

Proposta de 1ª Prova

MO619/MC948 — Geometria Computacional

Prof. Pedro J. de Rezende

1º Semestre de 2018

Elaborada por: Allan Sapucaia Barboza, allansapucaia@gmail.com

A não ser que seja indicado o contrário, assuma que os pontos estão em posição geral. Ao descrever um algoritmo, apresente argumentos que fundamentem sua corretude e analise sua complexidade.

1. Dado um conjunto de n robôs posicionados no plano, dois robôs bloqueiam o segmento de reta (incluindo os pontos) entre eles, impossibilitando a passagem pelo mesmo. Se um robô não possui uma direção de fuga, ele é *eliminado*. Caracterize a situação em que as eliminações param de acontecer e desenvolva um algoritmo ótimo para encontrar os robôs restantes.
2. Para cada ponto $p \in P$, temos um valor v_p associado. Dado um retângulo $R = [x_{min}, y_{min}, x_{max}, y_{max}]$, desejamos determinar o maior valor dentre os pontos contidos em R .
 - a) Descreva em alto nível como você modificaria a kD-Tree para aceitar a consulta proposta.
 - b) É possível modificar de maneira similar o algoritmo baseado em dominância visto em aula? Justifique.
3. Dados n pontos no plano, usando preprocessamento, desejamos reponder *queries* do tipo:

Dado um ponto p no plano, qual é a profundidade de p em relação aos pontos originais? A profundidade de um ponto p é a quantidade de envoltórias convexas que precisam ser repetidamente removidas do conjunto de pontos até que p faça parte da envoltória convexa. As envoltórias convexas cujas remoções são necessárias para serem remover todos os pontos são chamadas de envoltórias convexas aninhadas.

 - a) Encontre todas as envoltórias convexas aninhadas em $O(n^2)$. Prove que essa complexidade é atingida.
 - b) Apresente uma solução, baseada em algoritmos vistos em aula, que gaste tempo $O(\log n)$ para as *queries*, usando $O(n^2)$ tempo de preprocessamento.
 - c) **Explorando a particular estrutura de uma instância**, desenvolva um algoritmo específico para este problema de busca com tempo de processamento $O(n)$, tempo de *queries* $O(\log^2 n)$ e uso de memória $O(n)$.

4. Considere um conjunto de n pássaros espalhados numa área plana, onde cada pássaro pertence uma espécie. Um pássaro tem *influência* sobre a região dos pontos que estão mais perto dele do que de qualquer outro pássaro. Dois pássaros da mesma espécie *compartilham* suas regiões se elas são vizinhas, i.e., elas têm uma borda unidimensional em comum. Uma região é *dominada* por uma espécie se é compartilhada por mais de um pássaro da mesma espécie. A área total do viveiro onde esses pássaros se organizam é um retângulo de área limitada conhecida.

É importante notar que uma região isolada não é considerada dominada! A *dominância de uma espécie* é a área total que a espécie domina.

O objetivo é calcular a dominância de cada espécie.

- a) Descreva como calcular a área de um polígono convexo em tempo $O(n)$.
- b) Descreva como encontrar as áreas de influência em tempo ótimo. **Leia o item c) antes!**
- c) Descreva um algoritmo para calcular a dominância de todas as espécies em tempo $O(n)$, dadas as áreas de influência dos pássaros individuais. Note que é necessário armazenar com cuidado as informações do item anterior.

Observação: você pode utilizar algoritmos e estruturas vistas em aula, justificando seu uso.

5. É dado um conjunto P com n pontos, distribuídos em k (constante) linhas horizontais fixas separadas por uma distância de $\sqrt{2}$ entre linhas consecutivas. Nesta questão, os pontos não estão em posição geral.

Deseja-se encontrar o par de pontos em P mais distantes.

- a) Projete um algoritmo ótimo para o problema com complexidade $O(n)$. Por que essa complexidade não viola a quota inferior do problema? O que faz esse problema mais fácil que o caso geral?
- b) Agora assuma que novos pontos são inseridos em P . Projete uma função de inserção e encontre a complexidade para atualizar a estrutura e poder continuar determinando o par mais distante.
- c) Assuma que você está usando a mesma estrutura dos itens anteriores, compare o custo de remoção de um ponto com o da operação de inserção. Argumente como uma modificação pode privilegiar o tempo de pré-processamento ou da query de remoção.