

## Proposta de 1ª Prova

MO619/MC948 — Geometria Computacional

Prof. Pedro J. de Rezende

1º Semestre de 2018

Elaborada por: Allan Sapucaia Barboza, allansapucaia@gmail.com

**A não ser que seja indicado o contrário, assuma que os pontos estão em posição geral. Ao descrever um algoritmo, apresente argumentos que fundamentem sua corretude e analise sua complexidade.**

1. Dado um conjunto de  $n$  robôs posicionados no plano, dois robôs bloqueiam o segmento de reta (incluindo os pontos) entre eles, impossibilitando a passagem pelo mesmo. Se um robô não possui uma direção de fuga, ele é *eliminado*. Caracterize a situação em que as eliminações param de acontecer e desenvolva um algoritmo ótimo para encontrar os robôs restantes.
2. Para cada ponto  $p \in P$ , temos um valor  $v_p$  associado. Dado um retângulo  $R = [x_{min}, y_{min}, x_{max}, y_{max}]$ , desejamos determinar o maior valor dentre os pontos contidos em  $R$ .
  - a) Descreva em alto nível como você modificaria a kD-Tree para aceitar a consulta proposta.
  - b) É possível modificar de maneira similar o algoritmo baseado em dominância visto em aula? Justifique.
3. Dados  $n$  pontos no plano, usando preprocessamento, desejamos reponder *queries* do tipo:

Dado um ponto  $p$  no plano, qual é a profundidade de  $p$  em relação aos pontos originais? A profundidade de um ponto  $p$  é a quantidade de envoltórias convexas que precisam ser repetidamente removidas do conjunto de pontos até que  $p$  faça parte da envoltória convexa. As envoltórias convexas cujas remoções são necessárias para serem remover todos os pontos são chamadas de envoltórias convexas aninhadas.

  - a) Encontre todas as envoltórias convexas aninhadas em  $O(n^2)$ . Prove que essa complexidade é atingida.
  - b) Apresente uma solução, baseada em algoritmos vistos em aula, que gaste tempo  $O(\log n)$  para as *queries*, usando  $O(n^2)$  tempo de preprocessamento.
  - c) **Explorando a particular estrutura de uma instância**, desenvolva um algoritmo específico para este problema de busca com tempo de processamento  $O(n)$ , tempo de *queries*  $O(\log^2 n)$  e uso de memória  $O(n)$ .

4. Considere um conjunto de  $n$  pássaros espalhados numa área plana, onde cada pássaro pertence uma espécie. Um pássaro tem *influência* sobre a região dos pontos que estão mais perto dele do que de qualquer outro pássaro. Dois pássaros da mesma espécie *compartilham* suas regiões se elas são vizinhas, i.e., elas têm uma borda unidimensional em comum. Uma região é *dominada* por uma espécie se é compartilhada por mais de um pássaro da mesma espécie. A área total do viveiro onde esses pássaros se organizam é um retângulo de área limitada conhecida.

É importante notar que uma região isolada não é considerada dominada! A *dominância de uma espécie* é a área total que a espécie domina.

O objetivo é calcular a dominância de cada espécie.

- a) Descreva como calcular a área de um polígono convexo em tempo  $O(n)$ .
- b) Descreva como encontrar as áreas de influência em tempo ótimo. **Leia o item c) antes!**
- c) Descreva um algoritmo para calcular a dominância de todas as espécies em tempo  $O(n)$ , dadas as áreas de influência dos pássaros individuais. Note que é necessário armazenar com cuidado as informações do item anterior.

Observação: você pode utilizar algoritmos e estruturas vistas em aula, justificando seu uso.

5. É dado um conjunto  $P$  com  $n$  pontos, distribuídos em  $k$  (constante) linhas horizontais fixas separadas por uma distância de  $\sqrt{2}$  entre linhas consecutivas. Nesta questão, os pontos não estão em posição geral.

Deseja-se encontrar o par de pontos em  $P$  mais distantes.

- a) Projete um algoritmo ótimo para o problema com complexidade  $O(n)$ . Por que essa complexidade não viola a quota inferior do problema? O que faz esse problema mais fácil que o caso geral?
- b) Agora assuma que novos pontos são inseridos em  $P$ . Projete uma função de inserção e encontre a complexidade para atualizar a estrutura e poder continuar determinando o par mais distante.
- c) Assuma que você está usando a mesma estrutura dos itens anteriores, compare o custo de remoção de um ponto com o da operação de inserção. Argumente como uma modificação pode privilegiar o tempo de pré-processamento ou da query de remoção.