

O conteúdo do presente relatório é de única responsabilidade do(s) autor(es).  
The contents of this report are the sole responsibility of the author(s).

**Reduzindo a Demanda de Banda Passante  
em Servidores de Vídeo**

Roberto de A. Façanha  
Nelson L. S. Fonseca      Pedro J. de Rezende

**Relatório Técnico IC-97-24**

Novembro de 1997

# Reduzindo a Demanda de Banda Passante em Servidores de Vídeo

*Roberto de A. Façanha      Nelson L. S. Fonseca*  
*Pedro J. de Rezende*

Instituto de Computação  
Unicamp  
Caixa Postal 6176  
13083-970 — Campinas — S.P.  
e-mail: {facanha,nfonseca,rezende}@dcc.unicamp.br

## Resumo

Aplicações de vídeo apresentam grande demanda de banda passante, por isso sua disponibilização em larga escala requer a utilização de técnicas de redução desta demanda, *e. g.* *Batching* e *Piggybacking*. Neste artigo, apresentamos um estudo sobre a técnica de *Piggybacking*, propomos duas extensões à política Algoritmo Snapshot e avaliamos o impacto destas extensões em um sistema de Vídeo sob Demanda.

**Palavras-chave:** Banda Passante, Fluxo, *Piggybacking* e Snapshot.

## 1 Introdução

As aplicações de vídeo, como por exemplo vídeo sob demanda, estão entre as de maior potencial comercial nas futuras Redes Digitais de Serviços Integrados de Faixa Larga (RDSI-FL). Porém, dado que estas aplicações demandam uma grande quantidade de banda passante, sua disponibilização em larga escala requer a utilização de técnicas de redução desta demanda. Técnicas de redução da demanda de banda passante levam em consideração a probabilidade de um conjunto de requisições por vídeos populares chegarem ao sistema dentro de um intervalo de tempo relativamente curto possibilitando o fornecimento de um único fluxo para as diversas requisições.

A técnica de *Batching* [1, 2, 3] dispara um fluxo ao final de um determinado intervalo de tempo, denominado Janela de *Batching*, agrupando todas as requisições

pendentes no sistema por um certo vídeo até aquele instante. A grande desvantagem desta técnica é o retardo introduzido entre a requisição e a exibição do filme, podendo resultar no abandono do usuário.

A técnica de *Piggybacking* [4, 5, 6, 7] baseia-se no fato de que alterações da ordem de 5% na taxa de exibição não são perceptíveis aos usuários. Desta forma, as requisições são atendidas imediatamente e o fluxo unificado é obtido através da superposição de fluxos de-sincronizados, ou seja, altera-se a taxa de exibição dos fluxos de vídeo de tal forma que estes venham a exibir um mesmo quadro de filme em um determinado instante descartando um dos fluxos após a sincronização.

Este artigo introduz extensões à política de *Piggybacking* denominada Algoritmo Snapshot. A política Snapshot divide o tempo em intervalos de mesclagem e calcula a posição ótima para a mesclagem dos fluxos que chegam durante um intervalo. As extensões consideradas neste artigo são: a introdução de mesclagem das resultantes dos intervalos ótimos (política  $S^2$ ) e a otimização dos quadros exibidos dentro de um intervalo ótimo (Política Híbrida).

O restante deste artigo está organizado como segue. Na seção 2 a política Snapshot é apresentada. As seções 3 e 4 introduzem, respectivamente, as políticas  $S^2$  e Híbrida. Finalmente, a seção 5 apresenta as conclusões.

## 2 O Algoritmo Snapshot

Dentre as políticas de *Piggybacking*, a política Snapshot [6, 7] é ótima no sentido de que busca minimizar o número de quadros exibidos por um conjunto de fluxos de vídeo.

A computação realizada pelas políticas de *Piggybacking* pode ser vista como uma árvore binária nas quais as folhas correspondem aos fluxos, os nós intermediários são as mesclagens e a raiz é a mesclagem final formando o fluxo resultante do conjunto. Portanto, o número de possíveis árvores formadas a partir de um conjunto de fluxos constitui-se no número de políticas de *Piggybacking* potencialmente ótimas e é dado pelo  $(n - 1)$ -ésimo número de **Catalan** [8, 9], ou seja:

$$Catalan(n - 1) = \frac{(2n - 2)!}{(n - 1)!n!} \quad (1)$$

o que implica que o número de árvores é exponencial em  $n$  eliminando quaisquer possibilidades de se realizar uma busca exaustiva da estratégia ótima e sua árvore binária correspondente.

Deste modo, a política Snapshot busca a construção da árvore ótima de mesclagem de fluxos de vídeo formulando o problema como segue. Considere um conjunto de  $n$  fluxos de um mesmo vídeo (o qual é composto de  $L$  quadros) e suas posições dadas por  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , em que  $f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq f_n$  em um determinado instante de tempo

$T$ . Definem-se as “velocidades”  $S_{min}$  e  $S_{max}$ , dadas em quadros por segundo, como as taxas mínima e máxima, respectivamente, de apresentação dos quadros dos fluxos do vídeo. Sejam  $i$  e  $j$  dois fluxos entre 1 e  $n$ , com  $i \leq j$ , denotamos por  $P(i, j)$  a posição de mesclagem (em quadros), na qual os fluxos  $i$  e  $j$  apresentam o mesmo quadro. Uma vez que o fluxo  $i$  possui velocidade  $S_{min}$  e o fluxo  $j$   $S_{max}$ , a posição de mesclagem é dada por:

$$P(i, j) = f_i + \frac{S_{min} \cdot (f_i - f_j)}{S_{max} - S_{min}} \quad (2)$$

se  $i < j$ , caso contrário ( $i = j$ ):

$$P(i, i) = f_i \quad (3)$$

Seja  $C(i, j)$  o custo de uma política e  $\mathcal{A}(i, j)$  sua árvore binária correspondente. O custo para cada fluxo é dado por:

$$C(i, i) = L - f_i. \quad (4)$$

Para se obter o custo  $C(i, j)$  mínimo é necessário que o princípio de otimalidade seja satisfeito, ou seja: *Existirá um fluxo  $k$ , com  $i \leq k < j$ , tal que as subárvores à esquerda e à direita também são ótimas.* Estas subárvores são denotadas por  $\mathcal{A}(i, k)$  e  $\mathcal{A}(k + 1, j)$ . O custo da árvore que corresponde ao conjunto de fluxos  $i, \dots, j$  é dado por  $C(i, k) + C(k + 1, j) - \max(L - P(i, j), 0)$ .

Portanto, a política ótima para os fluxos  $i, \dots, j$  possui subárvores  $i, \dots, k^*$  e  $k^* + 1, \dots, j$ , em que:

$$k^* = \operatorname{argmin}_{i \leq k < j} \{C(i, k) + C(k + 1, j) - \max(L - P(i, j), 0)\}. \quad (5)$$

Deste modo, o custo do conjunto dos  $n$  fluxos ( $C(1, n)$ ) pode ser calculado de forma *bottom-up* através de programação dinâmica.

Assim como as demais políticas de Piggybacking, a política Snapshot atribui velocidades aos fluxos que são disparados pelo sistema dentro de um intervalo (neste caso o Intervalo Snapshot, que é denotado por  $I$ ). O intervalo Snapshot é dado por  $I = W/S_{max}$ , em que  $W$  é o valor ótimo da janela de mesclagem derivado para a política mesclagem simples generalizada. Dentro do intervalo  $I$ , a política Snapshot comporta-se como a política mesclagem simples. Ao final do intervalo os procedimentos de otimização descritos anteriormente são aplicados.

O dimensionamento da janela de mesclagem é um fator importante porque uma vez que a janela de mesclagem assume valores pequenos ocorrerão superposições próximas do início do vídeo, porém em número reduzido. Por outro lado, a atribuição de grandes valores à janela de mesclagem implica em um número maior de mesclagens que ocorrem próximas ao final do vídeo. Pode-se perceber que ambas as situações não favorecem à redução do número de quadros exibidos por um conjunto de fluxos. Aggarwal et. al [6, 7] apresentam um método analítico para otimizar o valor da janela

de mesclagem o qual leva em consideração a taxa de chegada prevista, assumindo que as chegadas são modeladas por um processo de Poisson com parâmetro  $\lambda$ .

### 3 A Política $S^2$

A política Snapshot foi proposta de modo a minimizar o número de quadros exibidos dos fluxos inicializados em um intervalo  $I$ , de tal modo que é necessário aguardar o final deste intervalo. A otimização realizada envolve apenas os fluxos que chegaram durante o último intervalo Snapshot. É interessante mencionar que quando os valores de  $W$  são pequenos, com relação ao valor da janela máxima de mesclagem ( $W_m$ ), a redução no número de quadros exibidos por todos os fluxos no sistema (otimização global) não é ótima mesmo que as reduções locais (em cada intervalo) sejam.

É fácil verificar que, quanto menor o intervalo médio entre requisições (maiores taxas de chegadas) as janelas ótimas de mesclagem serão cada vez menores, podendo haver uma ou várias janelas ótimas contidas numa mesma janela máxima de mesclagem. A possibilidade de mesclagem entre dois fluxos separados por no máximo  $W_m$  quadros, em que  $W_m$  é janela máxima de mesclagem, permite que ganhos adicionais aos da política Snapshot possam ser obtidos. Assim sendo, propõe-se a política  $S^2$  que busca otimizar o número de quadros exibidos por um conjunto de fluxos disparados pelo sistema numa janela máxima alterada de mesclagem,  $W'_m$ , ( $W'_m \leq W_m$ ) e não somente no intervalo  $I$ . A janela máxima alterada é constituída por um número inteiro de janelas ótimas, ou seja, a janela máxima alterada possui  $\lfloor W'_m/W \rfloor$  janelas ótimas. Em outras palavras, a política  $S^2$  introduz um segundo nível de mesclagens, isto é, a mesclagem das resultantes dos intervalos  $I$ .

O funcionamento da política  $S^2$  é como se segue: aplica-se primeiramente o algoritmo Snapshot sobre os fluxos que chegam ao sistema nos intervalos Snapshot (como proposto originalmente) e em seguida, aplica-se também o Snapshot sobre os fluxos resultantes dos fluxos dos intervalos ótimos. É interessante enfatizar que, de acordo com a definição da própria política Snapshot, atribui-se a velocidade  $S_{max}$  a estes fluxos resultantes com exceção daquele gerado pela primeira janela ótima contida em  $W'_m$ . Outro aspecto importante é que ao contrário do que ocorre com o primeiro nível de otimização, o ponto de aplicação do procedimento de otimização não ocorre ao final de intervalos de duração fixa. Estes intervalos são denotados por  $I_{S^2}$  e sua duração é determinada pelo padrão das requisições por vídeos em cada janela  $W'_m$  (Figura 1).

Uma generalização natural da política  $S^2$  seria considerar  $n$  níveis de otimização. No entanto, os ganhos obtidos com a implantação destes níveis seriam praticamente nulos dado que os fluxos nestes níveis estariam separados por valores bem próximos a  $W_m$  quadros (ou ainda maiores) o que implica em mesclagens próximas do final do vídeo. Portanto, a introdução de níveis extras de mesclagens não proporciona

reduções efetivas de banda passante.

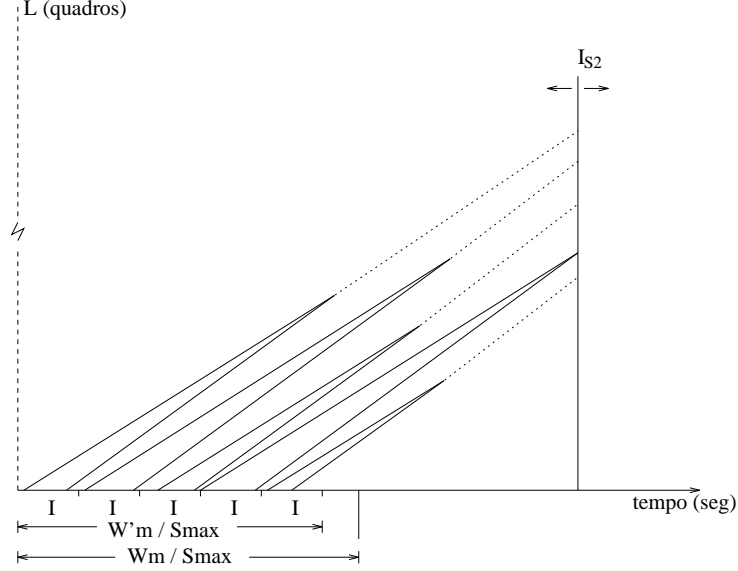


Figura 1: Possível situação da política  $S^2$  na qual o último fluxo resultante gerado não corresponde ao fluxo resultante da última janela ótima contida na janela  $W'_m$ .

Para avaliar o impacto da introdução de um segundo nível de otimização, foi realizado um estudo comparativo através de simulação entre as políticas  $S^2$ , Snapshot original e a política Snapshot Global, que considera todas as requisições de um mesmo filme sem dividir o tempo em intervalos Snapshot. A função objetivo utilizada neste estudo difere da considerada em [7], a qual contabiliza apenas o número de quadros exibidos após o intervalo  $I$ . A nova função objetivo contabiliza o número total de quadros apresentados por um conjunto de fluxos, ou seja, reflete a otimização realizada no intervalo  $I$  assim como a realizada pela política  $S^2$  (posterior ao intervalo) e é dada por:

$$C(i, i) = L \quad (6)$$

para um fluxo  $i$  e para um conjunto de fluxos  $1, \dots, n$  ( $i = 1$  e  $j = n$ ):

$$C(1, n) = Quadros_I + \sum_{k=\operatorname{argmin}_{i \leq k < j}} (C(i, k) + C(k+1, j) - \max(L - P(i, j), 0)) \quad (7)$$

em que  $Quadros_I$  é o somatório dos quadros apresentados pelos  $m$  fluxos descartados,

$Q(l)$ , para  $l = 1, \dots, m$ , antes do final dos intervalos Snapshot, dado por:

$$Quadros_I = \sum_{l=1}^m Q(l) \quad (8)$$

### 3.1 Resultados Numéricos

Os resultados apresentados neste artigo foram obtidos via simulação de eventos discretos considerando-se um intervalo com nível de confiança de 95%. Assume-se que as chegadas são modeladas por um processo de Poisson e utiliza-se  $S_{min} = 28.5$  e  $S_{max} = 31.5$  em quadros/segundos. Os gráficos mostram a redução percentual média no número de quadros apresentados em decorrência da aplicação das políticas de Piggybacking.

Foram realizados três experimentos: *i*) análise das políticas sob diversas taxas de chegadas, *ii*) análise de sensibilidade da política  $S^2$  em relação ao tamanho da janela de mesclagem e *iii*) análise do efeito da duração de um filme na política  $S^2$ .

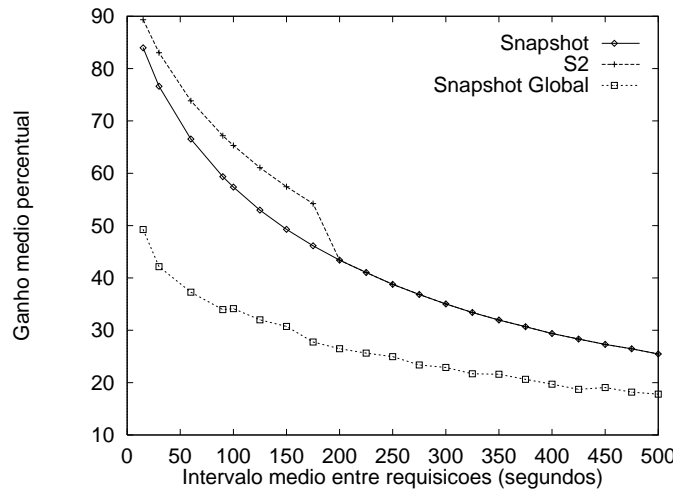


Figura 2: Comparação entre as políticas Snapshot original,  $S^2$  e Snapshot Global.

A Figura 2 ilustra o comportamento das políticas sob diferentes taxas de chegada, isto é, varia-se o intervalo médio de requisição de 15 a 500 segundos. Pode-se verificar que, à medida que os intervalos médios entre chegadas assumem valores maiores, os ganhos com adoção de Piggybacking são reduzidos. Para altas taxas, a introdução de um segundo nível de otimização propicia ganhos de até 8% maiores que os alcançados pela política Snapshot.

A Figura 3 mostra o comportamento da política  $S^2$  em função do tamanho da janela de mesclagem para o intervalo médio de chegadas de 30 segundos e a duração do vídeo de 2 horas. Pode-se verificar que a política  $S^2$  é insensível à variação da

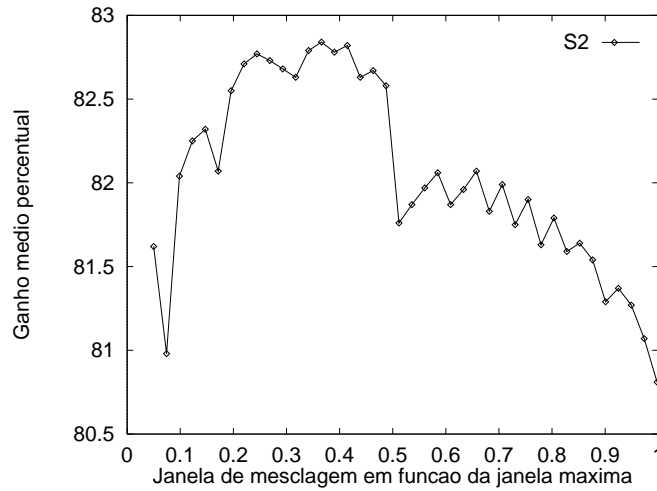


Figura 3: Influência do tamanho da janela sobre a política  $S^2$ .

janela de mesclagem, isto se deve ao fato de que o segundo nível de otimização “recupera” eventuais perdas devido à variação do tamanho da janela de mesclagem. Em outras palavras, quando a janela de mesclagem assume valores muito pequenos, ocorrem poucas mesclagens no primeiro nível de otimização, o que implica uma pequena redução no número de quadros exibidos. Porém, uma vez que existe um segundo nível, os fluxos resultantes do primeiro nível de mesclagens ainda podem ser superpostos, proporcionando assim uma redução ainda maior no número de quadros apresentados. À medida que a janela de mesclagem assume valores próximos aos da janela máxima, os ganhos são obtidos já no primeiro nível de otimização.

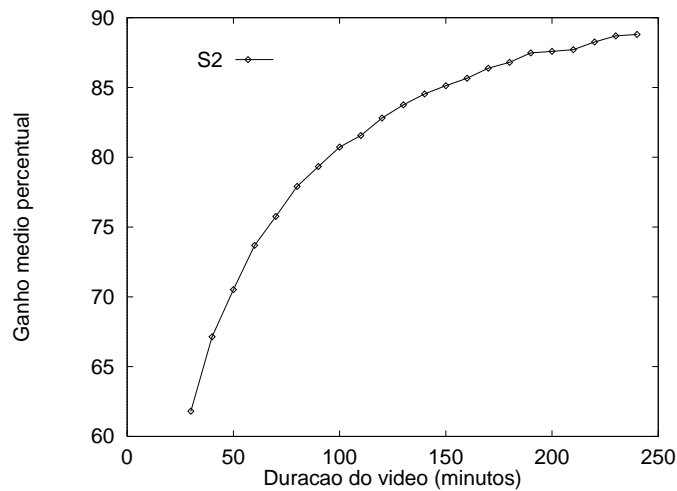


Figura 4: Influência da duração do vídeo sobre a política  $S^2$ .



A Figura 4 ilustra o efeito da variação da duração do vídeo na política  $S^2$ . Neste caso, o valor do intervalo médio entre chegadas é fixado em 30 segundos e varia-se a duração do vídeo de 30 minutos até 4 horas. Nota-se que obtém-se maiores reduções no número de quadros exibidos para filmes mais longos. Esta redução pode chegar a 89% dos quadros para filmes longos (4 horas) e alta taxa de chegada (intervalo entre chegadas de 30 segundos).

## 4 Otimizações no Intervalo $I$

As políticas de Piggybacking são caracterizadas pelo modo como as velocidades são atribuídas aos fluxos quando estes são inicializados. Nas políticas simples uma vez atribuídas as velocidades estas não são alteradas. Por outro lado, a política Snapshot pode alterar as taxas de exibição durante a construção da árvore ótima de mesclagem. Todas as políticas pressupõem intervalos básicos para as atribuições das velocidades dos fluxos, as políticas simples (mesclagem simples, par-ímpar e gulosa [4]) consideram a janela máxima de mesclagem ( $W_m$ ), enquanto que as políticas de Mesclagem Simples Generalizada, Snapshot e  $S^2$  consideram a janela ótima ( $W$ ). No entanto, nenhuma das políticas existentes considera o tempo decorrido entre fluxos para atribuir as taxas de exibição dos fluxos. Como exemplo, considere a situação ilustrada nas Figuras 5.a e 5.b.

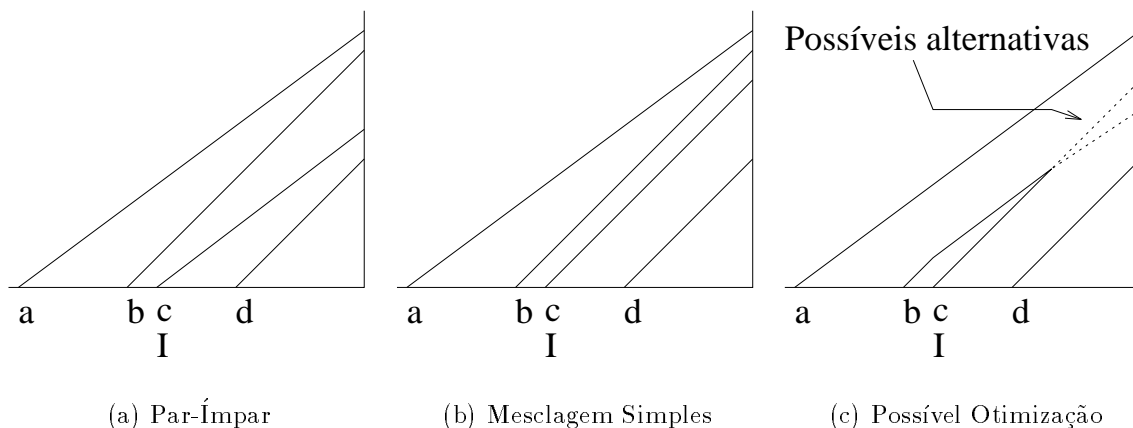


Figura 5: Cenários formados pelo modo de atribuição das velocidades aos fluxos nas políticas (a) Par-Ímpar, (b) Mesclagem Simples e (c) busca de otimização dinâmica.

Pode-se facilmente perceber que é mais interessante mesclar os fluxos  $b$  e  $c$  e alterar a velocidade de sua resultante de modo que esta venha a se mesclar com um dos dois outros fluxos ( $a$  ou  $d$ ) (Figura 5.c).

As políticas Snapshot e  $S^2$  são as únicas que consideram a distância relativa entre os fluxos na busca da árvore ótima de mesclagem, porém este critério não é aplicado no interior do intervalo  $I$ . Este fato motivou a elaboração de uma heurística denominada Política Híbrida, cuja aplicação é limitada ao interior do intervalo  $I$ , em substituição à política Mesclagem Simples. O funcionamento da política Híbrida é descrito a seguir.

Ao primeiro fluxo inicializado no intervalo  $I$  atribui-se a velocidade  $S_{min}$  e aos demais,  $S_{max}$ . A cada fluxo inicializado, um par de mesclagem é formado quando a distância entre este e seu antecessor é menor que a existente entre seus dois antecessores. Um novo fluxo é agregado a um par, constituindo um grupo de mesclagem, se o tempo decorrido entre a inicialização deste e de seu antecessor é inferior a um *TimeOut* predefinido. Agrega-se novo fluxo ao grupo quando o tempo decorrido entre a inicialização de seu último componente e do novo fluxo é inferior a um intervalo cuja duração máxima correspondente à metade do *TimeOut*. Deve-se reaplicar este procedimento a cada novo fluxo disparado pelo sistema formando pares ou grupos de mesclagem enquanto não se alcance o final do intervalo  $I$ . Assim sendo, os grupos de mesclagem formados têm cardinalidade máxima igual a 4 fluxos. Quando um par de fluxos é mesclado, o fluxo resultante deve ser novamente analisado em conjunto com os fluxos vizinhos para verificar a formação de novos pares ou grupos de mesclagem.

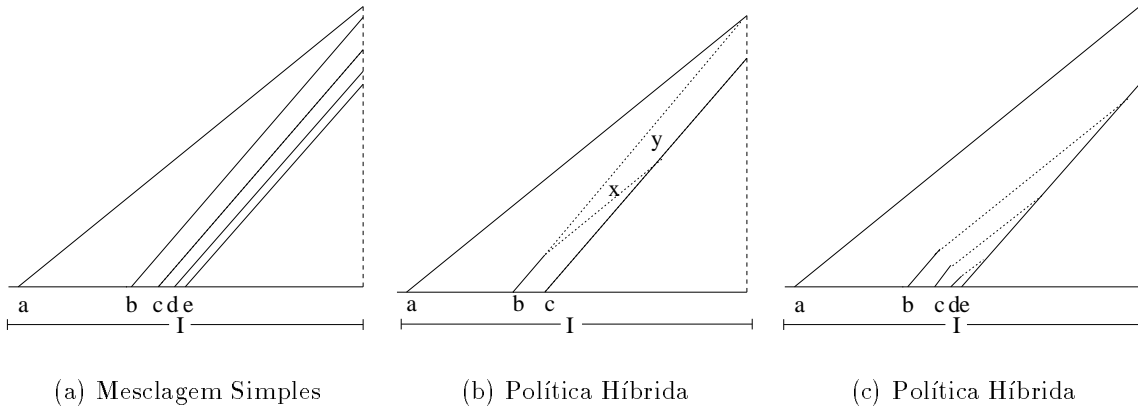


Figura 6: Cenários ilustrando as políticas (a) Mesclagem Simples e (b) e (c) Híbrida.

A fim de ilustrar a política proposta, considere o cenário mostrado na Figura 6.a que representa o comportamento da política mesclagem simples, ou seja, atribui-se  $S_{min}$  ao primeiro fluxo do intervalo  $I$  e  $S_{max}$  aos demais. A aplicação da política Híbrida sobre o mesmo conjunto de fluxos é como segue. Seja o vetor  $TC$ , cuja componente representa o tempo decorrido desde o início do intervalo  $I$  até a inicialização de um fluxo. No instante em que o fluxo  $c$  é inicializado, verificam-se as distâncias  $x$  e  $y$  (segmentos pontilhados), se  $x < y$ , então desviar o fluxo  $b$  em direção ao  $c$  compondo o par de mesclagem  $b-c$ , ou seja, atribuir  $S_{min}$  ao fluxo  $b$  (Figura 6.b).

Ao inicializar o fluxo  $d$ , dado que o par  $b-c$  ainda não se mesclou, agrega-se  $d$  ao par se  $TC[d] - TC[c] \leq TimeOut$ , obtendo-se o grupo de mesclagem  $b-c-d$  em que  $d$  possui velocidade  $S_{max}$  e os demais  $S_{min}$ . Caso contrário, manter o fluxo  $c$  em  $S_{max}$  e atribuir  $S_{max}$  para  $d$ . O fluxo  $e$  é agregado ao grupo  $b-c-d$  se  $TC[e] - TC[d] \leq TimeOut/2$ , obtendo-se o grupo  $b-c-d-e$  em que a velocidade do fluxo  $e$  será  $S_{max}$  e a dos demais  $S_{min}$  (Figura 6.c).

Dentre as vantagens da política Híbrida pode-se citar: *i*) o descarte antecipado de fluxos para atendimento de outras requisições, *ii*) a redução do tempo de execução para geração da árvore ótima, dada a redução do número de fluxos que chega ao final do intervalo  $I$ , e *iii*) a aproximação entre os fluxos que ultrapassam o final do intervalo  $I$ , obtendo-se uma árvore ótima de mesclagens com custo inferior que a gerada se a política aplicada no intervalo  $I$  fosse a mesclagem simples, na qual os fluxos  $2, \dots, n$  progridem de forma paralela.

## 4.1 Resultados Numéricos

Os resultados apresentados comparam a redução percentual média no número de quadros exibidos pelos fluxos de vídeo quando se emprega a política Híbrida em substituição da política Mesclagem Simples no intervalo  $I$ . Assume-se que as chegadas são modeladas por um processo de Poisson e utiliza-se  $S_{min} = 28.5$  e  $S_{max} = 31.5$  em quadros/segundos.

A Figura 7 ilustra o comportamento da política  $S^2$  quando utiliza-se a política Híbrida em substituição à Mesclagem Simples no intervalo  $I$ . O intervalo médio entre chegadas assume valores entre 15 e 500 segundos, o valor do  $TimeOut$  foi fixado em 5 segundos e a duração do vídeo é de 2 horas. O ganho médio obtido reflete o menor número de quadros exibidos nos intervalos  $I$  e a redução no número de fluxos ao final do intervalo Snapshot.

A Figura 8 mostra o desempenho da política  $S^2$  em conjunto com a política Híbrida e Mesclagem Simples quando fixamos o intervalo médio de chegadas em 30 segundos e variamos a duração do vídeo entre 30 minutos e 4 horas. O custo apresentado por ambas as curvas reflete o montante de quadros apresentado num período de 4 horas.

## 5 Conclusões

Este artigo introduz duas extensões à política Snapshot. A primeira política ( $S^2$ ) acrescenta um nível de otimização adicional em relação à política Snapshot. A segunda extensão busca a otimização das mesclagens no interior do intervalo Snapshot. Simulações foram feitas e verifica-se que as políticas  $S^2$  e Híbrida proporcionam resultados superiores aos obtidos pela política Snapshot.

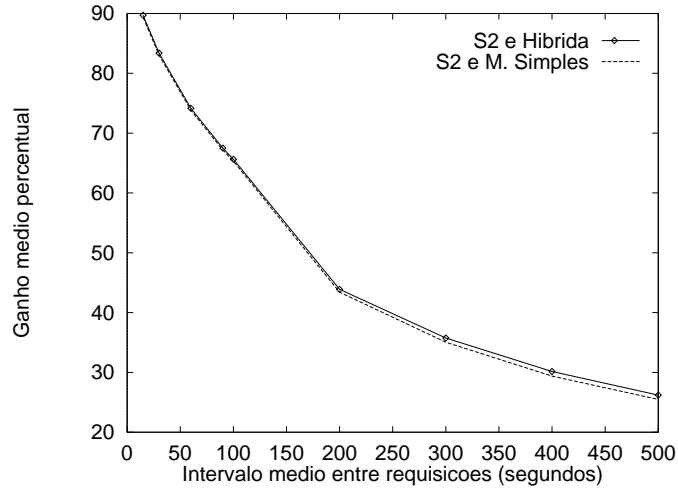


Figura 7: Efeito da variação do intervalo médio entre chegadas sobre a política  $S^2$  com Mesclagem Simples e com Híbrida no intervalo  $I$ .

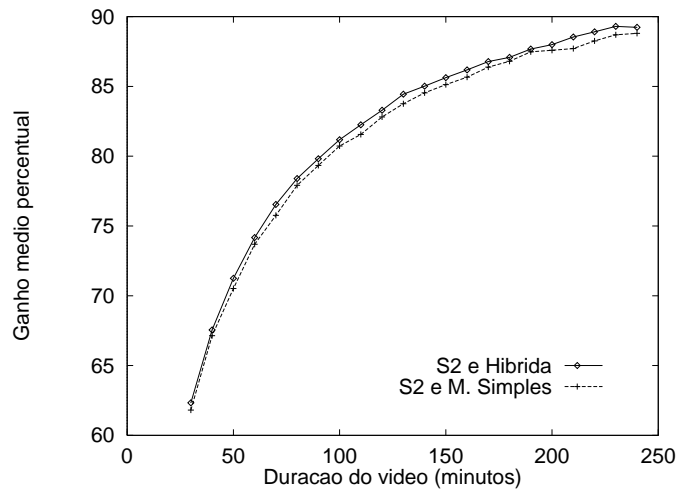


Figura 8: Efeito da variação da duração do vídeo sobre a política  $S^2$  com Mesclagem Simples e com Híbrida no intervalo  $I$ .

## Agradecimentos

Este trabalho foi parcialmente financiado pelo CNPq/Protem-III ALMADEM, CNPq e Fapesp, processo N<sup>o</sup> 96/09739-1.

## Referências

- [1] Asit Dan, Dinkar Sitaram, and Perwez Shahabuddin. Dynamic batching policies for an on-demand video server. *Multimedia Systems*, 4:112–121, 1996.
- [2] Kevin C. Almeroth, Asit Dan, Dinkar Sitaram, and William H. Tetzlaff. Long Term Channel Allocation Strategies for Video Applications. Research Report RC 20249 (89566), Networking and Telecommunications Group-Georgia Institute of Technology e IBM Research Division, Outubro 1995.
- [3] Hadas Shachnai and Philip S. Yu. The Role of Wait Tolerance in Effective Batching: A Paradigm for Multimedia Scheduling Schemes. Technical Report RC 20038 (88607), IBM Research Division, T. J. Watson Research Center, P.O. Box 218, Yorktown Heights, 1995.
- [4] Leana Golubchik, John C. S. Lui, and Richard Muntz. Reducing I/O Demand in Video-on-Demand Storage Servers. *ACM Sigmetrics*, pages 25–36, 1995. Ottawa, Canadá.
- [5] Leana Golubchik, John C. S. Lui, and Richard Muntz. Adaptive Piggybacking: A Novel Technique for Data Sharing in Video-on-Demand Storage Servers. *Multimedia Systems*, 4(3):140–155, 1996.
- [6] Charu C. Aggarwal, Joel L. Wolf, and Philip S. Yu. On Optimal Piggyback Merging Policies for Video-on-Demand Systems. Technical Report RC 20337 (90078), IBM Research Division, T. J. Watson Research Center, P.O. Box 218, Yorktown Heights, Fevereiro 1996.
- [7] Charu C. Aggarwal, Joel L. Wolf, and Philip S. Yu. Adaptive Piggybacking Schemes for Video-on-Demand Systems. Technical Report RC 20635 (91350), IBM Research Division, T. J. Watson Research Center, P.O. Box 218, Yorktown Heights, Novembro 1996.
- [8] Martin Gardner. Catalan numbers. *Scientific American*, pages 120–124, Junho 1976.
- [9] Thomas H. Corman, Charles E. Leiserson, and Rivest Ronald L. *Introduction to Algorithms*. The MIT electrical engineering and computer science series. The MIT Press, 3 edition, 1991.