2ª Lista de Exercícios

MO619/MC948 — Geometria Computacional
Prof. Pedro J. de Rezende
1º Semestre de 2018

Comentários

- Esta lista inclui exercícios de diversas fontes.
- Podem haver exercícios parecidos ou formulações alternativas de uma mesma questão.
- Só ataque os exercícios **depois** de estudar a teoria e os exemplos dos livros.
- Se você estiver com dificuldades mesmo nos exercícios mais fáceis, releia a teoria mais uma vez antes de prosseguir.
- Se recomenda que cada estudante tente fazer cada exercício individualmente antes de discutir com os colegas.
- Pedir simplesmente para ver a solução de um exercício feito por um colega (ou pelo professor) é a maneira mais efetiva de destruir o benefício que um exercício pode lhe trazer. Mais contribui para o aprendizado um exercício atacado insistentemente do que um transformado em mero exemplo.

1. Em um Diagrama de Voronoi de um conjunto P de pontos, provar que:
   - Toda célula de Voronoi é um polígono convexo;
   - Uma célula de Voronoi é um polígono ilimitado se e somente se o sítio de Voronoi correspondente a ela é vértice do casco convexo de P.
2. Dado um polígono convexo generalizado P (de área limitada ou não), determine um conjunto de sítios S de forma que uma das células do diagrama de Voronoi de S seja P.
3. Suponha que lhe seja apresentada uma subdivisão planar D que se *parece* com um Diagrama de Voronoi, na qual todos os vértices têm grau três e algumas arestas são raios (ilimitados), mas não lhe seja dado qualquer conjunto de sítios. É possível determinar se, de fato, D corresponde ao Diagrama de Voronoi de algum conjunto de sítios? Qual a complexidade de seu algoritmo para concluir se sim ou se não? Em caso afirmativo, você seria capaz de construir o conjunto de sítios? Esse conjunto é sempre univocamente determinado?
4. Prove ou disprove:
   (a) se $V(p_i)$ é o polígono de Voronoi associado ao sítio p_i, e se q é um ponto contido em $V(p_i)$, então o segundo vizinho mais próximo de q é um dos sítios cujo polígono de Voronoi é adjacente a $V(p_i)$.
   (b) se $V(p_i)$ é o polígono de Voronoi associado ao sítio p_i, e se p_j e p_k são os dois sítios mais próximos de p_i, então $V(p_i)$ compartilha uma aresta quanto com $V(p_j)$ quanto com $V(p_k)$.
5. Dado um conjunto S de n sítios no plano, definimos o grafo de vizinhança relativa de S como o grafo cujos vértices são os sítios e dois sítios s e t são adjacentes se e só se nenhum outro sítio está mais próximo *de ambos* do que eles estão entre si. Isto é, a interseção dos discos de raio $\text{dist}(s, t)$ centrados em s e em t é vazia de pontos de $S - \{s, t\}$. Descreva um algoritmo $o(n^2)$ para sua solução. Prove que $\Omega(n \log n)$ é quota inferior para esse problema.

6. Considere um conjunto de N pontos no plano, cujo diagrama de Voronoi (segundo a métrica Euclideana usual) é conhecido. Descreva um algoritmo polinomial que constrói um ciclo Hamiltoniano cujo comprimento é no máximo duas vezes o comprimento do ciclo ótimo. Dizemos neste caso que este algoritmo é uma 2-aproximação. Você consegue exibir uma $\frac{3}{2}$-aproximação?
7. Prove que o número máximo de vértices no Diagrama de Voronoi é $2n-5$ e o número máximo de arestas é $3n-6$, onde n é o número de sítios.
8. Prove que todo polígono simples é triangulável.
9. Descreva um algoritmo ótimo para triangular um polígono monotônico. Qual a complexidade de seu algoritmo? Ele é ótimo? Por quê?
10. A triangulação de Delaunay é uma *triangulação de peso mínimo*? Isto é, aquela que minimiza a soma dos comprimentos das arestas da triangulação? Se sim, prove. Se não, dê um contra-exemplo para esta afirmação.
11. Seja S um conjunto finito de pontos no plano e sejam A e B subconjuntos disjuntos de S tais que $A \cup B = S$. Mostre que se pq é o menor segmento ligando um ponto de A a um ponto de B, então pq é necessariamente uma aresta da Triangulação de Delaunay de S.
12. (a) Prove que toda a triangulação de um polígono simples tem uma orelha.
    (b) Prove por indução forte que o grafo dual de uma triangulação de um polígono simples é uma árvore (de valência ≤ 3).
    (c) Use (a) e (b) para provar por indução fraca que:

    O grafo gerado pela triangulação de um n-polígono simples é vértice 3-colorível.
13. Seja A um número real positivo e seja $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ um *conjunto* de n parábolas $(y - y_i) = A(x - x_i)^2$.
    (a) Prove que o ponto de mínimo de p_i é o ponto (x_i, y_i), $\forall i\ 1 \leq i \leq n$.
    (b) Apresente um algoritmo eficiente que determina todas as intersecções entre as parábolas de P.
    (c) Faça a análise de complexidade de seu algoritmo e apresente a maior quota inferior que você puder para esse problema.
    (d) É possível determinar se as parábolas de P são todas disjuntas em tempo menor que a quota inferior obtida no item (c)?
14. O menor caminho entre dois pontos no interior de uma sala (representada por um polígono simples) que contém obstáculos poligonais é sempre uma linha poligonal. Essa afirmação é falsa ou verdadeira? Justifique sua resposta.
15. Reduza o problema de programação linear com 2 variáveis para o problema de intersecção entre meios-planos. Que conclusões você obtém dessa prova?
16. Seja S um conjunto de n segmentos no plano e seja p um ponto que não pertence a nenhum dos segmentos de S. Considere o problema de determinar os segmentos de S que são visíveis a partir de p (um segmento s é visível a partir de p se existir um ponto q em s tal que o segmento aberto pq não intercepta o interior de nenhum segmento de S). Descreva o mais eficiente algoritmo que você puder para resolver este problema.
17. Dado um conjunto C de N círculos, projete um algoritmo eficiente que verifique se dois círculos quaisquer de C se interceptam. Seu algoritmo é ótimo? Justifique.
18. Prove que o caminho mínimo (na métrica euclideana) entre dois pontos dentro de um polígono simples é único.

19. Dados um conjunto S de polígonos simples disjuntos no plano e dois pontos p_i e p_f no espaço livre:
    (a) Descreva um método para se encontrar o menor caminho livre entre p_i e p_f.
    (b) Mostre que esse caminho deve ser formado por segmentos de retas de extremos em p_i, p_f ou em vértices dos polígonos de S.
20. Dados dois polígonos convexos, descreva um algoritmo de complexidade linear que determina a diferença simétrica entre eles – veja a Figura 1.

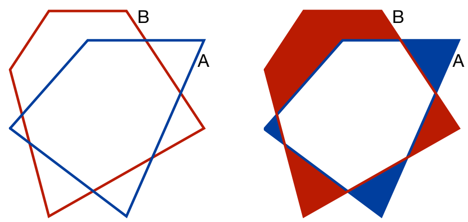

Figura 1: Polígonos A e B e sua diferença simétrica preenchida em azul e vermelho

21. Dados um polígono simples P de n vértices, no plano, e um par de pontos p, q no exterior de P, descreva um algoritmo eficiente que determina um caminho mínimo (euclidiano) ligando p a q, considerando P como obstáculo.
22. Dados um conjunto R de segmentos de reta dispostos no plano:
    (a) Descreva um algoritmo $o(n^2)$ que determine o conjunto de segmentos cujas *extremidades* são visíveis a partir do ponto $p = (0, +\infty)$.
    (b) Este algoritmo também funciona para o caso de se desejar determinar a visibilidade a partir de $p = (0, +\infty)$ até um ponto qualquer nos segmentos? Justifique.
    (c) Se não, enuncie uma possível adaptação de seu algoritmo original para resolver deste caso. Justifique a corretude.
23. Seja S um conjunto de n segmentos de reta disjuntos no plano. Deseja-se "esticar" cada segmento até que suas extremidades interceptem outro segmento (possivelmente já anteriormente esticado) ou cheguem ao infinito (neste caso, se tornando uma reta ou semi-reta). Denotemos por S^* o conjunto dos n segmentos de S após um tal esticamento.
    (a) S^* é único para cada instância do problema? Justifique.
    (b) Descreva um algoritmo de varredura que obtenha uma solução para o problema acima em tempo $O(n \log n)$.
24. Dados n segmentos de reta no plano e uma direção σ, mostre que $\Omega\,(n \log n)$ é quota inferior para o problema de decidir a ordem em que os segmentos devem ser transladados na direção σ de modo a separá-los.
25. a) Descreva um algoritmo para resolver o problema da galeria de arte num polígono simples que utilize no máximo $\frac{n}{3}$ guardas-vértice.
    b) Dê um exemplo de um polígono simples para o qual são necessários $\frac{n}{3}$ guardas-vértice.
    c) Construa um exemplo de um polígono **estrelado** para o qual o número de guardas-vértices é máximo (como função de n).

26. A demonstração do *Teorema de Chvátal para Galerias de Arte* vista em sala de aula é válida somente para polígonos simples que não contêm buracos. Na presença de buracos, a triangulação do polígono pode não ser 3-colorível. Apresente um exemplo pequeno de polígono triangulado, com 1 buraco, cujos vértices não podem ser coloridos com três cores. Demonstre que tal coloração não é possível.
27. Xorãozinho e Chitoró desistiram da carreira musical e decidiram estudar geometria computacional, na esperança de terem mais sucesso profissional. Os dois propuseram uma heurística para o problema de alocar guardas aos vértices de uma galeria de arte. Eis o algoritmo deles:

    Dada uma galeria de arte em forma de um polígono simples, faça:

    1 Coloque um guarda no primeiro vértice $v_1 \in V$ do polígono;

    2 Para cada vértice $v \in V - \{v_1\}$, faça:

    se v não enxerga o último guarda colocado, coloque um guarda em v.

    Chitoró acha que esse algoritmo está correto e é econômico no número de guardas. Xorãozinho, como sempre, acha que não. Ajude-os a decidir, respondendo:

    (a) Essa heurística produz um conjunto de guardas que sempre vigia todo o polígono simples dado? Justifique.

    (b) Apresente um exemplo (desenhando-o) de um polígono de n vértices, para algum n pequeno, mas passível de generalização para n arbitrário, em que o número de guardas posicionados por esse algoritmo exceda o número mínimo suficiente para guardar toda a galeria.
28. Prove ou disprove:

    No problema da Galeria de Arte, se um guarda for posicionado em cada vértice convexo de um polígono simples P, então esses guardas enxergam:

    a) todas as paredes;

    b) todo o interior de P.
29. Prove ou disprove:

    Se dois polígonos são monotônicos com relação a uma mesma reta no plano, então eles sempre podem ser separados por meio de uma translação de apenas um deles.
30. Um rei está tentando decidir quantos guardas deve usar para fazer a vigia do pátio do seu castelo. A planta baixa do pátio é um polígono simples de 40 vértices, sendo que cada vértice pode corresponder a um posto de guarda. O rei pede a opinião de seus conselheiros mas esquece de mencionar qual é o formato exato do pátio. Veja o que dizem seus conselheiros:

    Conselheiro A: Será necessário um guarda para cada posto de forma a garantir que toda a área do pátio seja vigiada.

    Conselheiro B: Apenas 13 guardas são suficientes, e devemos alocar um a cada 3 postos de forma a garantir que toda a área do pátio seja vigiada.

    Conselheiro C: Um guarda em cada vértice reflexo será suficiente e dessa forma estaremos usando o menor número de guardas possível.

    Analise a opinião de cada conselheiro, explicando porque você concorda ou discorda. Não é necessário exibir a prova de suas afirmações, mas apresente contra-exemplos sempre que você discordar.