INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Critérios Gráficos Para Divisibilidade em Permutações

J. Meidanis

Technical Report - IC-12-07 - Relatório Técnico

February - 2012 - Fevereiro

Critérios Gráficos Para Divisibilidade em Permutações

Joao Meidanis*

Resumo

Apresentamos neste trabalho critérios gráficos (ou visuais) que dão condições necessárias e suficientes para saber se uma permutação algébrica divide outra permutação. Estes critérios podem originar algoritmos eficientes para decidir divisibilidade entre permutações.

1 Introdução

Grupos de permutações e o conceito de divisibilidade têm encontrado aplicações em problemas de rearranjo de genomas. Por exemplo, a teoria algébrica introduzida por Meidanis e Dias [4] utiliza permutações; Lin e colegas [3] lançam mão de grupos de permutações para estudar rearranjos em vibriões; Almeida [1] estuda extensivamente o uso de permutações e a noção de divisibilidade no problema de rearranjos por reversões. A maioria das definições e demostrações dadas aqui vem destes trabalhos.

Neste relatório, apresentamos uma maneira gráfica de decidir se uma permutação divide outra. Implementações destes critérios podem levar a algoritmos eficientes para decidir divisibilidade.

2 Definições

Vamos relembrar aqui as definições básicas de grupos de permutações, norma e divisibilidade introduzidas por Meidanis e Dias [4] e ampliadas por Almeida [1].

Denotamos por S_n o grupo simétrico do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$, isto é, o conjunto de todas as bijeções de $\{1, 2, \ldots, n\}$ munido da operação de composição de funções. Por exemplo, o grupo S_4 possui 24 elementos. Em geral, S_n possui $n!$ elementos.

Neste trabalho, usaremos a notação de Jacy Monteiro para permutações [2], isto é, uma permutação será indicada como um produto de ciclos disjuntos, sendo cada ciclo representado por seus elementos entre parênteses, com a connveção de que a permutação leva cada elemento no próximo da lista, exceto o último, que é levado no primeiro. Assim, o ciclo

$$(1\ 2\ 3\ 4)$$

*Instituto de Computação, Universidade Estadual de Campinas, 13081-852 Campinas, São Paulo, Brasil, e Scylla Bioinformática, Campinas, Brasil.

leva 1 em 2, 2 em 3, 3 em 4 e 4 em 1. A permutação

$$(1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6)$$

é composta do ciclo anterior e de mais um ciclo, (5 6), que troca 5 com 6.

Uma **transposição** é um ciclo de dois elementos. Sabemos que as transposições geram o grupo S_n. Por exemplo, qualquer ciclo pode ser escrito como produto de transposições, generalizando o exemplo a seguir:

$$(1\ 2\ 3\ 4) = (1\ 2)(2\ 3)(3\ 4).$$

Definição 1 *A **norma de** σ, indicada por $||\sigma||$, é o menor número de transposições necessárias para escrever σ como produto delas.*

Denotaremos por 1 a função identidade, que é a unidade do grupo S_n. Admitiremos que $||1|| = 0$, isto é, a unidade de S_n será considerada o produto de zero transposições. Outras conseqüências da definição são: a norma de qualquer transposição é 1 e permutações pares (ímpares) têm norma par (ímpar).

3 Propriedades

Recordaremos aqui algumas propriedades importantes da norma acima definida.

(a) $||\sigma|| = 0$ se e somente se $\sigma = 1$

(b) $||\sigma\rho|| \leq ||\sigma|| + ||\rho||$

(c) $||\sigma|| = ||\sigma^{-1}||$

(d) $||\sigma\rho|| = ||\rho\sigma||$

(e) $||\sigma|| = ||\rho\sigma\rho^{-1}||$

As demonstrações podem ser encontradas nas referências citadas, notadamente em Almeida [1].

Estas propriedades serão úteis na noção de **distância** em S_n que veremos a seguir.

4 Distância

Uma distância em S_n pode ser definida fazendo:

$$d : S_n \times S_n \mapsto R$$
$$d(\sigma, \rho) = ||\sigma\rho^{-1}||.$$

Pelas propriedades **(c)** e **(d)**, daria no mesmo definir $d(\sigma, \rho)$ como sendo $||\sigma^{-1}\rho||$, $||\rho^{-1}\sigma||$, $||\rho\sigma^{-1}||$ ou do modo que fizemos. Vejamos que é realmente uma métrica em S_n:

$$d(\sigma, \rho) >= 0 \text{ e } d(\sigma, \rho) = 0 \text{ se e somente se } \sigma = \rho$$

A primeira parte é óbvia e a segunda decorre da propriedade **(a)** para norma.

$$d(\sigma, \rho) = d(\rho, \sigma)$$

Decorre de **(c)**.

$$d(\sigma, \tau) \leq d(\sigma, \rho) + d(\rho, \tau)$$

Decorre de **(b)**.
Logo, é uma distância no sentido clássico.

5 Cálculo de normas e distâncias

Veremos aqui uma forma alternativa de calcular normas e, portanto, distâncias em S_n. Sabemos que toda permutação σ induz uma relação de equivalência em $\{1, 2, \ldots, n\}$ da seguinte forma:

$$i \sim j \iff \text{ existe } k \in N \text{ tal que } \sigma^k(i) = j.$$

As classes de equivalência correspondentes são chamadas de **órbitas** de σ. Pois bem, vale que:

$$||\sigma|| = n - \text{ número de órbitas de } \sigma.$$

Uma outra forma de enunciar isto é a seguinte: sabemos que toda permutação se escreve de modo único (a não ser pela ordem dos fatores) como produto de ciclos disjuntos. Para calcular a norma de σ, basta decompô-la desta forma e somar a norma dos ciclos encontrados. A norma de um k-ciclo é $k - 1$.

Temos assim uma maneira alternativa para calcular normas. A demonstração pode também ser encontrada nas referências, onde o lema a seguir tem um papel fundamental. Vamos encunciá-lo, pois ele será a base a partir da qual construiremos nossos critérios gráficos.

Lema 1 *Seja $\sigma \in S_n$ uma permutação qualquer e $\tau = (i\ j)$ uma transposição. Então:*

- *se i e j estão na mesma σ-órbita, temos*

$$||\sigma\tau|| = ||\sigma|| - 1$$

e

$$\text{número de órbitas de } \sigma\tau \ = \ \text{número de órbitas de } \sigma + 1.$$

- *se i e j estão em σ-órbitas diferentes, temos*

$$||\sigma\tau|| = ||\sigma|| + 1$$

e

$$\text{número de órbitas de } \sigma\tau = \text{ número de órbitas de } \sigma - 1.$$

6 Divisibilidade em S_n

A maneira mais natural e imediata de se definir divisibilidade em S_n seria: $\sigma|\rho$ se e somente se existe $\tau \in S_n$ tal que $\tau\sigma = \rho$. Mas, sendo S_n um grupo, todos os elementos dividiriam todos.

Com o conceito de norma, porém, podemos tornar esta relação interessante, impondo que haja **igualdade** na desigualdade triangular. A definição que daremos é a seguinte:

Definição 2 *$\sigma|\rho$ se e somente se $||\rho\sigma^{-1}|| = ||\rho|| - ||\sigma||$.*

Existe sempre um único elemento $\tau \in S_n$ com a propriedade de que $\tau\sigma = \rho$, que é $\tau = \rho\sigma^{-1}$. O que exigimos então é que

$$||\rho|| = ||\tau\sigma|| = ||\tau|| + ||\sigma||.$$

Através das propriedades seguintes nos certificamos de que a definição é interessante:

(a) $\sigma|\sigma$

(b) $\sigma|\rho$ e $\rho|\alpha \Longrightarrow \sigma|\alpha$

(c) $\sigma|\rho$ e $\rho|\sigma \Longrightarrow \sigma = \rho$

(d) $\sigma|\rho \Longrightarrow ||\sigma|| \leq ||\rho||$

(e) $1|\sigma$

As primeiras três garantem que a divisibilidade é uma relação de ordem. Para uma definição formal de relação de ordem, consulte Jacy Monteiro [2]. A última propriedade informa que 1 é o elemento mínimo para esta ordem.

7 Critérios de divisibilidade

O Lema 1 que citamos na Seção 5 nos dá o seguinte cirtério de divisibilidade: uma transposição $\tau = (i\ j)$ divide uma permutação σ se e somente se i e j estão na mesma σ-órbita. Este resultado, por sua vez, nos permite concluir o seguinte:

Lema 2 *Uma condição **necessária** para que $\sigma|\rho$ é que toda σ-órbita esteja contida em alguma ρ-órbita.*

Isto é uma simples aplicação da propriedade "$\tau|\sigma$ e $\sigma|\rho$ implica em $\tau|\rho$" quando τ é uma transposição.

Esta condição necessária não é, em geral, suficiente (é suficiente quando σ é transposição, como já vimos). Para ter a suficiência precisamos exigir duas outras condições, que serão consideradas nas próximas seções. Estas novas condições são as contribuições deste trabalho.

7.1 Primeira condição suplementar

Considere $\rho = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)$, $\sigma = (1\ 3\ 5)$ e $\tau = (2\ 6\ 4)$. Vejamos se $\sigma|\rho$ e se $\tau|\rho$:

$$||\rho|| = 6 \text{ (é um 7-ciclo)}$$
$$||\sigma|| = ||\tau|| = 2.$$

$$\rho\sigma^{-1} = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)(1\ 5\ 3) = (1\ 6\ 7)(2\ 3)(4\ 5)$$
$$||\rho\sigma^{-1}|| = 2 + 1 + 1 = 4 = ||\rho|| - ||\sigma||.$$

Logo, $\sigma|\rho$. Agora vejamos τ:

$$\rho\tau^{-1} = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)(2\ 4\ 6) = (1\ 2\ 5\ 6\ 3\ 4\ 7)$$
$$||\rho\tau^{-1}|| = 6 \neq ||\rho|| - ||\tau||.$$

Logo, $\tau \not|\rho$.

Vamos representar graficamente as permutações envolvidas. Isto nos dará subsídios para enunciar a primeira condição suplementar.

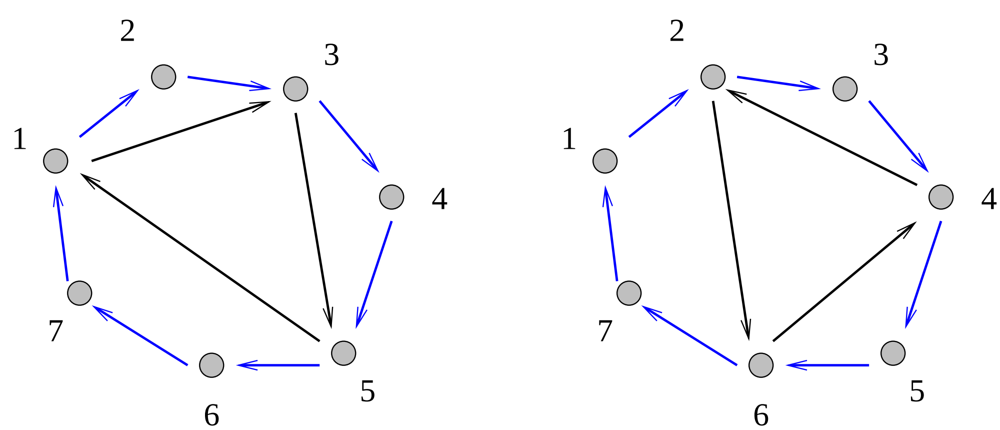

Figura 1: À esquerda, ρ em azul e σ em preto. À direita, ρ novamente em azul e τ em preto.

Olhando os esquemas na Figura 1, salta aos olhos uma diferença fundamental entre σ e τ em relação a ρ: as setas de σ vão no mesmo sentido que as de ρ, enquanto que as de τ vão em sentido contrário.

Enunciaremos agora a primeira condição suplementar:

Lema 3 *Sejam σ e ρ permutações tais que toda σ-órbita está contida numa ρ-órbita. Então para que $\sigma|\rho$ é necessário que as setas de σ andem no mesmo sentido que as setas de ρ.*

Note que esta condição está trivialmente verificada quando σ é uma transposição, pois neste caso as setas podem ser consideradas como andando em qualquer um dos dois sentidos.

7.2 Segunda condição suplementar

Esta segunda condição se aplica quando há mais de uma σ-órbita contida numa mesma ρ-órbita. De novo, vamos primeiro exemplificar graficamente e depois enunciar.

Considere

$$\begin{aligned} \rho &= (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8), \\ \sigma &= (1\ 2\ 4)(5\ 6\ 7), \\ \tau &= (1\ 3\ 5)(4\ 7). \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} ||\rho|| &= 7, \\ ||\sigma|| &= 2 + 2 = 4, \\ ||\tau|| &= 2 + 1 = 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\rho\sigma^{-1} = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8)(1\ 4\ 2)(5\ 7\ 6) = (1\ 5\ 8)(3\ 4) \\ &||\rho\sigma^{-1}|| = 2 + 1 = 3 = ||\rho|| - ||\sigma||. \end{aligned}$$

Logo, $\sigma|\rho$. Vamos ver τ:

$$\begin{aligned} &\rho\tau^{-1} = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8)(1\ 5\ 3)(4\ 7) = (1\ 6\ 7\ 5\ 4\ 8)(2\ 3) \\ &||\rho\tau^{-1}|| = 5 + 1 = 6 \neq ||\rho|| - ||\tau||. \end{aligned}$$

Logo, $\tau \not|\rho$.

Vejamos na Figura 2 os dois casos.

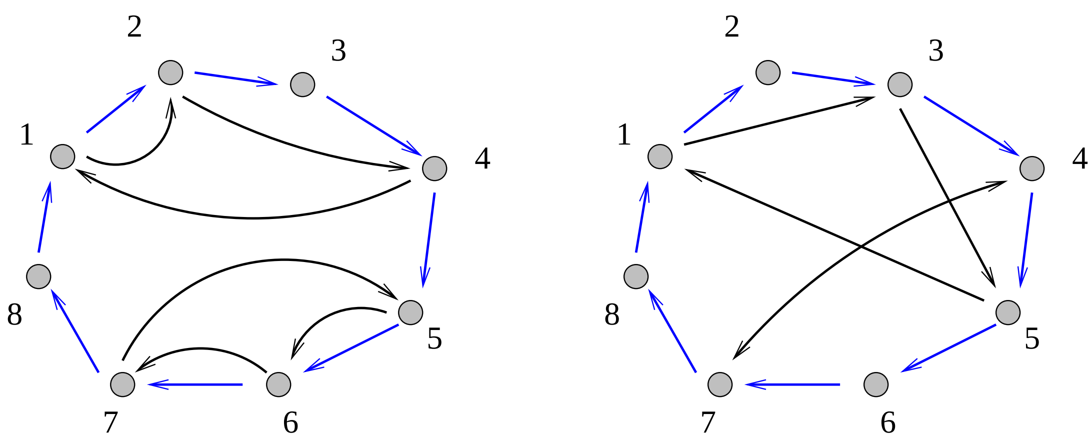

Figura 2: À esquerda, ρ em azul e σ em preto. À direita, ρ novamente em azul e τ em preto.

Note que tanto σ como τ satisfazem à primeira condição. No entanto, apenas σ divide ρ. A diferença é que as setas de τ "se cruzam" na ρ-órbita, enquanto que as de σ não. Por isto, σ divide ρ mas τ não divide ρ.

8 Condição necessária e suficiente para a divisibilidade

Acreditamos que as condições vistas nas seções anteriores englobam tudo o que há em termos de divisibilidade. O seguinte teorema resume esta crença:

Teorema 1 *Sejam σ e ρ permutações se S_n. Para que σ divida ρ, é necessário e suficiente que se cumpram as três condições abaixo:*

1. *toda σ-órbita está contida em uma ρ-órbita*
2. *as setas de σ vão no mesmo sentido que as setas de ρ*
3. *as setas de σ não se cruzam dentro de uma mesma ρ-órbita.*

A demonstração depende de definir mais formalmente os critérios, inclusive as noções de "seta" e "cruzar", intuitivas graficamente mas que necessitam de uma definição formal para serem trabalhadas.

Referências

[1] A. A. M. Almeida. Comparação algébrica de genomas: o caso da distância de reversão. Master's thesis, Universidade Estadual de Campinas, 2007.

[2] L. H. Jacy Monteiro. *Elementos de Algebra*. Livros Tecnicos e Cientificos Editora, Rio de Janeiro, 1974.

[3] Ying Chih Lin, Chin Lung Lu, Hwan-You Chang, and Chuan Yi Tang. An efficient algorithm for sorting by block-interchanges and its application to the evolution of vibrio species. *Journal of Computational Biology*, 12(1):102–112, 2005.

[4] J. Meidanis and Z. Dias. An alternative algebraic formalism for genome rearrangements. In David Sankoff and Joseph Nadeau, editors, *Comparative Genomics*, pages 213–223. Kluwer Academic Publishers, 2000.