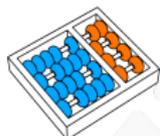
## Exercício 2. Solução

Considere o grafo  $G$  representando os desconhecidos amizados:

- ▶ Dois vértices são ligados se as pessoas não se conhecem.
- ▶ Queremos encontrar um vértice isolado de  $G$ .
- ▶ Se o grafo não tiver arestas, problema solucionado. Caso contrário, consideremos a aresta  $(x,y)$ .

Tome um subconjunto de vértices  $X = \{x, y, z, w\}$ :

- ▶ Necessariamente,  $w$  conhece  $\{x, y, z\}$ , ou  $z$  conhece  $\{x, y, w\}$ .
- ▶ Sem perda de generalidade, suponha que  $w$  conhece  $\{x, y, z\}$ .
- ▶ Então, não há arestas de  $w$  a  $\{x, y, z\}$ .



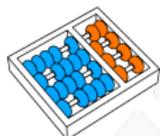
## Exercício 2. Solução

Considere o grafo  $G$  representando os desconhecidos amizados:

- ▶ Dois vértices são ligados se as pessoas não se conhecem.
- ▶ Queremos encontrar um vértice isolado de  $G$ .
- ▶ Se o grafo não tiver arestas, problema solucionado. Caso contrário, consideremos a aresta  $(x,y)$ .

Tome um subconjunto de vértices  $X = \{x, y, z, w\}$ :

- ▶ Necessariamente,  $w$  conhece  $\{x, y, z\}$ , ou  $z$  conhece  $\{x, y, w\}$ .
- ▶ Sem perda de generalidade, suponha que  $w$  conhece  $\{x, y, z\}$ .
- ▶ Então, não há arestas de  $w$  a  $\{x, y, z\}$ .
- ▶ Como para qualquer  $z$ ,  $w$  e  $z$  se conhecem, não há aresta de  $w$  a todo  $z$ .



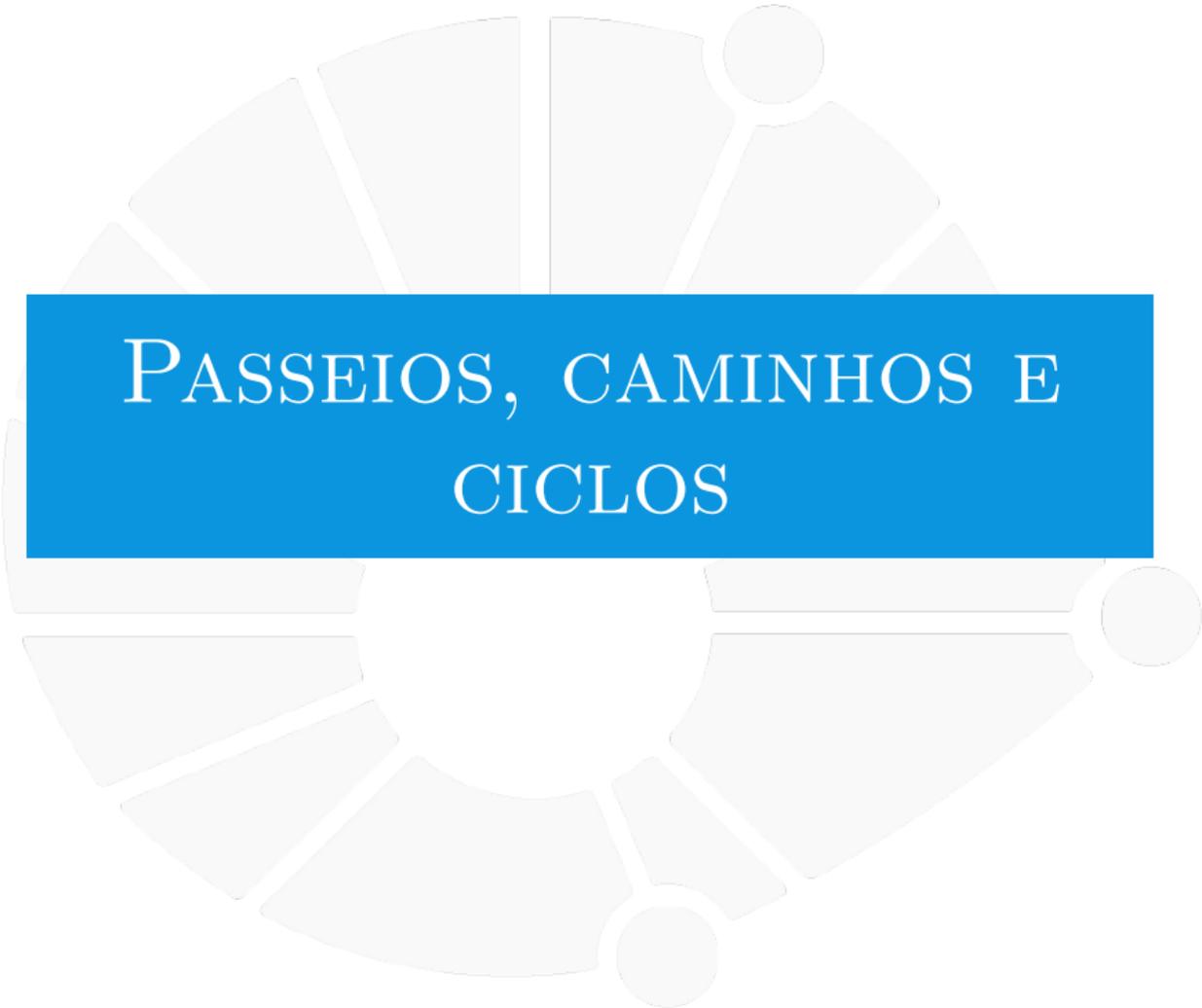
## Exercício 2. Solução

Considere o grafo  $G$  representando os desconhecidos amizados:

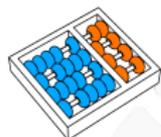
- ▶ Dois vértices são ligados se as pessoas não se conhecem.
- ▶ Queremos encontrar um vértice isolado de  $G$ .
- ▶ Se o grafo não tiver arestas, problema solucionado. Caso contrário, consideremos a aresta  $(x,y)$ .

Tome um subconjunto de vértices  $X = \{x, y, z, w\}$ :

- ▶ Necessariamente,  $w$  conhece  $\{x, y, z\}$ , ou  $z$  conhece  $\{x, y, w\}$ .
- ▶ Sem perda de generalidade, suponha que  $w$  conhece  $\{x, y, z\}$ .
- ▶ Então, não há arestas de  $w$  a  $\{x, y, z\}$ .
- ▶ Como para qualquer  $z$ ,  $w$  e  $z$  se conhecem, não há aresta de  $w$  a todo  $z$ .
- ▶ Portanto,  $w$  é um vértice isolado.



# PASSEIOS, CAMINHOS E CICLOS



## Passeios em grafos

Um **PASSEIO**  $P$  de um vértice  $v_0$  a um vértice  $v_k$  em um grafo  $G$  é uma sequência finita e não vazia  $(v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k)$ , tal que:



## Passeios em grafos

Um **PASSEIO**  $P$  de um vértice  $v_0$  a um vértice  $v_k$  em um grafo  $G$  é uma sequência finita e não vazia  $(v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k)$ , tal que:

- ▶ Seus elementos são alternadamente vértices e arestas



## Passeios em grafos

Um **PASSEIO**  $P$  de um vértice  $v_0$  a um vértice  $v_k$  em um grafo  $G$  é uma sequência finita e não vazia  $(v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k)$ , tal que:

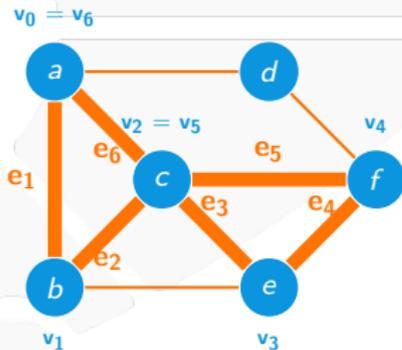
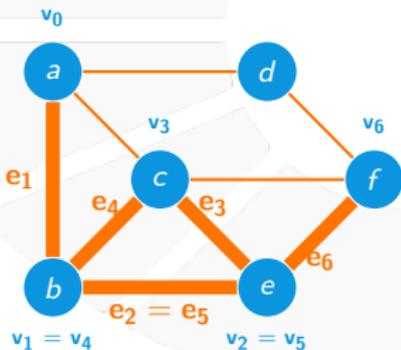
- ▶ Seus elementos são alternadamente vértices e arestas
- ▶ e, para  $1 \leq i \leq k$ ,  $v_{i-1}$  e  $v_i$  são os extremos de  $e_i$ .



## Passeios em grafos

Um **PASSEIO**  $P$  de um vértice  $v_0$  a um vértice  $v_k$  em um grafo  $G$  é uma sequência finita e não vazia  $(v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k)$ , tal que:

- ▶ Seus elementos são alternadamente vértices e arestas
- ▶ e, para  $1 \leq i \leq k$ ,  $v_{i-1}$  e  $v_i$  são os extremos de  $e_i$ .





## Passeios em grafos

Dado um passeio  $P = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k)$ :



## Passeios em grafos

Dado um passeio  $P = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k)$ :

- ▶ Dizemos que  $v_k$  é **ALCANÇÁVEL** a partir de  $v_0$  através de  $P$ .



## Passeios em grafos

Dado um passeio  $P = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k)$ :

- ▶ Dizemos que  $v_k$  é **ALCANÇÁVEL** a partir de  $v_0$  através de  $P$ .
- ▶ Se  $v_0 = v_k$ , então  $P$  é um **PASSEIO FECHADO**.



## Passeios em grafos

Dado um passeio  $P = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k)$ :

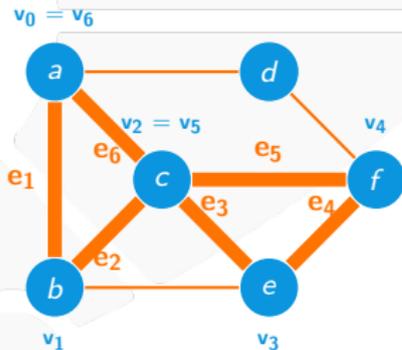
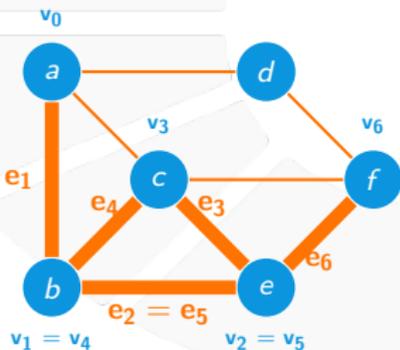
- ▶ Dizemos que  $v_k$  é **ALCANÇÁVEL** a partir de  $v_0$  através de  $P$ .
- ▶ Se  $v_0 = v_k$ , então  $P$  é um **PASSEIO FECHADO**.
- ▶ O **COMPRIMENTO** de  $P$  é o seu número de arestas ( $k$ ).

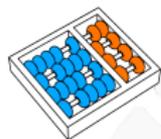


## Passeios em grafos

Dado um passeio  $P = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k)$ :

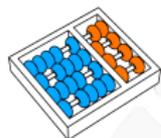
- ▶ Dizemos que  $v_k$  é **ALCANÇÁVEL** a partir de  $v_0$  através de  $P$ .
- ▶ Se  $v_0 = v_k$ , então  $P$  é um **PASSEIO FECHADO**.
- ▶ O **COMPRIMENTO** de  $P$  é o seu número de arestas ( $k$ ).





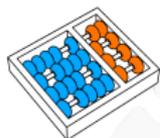
## Caminhos e ciclos

- ▶ Um **CAMINHO** é um passeio cujos vértices são distintos.



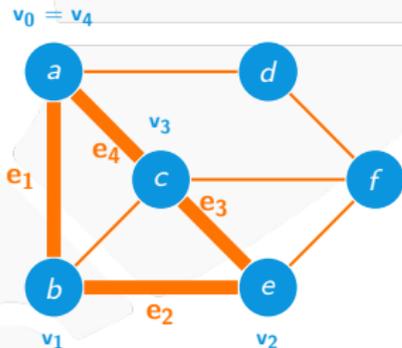
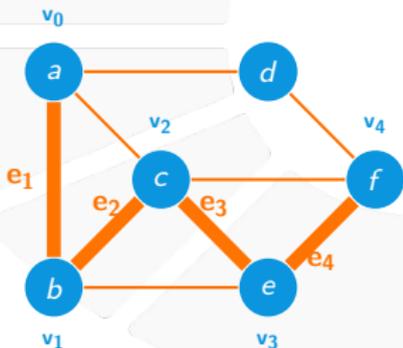
## Caminhos e ciclos

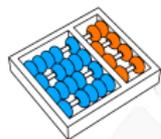
- ▶ Um **CAMINHO** é um passeio cujos vértices são distintos.
- ▶ Um **CICLO** é um passeio fechado que possui pelo menos uma aresta e tal que  $v_1, \dots, v_k$  são distintos e todas as arestas são distintas.



## Caminhos e ciclos

- ▶ Um **CAMINHO** é um passeio cujos vértices são distintos.
- ▶ Um **CICLO** é um passeio fechado que possui pelo menos uma aresta e tal que  $v_1, \dots, v_k$  são distintos e todas as arestas são distintas.

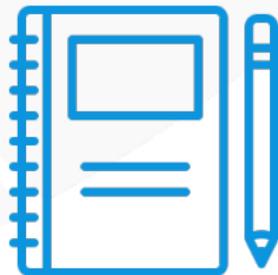


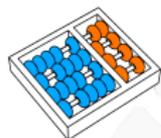


## Refletindo sobre as definições



**Vamos fazer alguns exercícios?**





## Exercício 1

Dados um grafo  $G$  e dois vértices  $u, v$  de  $G$ , mostre que:

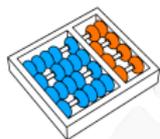
Se existe um passeio de  $u$  a  $v$  em  $G$ , então existe um caminho de  $u$  a  $v$  em  $G$ . Por que isto é um resultado interessante?



## Exercício 2

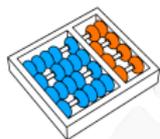
Dados um grafo  $G$  e três vértices  $u, v, w$  de  $G$ , mostre que:

Se em  $G$  existem um caminho de  $u$  a  $v$  e um caminho de  $v$  a  $w$  então existe um caminho de  $u$  a  $w$  em  $G$ .



### Exercício 3

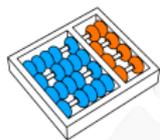
É verdade que todo passeio fechado contém um ciclo?



## Exercício 4

Dados um grafo  $G$  e um passeio  $P = (v_0, \dots, v_k)$  em  $G$  que não repete arestas, mostre que:

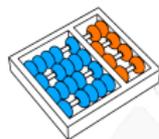
Se um vértice  $u$  de  $G$  aparece em  $P$  e  $v_0 \neq u \neq v_k$ , então o número de arestas diferentes em  $P$  que incidem em  $u$  é par.



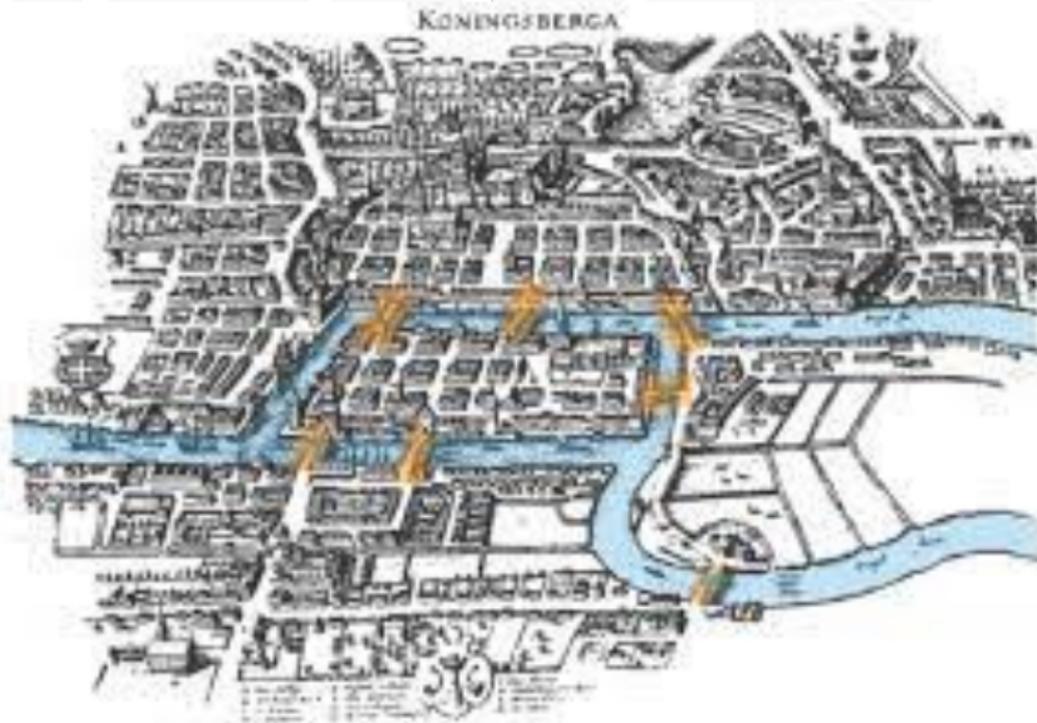
## Exercício 5

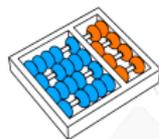
Dado um grafo  $G$ , mostre que:

Se existe um passeio que passa por todas as arestas sem repeti-las, então no máximo há dois vértices de grau ímpar em  $G$ .

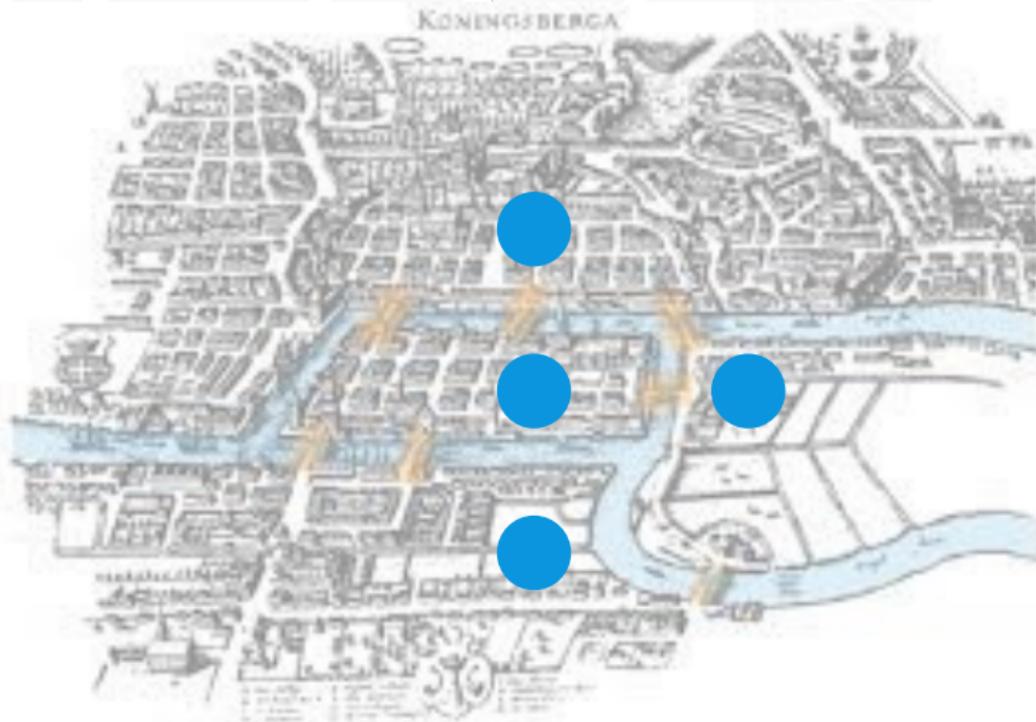


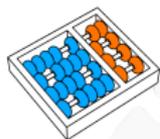
## Solucionando o problema das 7 Pontes de Königsberg



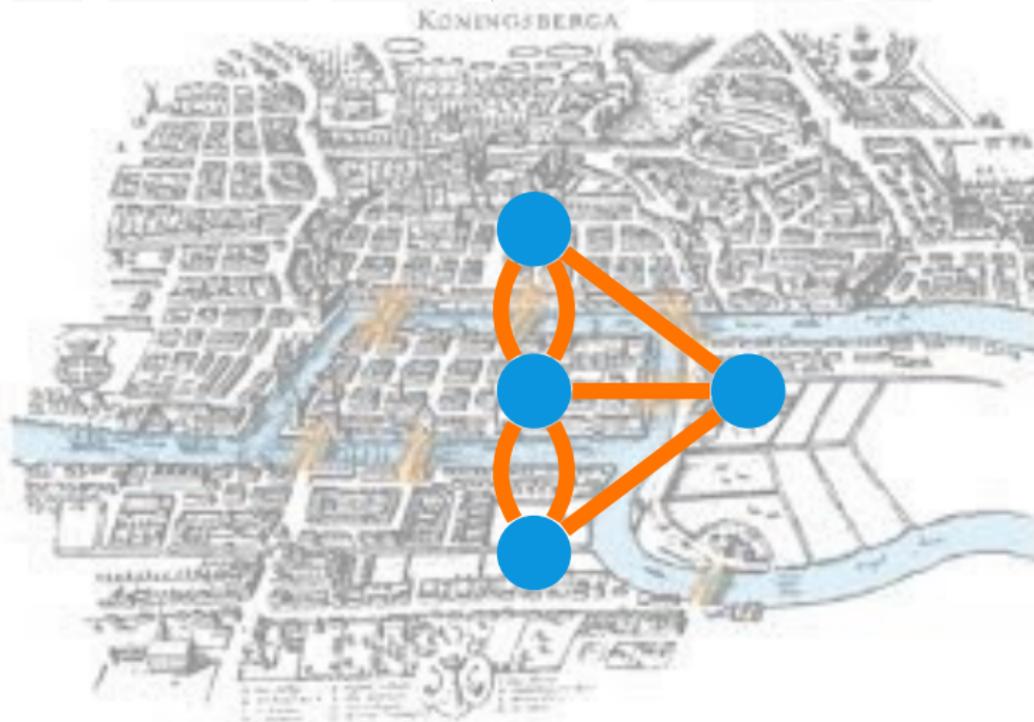


## Solucionando o problema das 7 Pontes de Königsberg





## Solucionando o problema das 7 Pontes de Königsberg



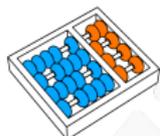


# CORTES E CONEXIDADE



## Cortes

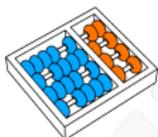
Seja  $G = (V, E)$  um grafo e seja  $S \subset V$ .



## Cortes

Seja  $G = (V, E)$  um grafo e seja  $S \subset V$ .

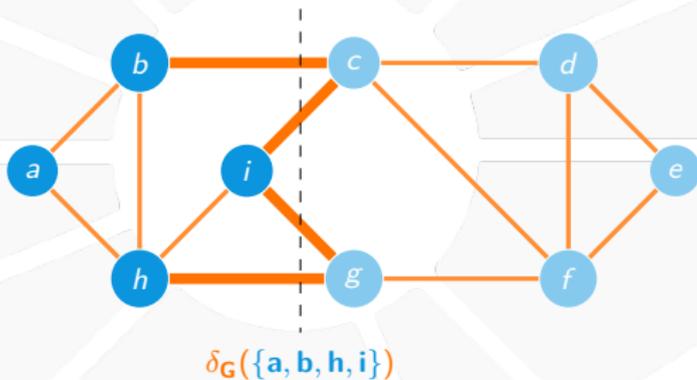
O **CORTE** de  $G$  induzido por  $S$  é o conjunto de arestas de  $G$  com um extremo em  $S$  e outro em  $V \setminus S$  e o denotamos por  $\delta_G(S)$ .

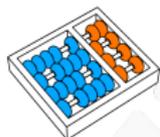


## Cortes

Seja  $G = (V, E)$  um grafo e seja  $S \subset V$ .

O **CORTE** de  $G$  induzido por  $S$  é o conjunto de arestas de  $G$  com um extremo em  $S$  e outro em  $V \setminus S$  e o denotamos por  $\delta_G(S)$ .

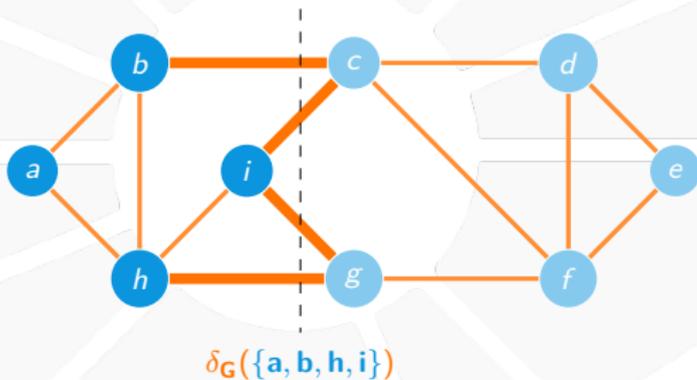




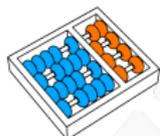
## Cortes

Seja  $G = (V, E)$  um grafo e seja  $S \subset V$ .

O **CORTE** de  $G$  induzido por  $S$  é o conjunto de arestas de  $G$  com um extremo em  $S$  e outro em  $V \setminus S$  e o denotamos por  $\delta_G(S)$ .



Se  $s \in S$  e  $t \in V \setminus S$ , então dizemos que  $\delta_G(S)$  **SEPARA**  $s$  de  $t$ .

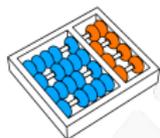


## Caminhos versus cortes

### Lema

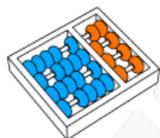
Seja  $G$  um grafo e sejam  $s, t$  vértices distintos de  $G$ . Então, exatamente uma das seguintes afirmações é verdadeira:

- (a) Existe um caminho de  $s$  a  $t$  em  $G$ , ou
- (b) existe um corte  $\delta_G(S)$  que separa  $s$  de  $t$  tal que  $\delta_G(S) = \emptyset$ .



## Caminhos versus cortes. Demonstração

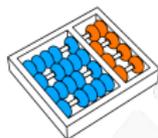
Suponha que **(a)** vale (em  $G$  existe um caminho de **s** a **t**):



## Caminhos versus cortes. Demonstração

Suponha que **(a)** vale (em  $G$  existe um caminho de  $s$  a  $t$ ):

- ▶ **(b)** não pode valer (em  $G$  não existe um corte  $\delta_G(S) = \emptyset$  que separa  $s$  de  $t$ ). Por quê?

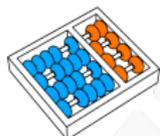


## Caminhos versus cortes. Demonstração

Suponha que **(a)** vale (em  $G$  existe um caminho de  $s$  a  $t$ ):

- ▶ **(b)** não pode valer (em  $G$  não existe um corte  $\delta_G(S) = \emptyset$  que separa  $s$  de  $t$ ). Por quê?

Suponha que **(a)** não vale (em  $G$  não existe um caminho de  $s$  a  $t$ ):



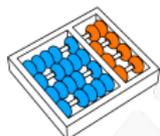
## Caminhos versus cortes. Demonstração

Suponha que **(a)** vale (em  $G$  existe um caminho de  $s$  a  $t$ ):

- ▶ **(b)** não pode valer (em  $G$  não existe um corte  $\delta_G(S) = \emptyset$  que separa  $s$  de  $t$ ). Por quê?

Suponha que **(a)** não vale (em  $G$  não existe um caminho de  $s$  a  $t$ ):

- ▶ Seja  $S$  o conjunto dos vértices alcançáveis por  $s$  em  $G$ .



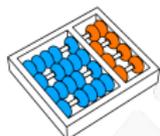
## Caminhos versus cortes. Demonstração

Suponha que **(a)** vale (em  $G$  existe um caminho de  $s$  a  $t$ ):

- ▶ **(b)** não pode valer (em  $G$  não existe um corte  $\delta_G(S) = \emptyset$  que separa  $s$  de  $t$ ). Por quê?

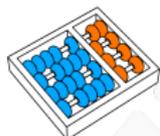
Suponha que **(a)** não vale (em  $G$  não existe um caminho de  $s$  a  $t$ ):

- ▶ Seja  $S$  o conjunto dos vértices alcançáveis por  $s$  em  $G$ .
- ▶ Temos que  $t \in V \setminus S$  e  $\delta_G(S) = \emptyset$ .



## Conexidade

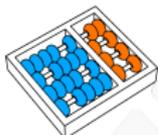
Dizemos que um grafo  $G$  é **CONEXO** se, para qualquer par de vértices  $u$  e  $v$  de  $G$ , existe um caminho de  $u$  a  $v$  em  $G$ .



## Conexidade

Dizemos que um grafo  $G$  é **CONEXO** se, para qualquer par de vértices  $u$  e  $v$  de  $G$ , existe um caminho de  $u$  a  $v$  em  $G$ .

Caso contrário, dizemos que  $G$  é **DESCONEXO**.

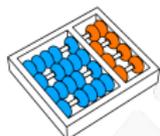


## Conexidade

Dizemos que um grafo  $G$  é **CONEXO** se, para qualquer par de vértices  $u$  e  $v$  de  $G$ , existe um caminho de  $u$  a  $v$  em  $G$ .

Caso contrário, dizemos que  $G$  é **DESCONEXO**.

Podemos particionar o grafo em **COMPONENTES**, tal que dois vértices  $u$  e  $v$  estão na mesma componente se em  $G$  há um caminho de  $u$  a  $v$ .

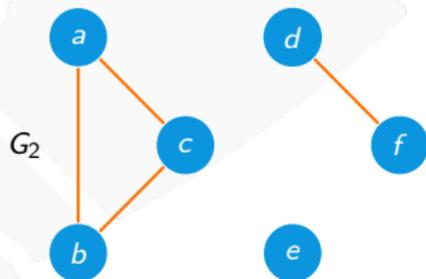
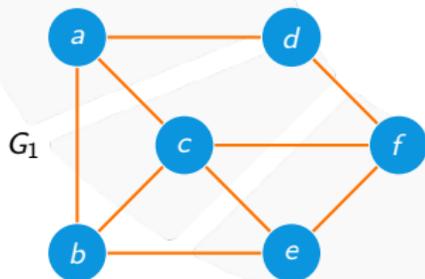


## Conexidade

Dizemos que um grafo  $G$  é **CONEXO** se, para qualquer par de vértices  $u$  e  $v$  de  $G$ , existe um caminho de  $u$  a  $v$  em  $G$ .

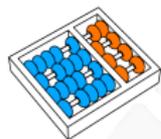
Caso contrário, dizemos que  $G$  é **DESCONEXO**.

Podemos particionar o grafo em **COMPONENTES**, tal que dois vértices  $u$  e  $v$  estão na mesma componente se em  $G$  há um caminho de  $u$  a  $v$ .



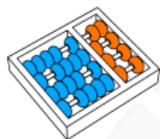


# SUBGRAFOS GERADORES E INDUZIDOS



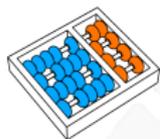
## Subgrafo e subgrafo gerador

- ▶ Um **SUBGRAFO**  $H = (\mathbf{V}', \mathbf{E}')$  de um grafo  $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$  é um grafo tal que  $\mathbf{V}' \subseteq \mathbf{V}$  e  $\mathbf{E}' \subseteq \mathbf{E}$ .



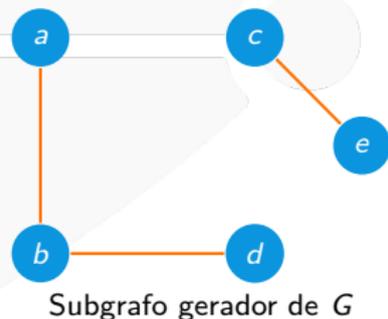
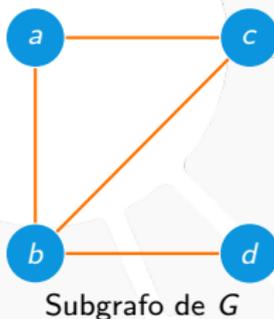
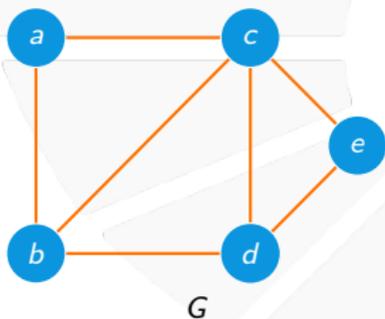
## Subgrafo e subgrafo gerador

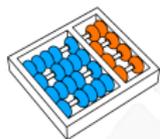
- ▶ Um **SUBGRAFO**  $H = (\mathbf{V}', \mathbf{E}')$  de um grafo  $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$  é um grafo tal que  $\mathbf{V}' \subseteq \mathbf{V}$  e  $\mathbf{E}' \subseteq \mathbf{E}$ .
- ▶ Se  $\mathbf{V}' = \mathbf{V}$ , então  $H$  é um **SUBGRAFO GERADOR** de  $G$ .



## Subgrafo e subgrafo gerador

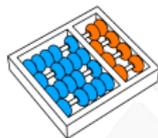
- ▶ Um **SUBGRAFO**  $H = (\mathbf{V}', \mathbf{E}')$  de um grafo  $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$  é um grafo tal que  $\mathbf{V}' \subseteq \mathbf{V}$  e  $\mathbf{E}' \subseteq \mathbf{E}$ .
- ▶ Se  $\mathbf{V}' = \mathbf{V}$ , então  $H$  é um **SUBGRAFO GERADOR** de  $G$ .





## Grafos obtidos a partir de outros grafos

Considere um grafo  $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ , uma aresta  $\mathbf{e}$  e um vértice  $\mathbf{v}$ :

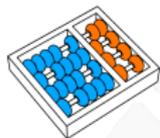


## Grafos obtidos a partir de outros grafos

Considere um grafo  $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ , uma aresta  $\mathbf{e}$  e um vértice  $\mathbf{v}$ :

- ▶  $G - \mathbf{e}$  é o grafo obtido de  $G$  removendo-se  $\mathbf{e}$ :

$$G - \mathbf{e} = (\mathbf{V}, \mathbf{E} \setminus \{\mathbf{e}\})$$



## Grafos obtidos a partir de outros grafos

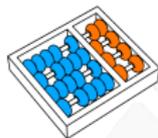
Considere um grafo  $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ , uma aresta  $\mathbf{e}$  e um vértice  $\mathbf{v}$ :

- ▶  $G - \mathbf{e}$  é o grafo obtido de  $G$  removendo-se  $\mathbf{e}$ :

$$G - \mathbf{e} = (\mathbf{V}, \mathbf{E} \setminus \{\mathbf{e}\})$$

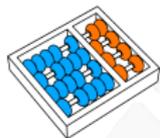
- ▶  $G - \mathbf{v}$  é o grafo obtido de  $G$  removendo-se  $\mathbf{v}$  e todas as arestas que incidem em  $\mathbf{v}$ :

$$G - \mathbf{v} = (\mathbf{V} \setminus \{\mathbf{v}\}, \mathbf{E} \setminus \delta(\{\mathbf{v}\}))$$



## Subgrafo induzido

Considere um grafo  $G = (V, E)$  e um subconjunto de vértices  $S$ :

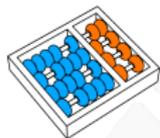


## Subgrafo induzido

Considere um grafo  $G = (V, E)$  e um subconjunto de vértices  $S$ :

- ▶ O subgrafo de  $G$  **INDUZIDO** por  $S$ , denotado por  $G[S]$ , é o grafo formado por  $S$  e todas as arestas entre vértices  $S$ :

$$G[S] = (S, \{(u, v) \in E : u, v \in S\})$$

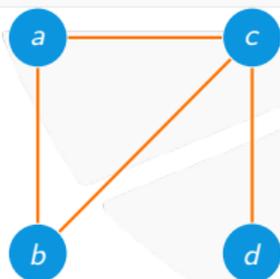


## Subgrafo induzido

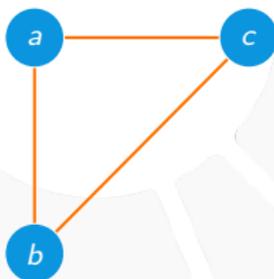
Considere um grafo  $G = (V, E)$  e um subconjunto de vértices  $S$ :

- ▶ O subgrafo de  $G$  **INDUZIDO** por  $S$ , denotado por  $G[S]$ , é o grafo formado por  $S$  e todas as arestas entre vértices  $S$ :

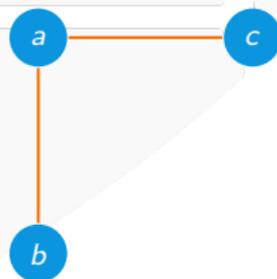
$$G[S] = (S, \{(u, v) \in E : u, v \in S\})$$



G



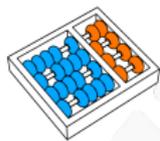
Subgrafo induzido



Subgrafo não induzido

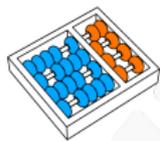


# ÁRVORES



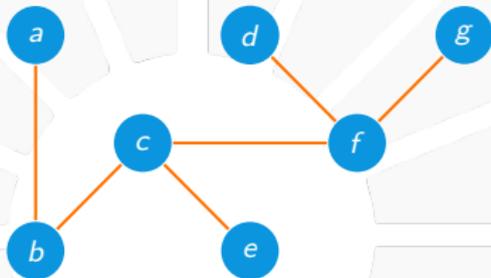
## Definição

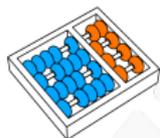
Um grafo  $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$  é uma **ÁRVORE** se ele for conexo e não possuir ciclos.



## Definição

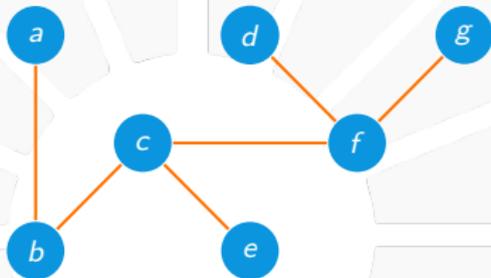
Um grafo  $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$  é uma **ÁRVORE** se ele for conexo e não possuir ciclos.



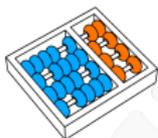


## Definição

Um grafo  $G = (V, E)$  é uma **ÁRVORE** se ele for conexo e não possuir ciclos.

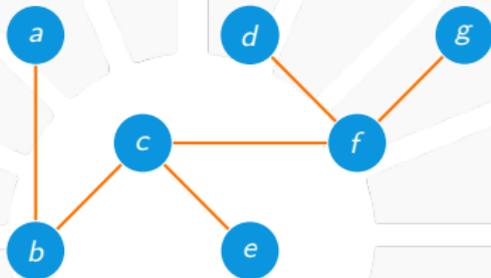


- ▶ Um grafo sem ciclos é chamado de **ACÍCLICO**.

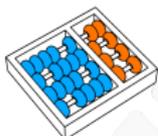


## Definição

Um grafo  $G = (V, E)$  é uma **ÁRVORE** se ele for conexo e não possuir ciclos.

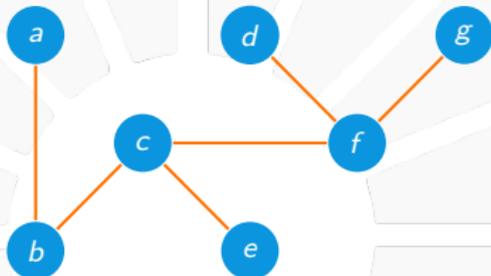


- ▶ Um grafo sem ciclos é chamado de **ACÍCLICO**.
- ▶ Uma **FOLHA** de uma árvore  $G$  é um vértice de grau 1.

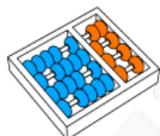


## Definição

Um grafo  $G = (V, E)$  é uma **ÁRVORE** se ele for conexo e não possuir ciclos.



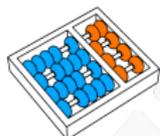
- ▶ Um grafo sem ciclos é chamado de **ACÍCLICO**.
- ▶ Uma **FOLHA** de uma árvore  $G$  é um vértice de grau 1.
- ▶ Toda árvore com dois ou mais vértices tem pelo menos duas folhas. Por quê?



## Caracterização de árvores

### Teorema

*As seguintes afirmações são equivalentes:*



## Caracterização de árvores

### Teorema

*As seguintes afirmações são equivalentes:*

- ▶  *$G$  é uma árvore.*

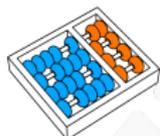


## Caracterização de árvores

### Teorema

*As seguintes afirmações são equivalentes:*

- ▶  *$G$  é uma árvore.*
- ▶  *$G$  é conexo e possui exatamente  $|V| - 1$  arestas.*

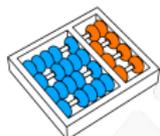


## Caracterização de árvores

### Teorema

*As seguintes afirmações são equivalentes:*

- ▶  *$G$  é uma árvore.*
- ▶  *$G$  é conexo e possui exatamente  $|V| - 1$  arestas.*
- ▶  *$G$  é conexo e a remoção de qualquer aresta desconecta o grafo, i.e, ele é conexo minimal.*



## Caracterização de árvores

### Teorema

*As seguintes afirmações são equivalentes:*

- ▶  *$G$  é uma árvore.*
- ▶  *$G$  é conexo e possui exatamente  $|V| - 1$  arestas.*
- ▶  *$G$  é conexo e a remoção de qualquer aresta desconecta o grafo, i.e, ele é conexo minimal.*
- ▶ *Para todo par de vértices  $u, v$  de  $G$ , existe um único caminho de  $u$  a  $v$  em  $G$ .*



## Caracterização de árvores

### Teorema

*As seguintes afirmações são equivalentes:*

- ▶  *$G$  é uma árvore.*
- ▶  *$G$  é conexo e possui exatamente  $|V| - 1$  arestas.*
- ▶  *$G$  é conexo e a remoção de qualquer aresta desconecta o grafo, i.e, ele é conexo minimal.*
- ▶ *Para todo par de vértices  $u, v$  de  $G$ , existe um único caminho de  $u$  a  $v$  em  $G$ .*

Demonstre esse teorema como exercício.

# CONCEITOS SOBRE GRAFOS

MC558 - Projeto e Análise de  
Algoritmos II

Santiago Valdés Ravelo  
[https://ic.unicamp.br/~santiago/  
ravelo@unicamp.br](https://ic.unicamp.br/~santiago/ravelo@unicamp.br)

01/24

1



UNICAMP

