

Proposta de 2ª Prova

MO619/MC948— Geometria Computacional

Prof. Pedro J. de Rezende

1º Semestre de 2018

Elaborada por: Allan Sapucaia Barboza, allansapucaia@gmail.com

A não ser que seja indicado o contrário, assuma que os pontos estão em posição geral. Ao descrever um algoritmo, apresente argumentos que fundamentem sua corretude e analise sua complexidade.

1. (Fácil) O *núcleo* de um polígono simples P é o conjunto de pontos em P (interior ou bordo) que enxergam todo o polígono P . Descreva um algoritmo de complexidade de tempo $O(n \log n)$ para encontrar o núcleo de um polígono simples P com n vértices.
2. (Fácil) Bob diz que desenvolveu um algoritmo com complexidade de tempo $O(n)$ para encontrar uma triangulação de um conjunto de n pontos e armazená-la como uma DCEL, mas afirma que está com problemas numéricos: alguns ângulos gerados são muito pequenos.
 - a) Ele pede para você descrever para ele um algoritmo que encontre um triangulação que maximize o menor ângulo. Como seria o seu algoritmo? Qual a complexidade dele?
 - b) Mostre que o algoritmo que Bob afirma ter desenvolvido está errado.
3. (Médio) É preciso encontrar o menor caminho entre dois pontos a e b no plano, que evita interceptar n obstáculos dados. Como esse problema já foi bem estudado em aula, Bob deixa para fazer o trabalho na última hora. A primeira tarefa que Bob quer resolver é identificar os vértices ao longo do caminho, mas um problema aparece: os obstáculos são discos! Desesperado, Bob tenta encontrar alguma propriedade que o ajude a desenvolver um algoritmo no tempo que lhe resta.

Após fazer alguns rascunhos, Bob conclui que o caminho mínimo entre a e b deve satisfazer a propriedade de monotonicidade em relação à direção do segmento \overline{ab} .

Assim, Bob chega ao seguinte algoritmo:

1. se o segmento \overline{ab} não intercepta o interior de nenhum disco, Bob reporta o segmento.
2. caso contrário, seja D o primeiro disco que \overline{ab} cruza. Comparando os dois arcos gerados quando \overline{ab} corta o disco D , o caminho contorna D utilizando o arco mais curto chegando a um ponto $c \in \overline{ab}$, e concatena esse sub-caminho com um caminho mais curto de c a b obtido recursivamente.

- a) Esta ideia levará Bob a ter um algoritmo correto?

b) A propriedade que o Bob acredita ter encontrado é válida? Se não é, mostre um contra-exemplo. Se é, demonstre que é válida.

4. (Médio) (Formulação revisada.)

Dado um polígono simples P com exatamente um buraco poligonal convexo H em seu interior deseja-se saber se é possível determinar *a priori* o número de triângulos de uma triangulação qualquer de $P \setminus H$, conhecendo-se apenas o número de vértices de P e de H .

a) É verdade que todo polígono simples com buracos tem pelo menos uma orelha? Justifique.

b) Todo polígono simples P com exatamente um buraco poligonal convexo H em seu interior é triangulável? Justifique **cuidadosamente**.

c) Seja P um polígono simples com exatamente um buraco poligonal convexo H em seu interior, onde n é o número de vértices de P e m é o número de vértices de H . Suponha que T é uma triangulação de $P \setminus H$. Denote por t o número de triângulos de T . Usando a Fórmula Poliedral de Euler pode-se calcular o valor de t em função de n e m apenas? Justifique.

d) Resolva o item anterior considerando agora que H é um polígono simples, não necessariamente convexo.

5. (Difícil) (Formulação revisada.)

Bob precisa encontrar o Diagrama de Voronoi de vários conjuntos de n pontos para valores arbitrários de n . Examinando as instâncias, Bob percebeu que elas satisfazem a seguinte propriedade: cada um dos Diagramas de Voronoi tem apenas $O(1)$ regiões de Voronoi de área limitada, independentemente da cardinalidade n do conjunto.

a) Bob acredita que esta propriedade permite encontrar o diagrama em tempo linear. Mostre que Bob está errado.

b) Examinando as instâncias com mais cuidado, Bob se surpreende ao perceber que em cada entrada o primeiro ponto dado é o único ao qual corresponde uma região de Voronoi limitada, e que os demais pontos fornecidos, na ordem em que são dados, formam um polígono. Bob insiste que com essa informação adicional é certamente possível determinar em tempo linear o Diagrama de Voronoi de todos esses pontos. Mostre que Bob agora está certo ou que ele continua errado. Justifique **cuidadosamente**.