Uma Subclasse Subgrafo-Overfull dos Cografos

Marcelo M. Barbosa
mmb@dcc.unicamp.br

Célia P. de Mello
celia@dcc.unicamp.br

João Meidanis
meidanis@dcc.unicamp.br

Relatório Técnico IC–97-17

Outubro de 1997

Uma Subclasse Subgrafo-Overfull dos Cografos

Marcelo M. Barbosa* mmb@dcc.unicamp.br
Célia P. de Mello† celia@dcc.unicamp.br
João Meidanis‡ meidanis@dcc.unicamp.br

Instituto de Computação
Universidade Estadual de Campinas
13081-970, Campinas - SP

Sumário

O problema da classificação consiste em decidir se um grafo G pertence à *Classe* 1 ou à *Classe* 2. Uma condição suficiente para G pertencer à *Classe* 2 é G ser *overfull* (O), ou seja, o número de arestas de G excede o produto do grau máximo de G ($\Delta(G)$) por $\lfloor n/2 \rfloor$. Se G possuir um subgrafo *overfull* H com $\Delta(G) = \Delta(H)$, dizemos que G é *subgrafo-overfull* (SO). Se, ainda, H for um subgrafo gerado pela vizinhança de um vértice de G, dizemos que G é *vizinhança-overfull* (NO). Se G é O ou NO, G é SO. Provamos para uma certa subclasse dos cografos que SO é equivalente a O ou a NO.

1 Introdução

Dada uma coloração C das arestas de um grafo G, dizemos que C é *válida* se cada duas arestas incidentes no mesmo vértice não possuem a mesma cor. Chamamos de *índice cromático* de G, $\chi'(G)$, o menor número de cores necessário para que uma coloração de arestas de G seja válida.

Vizing [11] mostrou que o índice cromático de um grafo é o seu maior grau ($\Delta(G)$) ou o seu maior grau acrescido de um ($\Delta(G)+1$). Dizemos que $G \in$ *Classe* 1 se $\chi'(G) = \Delta(G)$ e que $G \in$ *Classe* 2 caso contrário. Esse problema é conhecido como o *problema da classificação*. É sabido que este problema é NP-Completo [8].

Uma condição suficiente para G ser *Classe* 2 é G ser *overfull* (O), ou seja,

$$|A(G)| > \Delta(G) * \lfloor |V(G)|/2 \rfloor,$$

onde $V(G)$ é o conjunto de vértices de G, $A(G)$ o conjunto de arestas de G e $\Delta(G)$ é o maior grau dentre os vértices de G. Se G possuir um subgrafo *overfull* H com $\Delta(H) = \Delta(G)$, dizemos que G é *subgrafo-overfull* (SO). Se, ainda, H for um subgrafo gerado pela vizinhança de um vértice, dizemos que G é *vizinhança-overfull* (NO). É fácil ver que se G é O, então é SO e pertence à *Classe* 2 e, se G é NO, também é SO e *Classe* 2. A Figura 1 mostra exemplos de grafos com alguma(s) destas propriedades.

*Pesquisa desenvolvida com suporte financeiro do CNPq sob projeto 137284/96-9.
†Pesquisa desenvolvida com suporte financeiro parcial do CNPq.
‡Pesquisa desenvolvida com suporte financeiro parcial do CNPq e FAPESP.

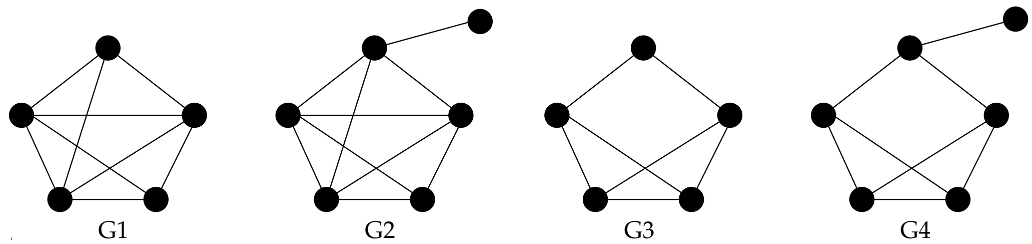

Figura 1: G_1 é O, SO e NO; G_2 é SO, NO e não O; G_3 é O, SO e não NO; G_4 é SO, não O e não NO.

A equivalência entre NO e SO é válida nos grafos split e nos grafos indiferença [4] e O e SO são equivalentes nos multipartidos completos [7], uma subclasse dos cografos.

Neste texto mostraremos que para uma certa subclasse dos cografos, SO é equivalente a O ou a NO.

Dizemos que um grafo simples G é um *cografo* se e somente se não possui P_4 (grafo caminho com 4 vértices) como subgrafo induzido. Por isso, um cografo também é conhecido como *grafo sem* P_4. Também podem ser definidos, recursivamente, como ([1]):

i. O grafo trivial é um cografo;

ii. Se $G_1, \ldots, G_k$ são cografos, então $G = G_1 \cup \ldots \cup G_k$ também é cografo.

iii. Se G é cografo, então $\bar{G}$ também é cografo.

Os cografos possuem uma única representação através de árvore: *cotree* ([2]). Esta representação é a chave para o reconhecimento linear da classe ([2]) e para a solução polinomial de alguns problemas clássicos como isomorfismo, número cromático, detecção de cliques, Hamiltonicidade, entre outros ([1]).

As folhas de uma *cotree* representam os vértices do cografo correspondente. Cada nodo interno representa uma operação $\bar{\cup}$ (união seguida de complemento); estes nodos internos são rotulados com 0 ou 1, de tal forma que esses rótulos se alternem por todo caminho que começa da raiz. Todo nodo terá dois ou mais filhos. Dois vértices x e y de um cografo são adjacentes se o "ancestral" mais próximo a x e a y na *cotree*, no sentido da raiz para as folhas, possui rótulo 1. A Figura 2 mostra um cografo e sua respectiva *cotree*.

Os cografos considerados neste texto são conexos. Portanto, toda *cotree* aqui descrita terá raiz com rótulo 1.

Na Seção, 2 mostramos resultados que traçam características de grafos que são O. Na Seção 3, localizamos os cografos como uma classe que pertence ao conjunto de grafos cercados pela conjectura de *Hilton* e *Chetwind*. Na Seção 4, apresentamos uma nomenclatura geral para os cografos. Na Seção 5, reescrevemos para uma certa subclasse dos cografos a condição de *"overfulidade"* usando a nomenclatura estabelecida e mostramos que nessa classe, grafos SO são O ou NO.

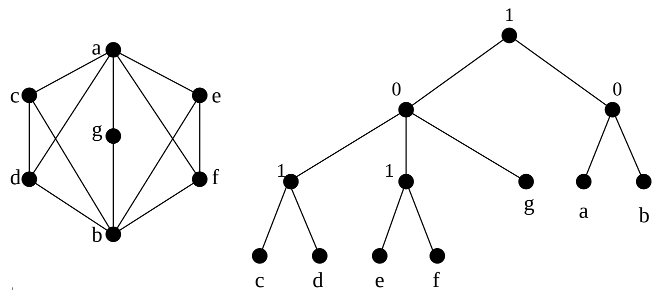

Figura 2: Exemplo de um cografo e sua respectiva *cotree*.

2 Características de Grafos Overfull

Nesta seção algumas características de grafos *overfull* serão relembradas.

Lema 1 *Um grafo G é overfull se e somente se $|V(G)|$ é impar e*

$$\sum_{v \in V(G)} (\Delta(G) - gr_G(v)) \leq \Delta(G) - 2.$$

Prova: Seja $|A(G)| = m$. Por definição, G é *overfull* se e somente se $|V(G)| = n$ é ímpar e

$$\begin{aligned} m &> \Delta(G)\frac{(n-1)}{2} \\ m &\geq \Delta(G)\frac{(n-1)}{2} + 1 \\ 2m &\geq \Delta(G)(n-1) + 2 \\ -2m &\leq -\Delta(G)n + \Delta(G) - 2 \\ \Delta(G)n - 2m &\leq \Delta(G) - 2 \\ \sum_{v \in V(G)} \Delta(G) - \sum_{v \in V(G)} gr_G(v) &\leq \Delta(G) - 2 \\ \sum_{v \in V(G)} (\Delta(G) - gr_G(v)) &\leq \Delta(G) - 2 \end{aligned}$$

$\square$

Definimos por *vizinhança aberta* de um vértice v em um grafo G, $N_G(v)$, ao conjunto de vértices que são adjacentes a v. A *vizinhança fechada* de v no grafo G, $N_G[v]$, é igual a $N_G(v) \cup \{v\}$.

Chamamos de *grau* de um vértice v em G, $gr_G(v)$, a cardinalidade de $N_G(v)$, ou seja, $gr_G(v) = |N_G(v)|$. Chamaremos v de Δ-*vértice* de G se $gr_G(v) = \Delta(G)$. O valor de $gr^*_G(v)$ é igual ao número de vértices em $N_G(v)$ que são Δ-vértices.

O Corolário 1 nos ajuda a verificar se um dado vértice de um grafo G pertence ao conjunto de vértices que gera um subgrafo *overfull*.

Corolário 1 *Seja G um grafo overfull. Então para todo vértice $v \in V(G)$, $gr^*_G(v) \geq 2$.*

Prova: Do Lema 1 temos que para todo $v \in V(G)$

$$\begin{aligned}
\sum_{w \in N_G(v) \cup \{v\}} (\Delta(G) - gr_G(w)) &\leq \Delta(G) - 2 \\
\sum_{w \in N_G(v)} (\Delta(G) - gr_G(w)) + \Delta(G) - gr_G(v) &\leq \Delta(G) - 2 \\
gr_G(v) &\geq 2 + \sum_{w \in N_G(v)} (\Delta(G) - gr_G(w))
\end{aligned}$$

A partir desta desigualdade, temos

$$\begin{aligned}
gr_G(v) &\geq 2 + gr_G(v) - gr^*_G(v) \\
0 &\geq 2 - gr^*_G(v) \\
gr^*_G(v) &\geq 2.
\end{aligned}$$

□

Se $S \subset V(G)$, chamamos de *corte de arestas*, $[S, \bar{S}]$, ao conjunto de arestas que une S aos demais vértices de G $(V(G) \backslash S)$. Usando o Lema 1, temos o seguinte resultado para a cardinalidade do corte de arestas de um subgrafo *overfull* H de G com $\Delta(H) = \Delta(G)$.

Corolário 2 *Seja S um subconjunto dos vértices de G tal que $\Delta(G[S]) = \Delta(G)$. Se $G[S]$ é overfull, então $|[S, \bar{S}]| \leq \Delta(G) - 2$.*

Prova:

$$\begin{aligned}
|[S, \bar{S}]| &= \sum_{v \in S} (gr_G(v) - gr_{G[S]}(v)) \\
|[S, \bar{S}]| &= \sum_{v \in S} (gr_G(v) + \Delta(G) - \Delta(G) - gr_{G[S]}(v)) \\
|[S, \bar{S}]| &= \sum_{v \in S} (\Delta(G) - gr_{G[S]}(v)) - \sum_{v \in S} (\Delta(G) - gr_G(v)).
\end{aligned}$$

Por hipótese, $G[S]$ é *overfull*. Então, pelo Lema 1, tem-se que

$$\begin{aligned}
|[S, \bar{S}]| &\leq \Delta(G[S]) - 2 - \sum_{v \in S} (\Delta(G) - gr_G(v)) \\
|[S, \bar{S}]| &\leq \Delta(G) - 2
\end{aligned}$$

□

Outra preocupação envolvendo um grafo G que é *SO*, é acerca do número de subgrafos *overfull* com grau máximo igual a $\Delta(G)$ que G pode conter. Sabe-se que se este grafo tem grau máximo igual ou superior a $|V(G)|/2$, não conterá mais de um subgrafo *overfull*.

Teorema 1 ([9]) *Seja G um grafo com $\Delta(G) \geq |V(G)|/2$. Se G possui um subgrafo overfull H com $\Delta(H) = \Delta(G)$, então H é único.*

3 A Conjectura de Hilton\Chetwind e os Cografos

Conjectura 1 (Hilton e Chetwind [6]) *Um grafo G com $\Delta(G) > \frac{|V(G)|}{3}$ pertence à Classe 2 se e somente se G é SO.*

Esta conjectura foi evidenciada por vários autores, que trabalharam em casos específicos. *M. Plantholt* provou a veracidade da Conjectura 1 para grafos que possuem $\Delta(G) = n - 1$ ([10]). *A. G. Chetwynd* e *A. J. W. Hilton* melhoraram este resultado, provando que a conjectura é verdadeira para grafos com $\Delta(G) \geq n - 3$ ([9]). Além destes resultados, *D. G. Hoffman* e *C. A. Rodger* ([7]), demonstraram que os multipartidos completos, um subconjunto da família dos cografos, também satisfazem a conjectura.

Foi provado em [7] que um grafo multipartido G completo satisfaz $\Delta(G) > |V(G)|/3$. O teorema 2 estende esse resultado para a classe dos cografos.

Vamos chamar de $\alpha(i)$ ao conjunto de vértices pertencentes ao ramo i da *cotree* de G. Desta forma, uma *cotree* com r ramos definirá uma partição (*α-partição*) de $V(G)$ com r elementos, $\alpha(1), \cdots, \alpha(r)$. Considere $|\alpha(i)| = a(i)$.

Teorema 2 *Se G é um cografo, então $\Delta(G) \geq n/2$.*

Prova: Se G é um cografo, então admite uma *cotree* com r ramos. Teremos que $V(G) = \alpha(1) \cup \ldots \alpha(r)$.

Sem perda de generalidade, podemos supor $1 \leq a(1) \leq \ldots \leq a(r)$.

Vamos construir um grafo G' da seguinte forma:

1. $V(G') = V(G)$, e
2. $A(G') = A(G) \setminus \{(u, w) \mid u, w \in \alpha(i)$, para algum i, $1 \leq i \leq r\}$.

Dessa forma temos que:

$$\Delta(G) \geq \Delta(G'). \tag{1}$$

Em G', os vértices que estão em $\alpha(1)$ tem grau $\Delta(G') = n - a(1)$.

$$\begin{aligned}
\Delta(G') &\geq^? \frac{n}{2} \\
n - a(1) &\geq^? \frac{n}{2} \\
2 * a(1) &\leq^? n \\
a(1) + a(1) &\leq^? a(1) + a(2) + \ldots + a(r) \\
a(1) &\leq^? a(2) + a(3) + \ldots + a(r)
\end{aligned}$$

Como $a(1)$ é o menor, então $a(1) \leq a(2) + \ldots + a(r)$. Portanto

$$\Delta(G') \geq \frac{n}{2}. \tag{2}$$

De (1) e (2) temos que $\Delta(G) \geq \frac{n}{2}$. $\square$

Corolário 3 *Se G é um cografo, então G possui no máximo um subgrafo H com $\Delta(H) = \Delta(G)$ que é overfull.*

O Teorema 2 nos diz que todos os grafos pertencentes aos cografos estão dentro da Conjectura 1. Isto nos induz a procurar colorir com Δ cores, todos os cografos que não são *SO*.

4 Nomenclatura

Seja G um cografo e sua α-partição. Uma forma alternativa para formar $\alpha(i)$ é procurar o i-ésimo filho da raiz e, a partir deste nodo, verificar seu conjunto de folhas, sejam estas folhas "filhos", "netos", "bisnetos", etc. Denotaremos por $f(i)$ o número de filhos daquele i-ésimo nodo. Se $f(i) \neq 0$, estenderemos nossa notação; denotaremos por $\beta(i,j)$ o conjunto de folhas do j-ésimo sub-ramo do i-ésimo nodo com $|\beta(i,j)| = b(i,j)$. Observe que $f(i) \leq a(i)$.

A Figura 2 exemplifica as definições acima: $\alpha(1) = \{c,d,e,f,g\}$, $\alpha(2) = \{a,b\}$, e como $f(1)$ e $f(2) \geq 2$, temos $\beta(1,1) = \{c,d\}$, $\beta(1,2) = \{e,f\}$, $\beta(1,3) = \{g\}$, $\beta(2,1) = \{a\}$ e $\beta(2,2) = \{b\}$.

Note que os conjuntos definidos como $\beta(i,j)$ também formam uma partição para o conjunto de vértices de G. Neste caso, chamaremos esta decomposição de $V(G)$ de *β-partição*.

Como estaremos trabalhando com G e, possivelmente, outro grafo H, usaremos "índices" pra diferenciar uma função ou conjunto de determinado grafo, por exemplo, $\alpha_G(i)$ é o i-ésimo elemento da α-partição de G, $f_H(i)$ é o número de filhos do i-ésimo elemento da α-partição de H. Quando os índices forem omitidos, estaremos fazendo referência ao grafo G.

Com esta notação, podemos escrever

$$|V(G)| = \sum_{i=1}^{r} a(i) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{f(i)} b(i,j) = n.$$

5 Cografo de cotree completa de nível 3 - CCC3

Uma *cotree de nível k* é uma *cotree* com altura k. A raiz está no nível 0. Uma *cotree completa de nível k* é uma *cotree de nível k* com todas as folhas no nível k.

Um grafo trivial é um cografo de *cotree* de nível 0. Um grafo completo não trivial é um cografo de *cotree* de nível 1. Um grafo multipartido completo não trivial (algum conjunto independente é não trivial) é um cografo de *cotree* de nível 2.

Seja G um cografo com *cotree* completa de nível 3. Estamos estudando o comportamento de G em relação a coloração de arestas.

Para G temos sempre $f(i) \geq 2$, para $1 \leq i \leq r$, e $b(i,j) \geq 2$, para $1 \leq j \leq f(i)$. A Figura 3 mostra uma *cotree* completa de nível 3 genérica usando a nomenclatura acima.

O conjunto de arestas de G pode ser visto como o conjunto de arestas do grafo multipartido completo ($K_{\alpha(1),\cdots,\alpha(r)}$) nos vértices da α-partição unido ao conjunto de arestas das cliques ($K_{\beta(i,j)}$) definidas pelos elementos da β-partição.

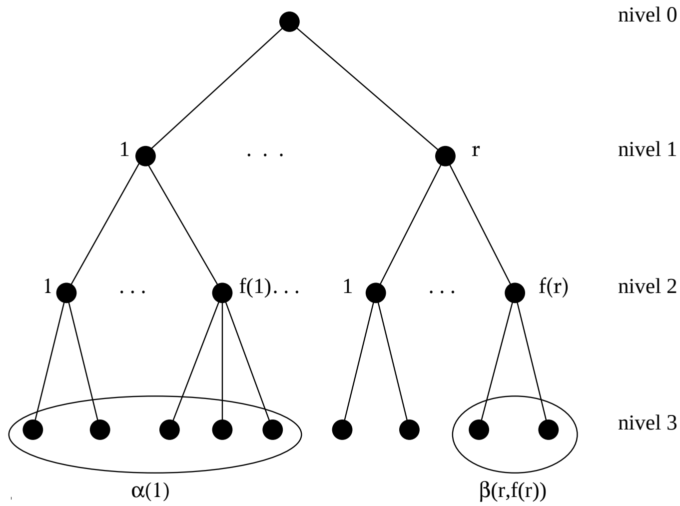

Figura 3: Árvore completa de nível 3.

Observe que os vértices de um mesmo elemento da β-partição possuem o mesmo grau. Dessa forma,

$$gr(i,j) = b(i,j) - 1 + n - a(i),$$

onde $gr(i,j)$ é o grau dos vértices que pertencem ao j-ésimo elemento da β-partição que é o filho do i-ésimo elemento da α-partição. Observe que $b(i,j)-1$ é o grau destes vértices quando restrito à clique (que tem tamanho $b(i,j)$) e que $n - a(i)$ é o grau no multipartido completo.

A cardinalidade de $A(G)$ é dada por:

$$|A(G)| = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{f(i)} b(i,j)gr(i,j) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{f(i)} b(i,j)(b(i,j) - 1 + n - a(i)) = m.$$

Vejamos o grau máximo de G,

$$\Delta(G) = max_{i,j} gr(i,j) = max_{i,j}(b(i,j) - 1 + n - a(i)).$$

Como 1 e n são constantes, podemos nos preocupar em maximizar $b(i,j) - a(i)$, ou simplesmente, dado que $a(i) \geq b(i,j)$, minimizar $a(i) - b(i,j)$ para saber quais elementos da α-partição possuem os vérticed de grau máximo em G.

Seja $p(i,j) = a(i) - b(i,j)$. Consideremos uma ordenação dos elementos da β-partição, onde para cada elemento da α-partição ($\alpha(i)$ para $1 \leq i \leq r$) $p(i,1) \leq p(i,2) \leq \cdots \leq p(i,f(i))$.

Seja $p(i) = min_{1\leq j\leq f(i)}\{p(i,j)\}$. Consideremos uma ordenação tal que $p(1) \leq p(2) \leq \cdots \leq p(r)$. Esta, origina uma ordenação nos elementos da α-partição. Dessa forma,

$$p(1) = min_{i,j} p(i,j),$$

o que faz

$$\Delta(G) = n - 1 - p(1).$$

Veja a Figura 4.

Reescrevendo, temos

$$|A(G)| = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{f(i)} b(i,j)(n-1-p(i,j)) = m.$$

Agora que temos uma notação para o número de arestas (m), para o número de vértices (n) e para o grau máximo ($\Delta(G)$) para G cografo de *cotree* completa de nível 3, podemos estudar de forma genérica quando este grafo é *overfull.*

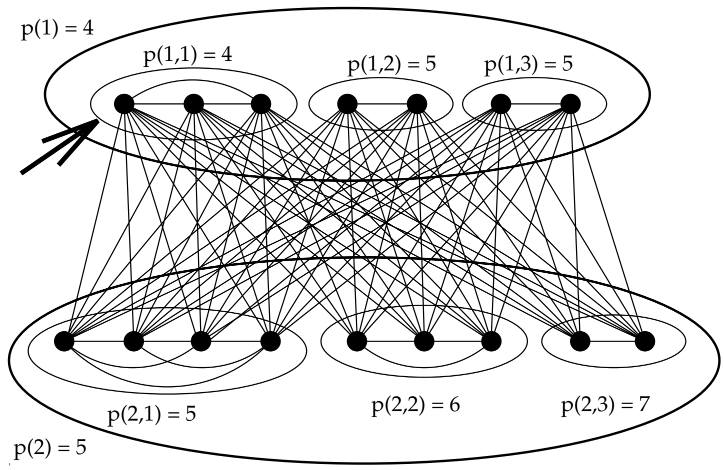

Figura 4: Cografo com as partições ordenadas por $p(i,j)$ e $p(i)$. O elemento $\beta(1,1)$, indicado na figura, contém os vértices de grau Δ.

5.1 CCC3 Overfull

Seja $m = |A(G)|$. Usando a nomenclatura dada, temos que

$$\begin{aligned}
m &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{f(i)} b(i,j)(n-1-p(i,j)) \\
m &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{f(i)}[(n-1)b(i,j) - b(i,j)p(i,j)] \\
m &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{f(i)}(n-1)b(i,j) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{f(i)} b(i,j)p(i,j) \\
m &= \frac{1}{2}(n-1)n - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{f(i)} b(i,j)p(i,j)
\end{aligned}$$

Verifiquemos a condição para G ser *overfull*. O valor de n deve ser ímpar e

$$\begin{aligned} m &> \frac{1}{2}\Delta(G)(n-1) \\ \frac{1}{2}(n-1)n - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{f(i)} b(i,j)p(i,j) &> \frac{1}{2}(n-1-p(1))(n-1) \\ \frac{1}{2}(n-1)n - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{f(i)} b(i,j)p(i,j) &> \frac{1}{2}(n-1)n + \frac{1}{2}(n-1)(-1-p(1)) \\ \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{f(i)} b(i,j)p(i,j) &< (n-1)(1+p(1)) \end{aligned}$$

Lema 2 *Seja G um cografo com cotree completa de nível 3 e n ímpar. Um grafo G é overfull se e somente se*

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{f(i)} b(i,j)p(i,j) < (n-1)(1+p(1)).$$

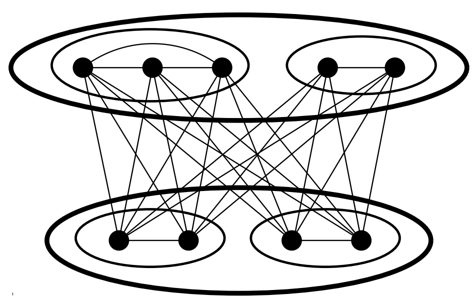

Figura 5: Cografo de *cotree* completa de nível 3 e *overfull* com $a(1) = 5$, $a(2) = 4$, $b(1,1) = 3$, $b(1,2) = 2$, $b(2,1) = 2$ e $b(2,2) = 2$.

A Figura 5 mostra o exemplo que um cografo que satisfaz o Lema 2.

5.2 CCC3 Subgrafo-Overfull

Nesta seção estaremos preocupados em encontrar cografos com *cotrees* completas de nível 3 que sejam *SO*.

O Corolário 3 (Seção 3) nos diz que se encontrarmos em algum cografo G um subgrafo *overfull* H com $\Delta(H) = \Delta(G)$, então H é o subgrafo *overfull* de G. Em [7] foi provado que todo cografo *SO* de *cotree* completa de nível 2 é, na verdade, *O*. Este resultado não se estende para cografos de *cotree* completa de nível 3. A Figura 6 mostra o exemplo de um cografo com 35 vértices distribuídos em $a(1) = 30$ com $b(1,1) = 28$ e $b(1,2) = 2$ e $a(2) = 5$ com $b(2,1) = 2$ e $b(2,2) = 3$. Este cografo não é *overfull* e possui um subgrafo próprio H gerado por $\beta(1,1) \cup \beta(2,1) \cup \beta(2,2)$ que é *overfull*. Logo, é *SO*. Observe que a *cotree* de H não é uma *"subcotree"* da *cotree* de G (Figura 7).

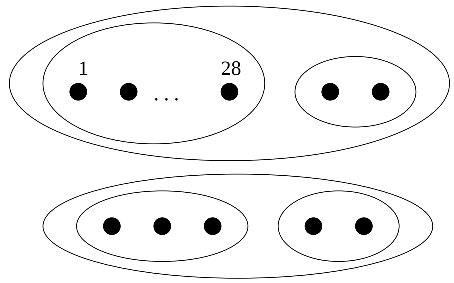

Figura 6: Cografo SO de cotree completa de nível 3.

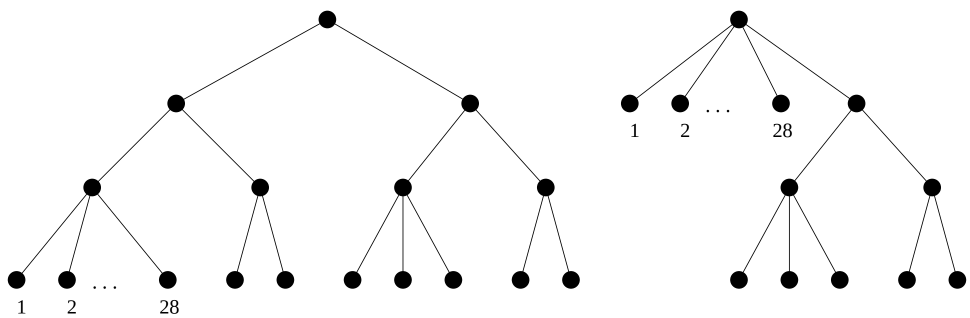

Figura 7: *Cotree* de G e *cotree* de $H = G \backslash \beta(1,2)$, respectivamente.

Lema 3 *Sejam G um cografo de cotree completa de nível 3 e H um subgrafo induzido próprio de G com $\Delta(H) = \Delta(G)$. Então H é cografo de cotree de nível 3.*

Prova: Seja H um subgrafo induzido de G com $\Delta(H) = \Delta(G)$, logo H é um cografo.

Como H é próprio $|V(G) \backslash V(H)| \geq 1$. Este conjunto $V(G) \backslash V(H)$ está contido em um único $\alpha(i)$, $1 \leq i \leq r$, tal que $\alpha(i)$ contém Δ-vértices de G, pois caso contrário, $\Delta(H) < \Delta(G)$. Sem perda de generalidade, seja $i = 1$.

Por hipótese, G é um cografo de *cotree* completa de nível 3, então $r \geq 2$ e portanto H contém vértices no nível 3. □

Lema 4 *Sejam G um cografo com cotree completa de nível 3 e H subgrafo próprio induzido de G tal que $\Delta(G) = \Delta(H)$. Então todos os Δ-vértices de H pertencem a um único elemento da α-partição de G, $\alpha(i)$, e todo $v \in V(H) \backslash \alpha(i)$ satisfaz*

$$gr_H(v) \leq \Delta(G) - (|V(G)| - |V(H)|).$$

Prova: Sabemos que se $v \in \beta_G(i,j)$, então $gr_G(v) = n - 1 - p_G(i,j)$, onde $p_G(i,j) = a_G(i) - b_G(i,j)$ é o número de "primos" de v. Portanto, se $gr_G(v) = \Delta(G)$, $gr_H(v) = \Delta(H) = \Delta(G)$ e estamos retirando x vértices ($|V(H)| = |V(G)| - x$) para construir H, então esses x vértices devem ser retirados de $p_G(i,j)$ dentre os vértices que são "primos" de v.

Dessa forma os únicos vértices que tem grau $\Delta(G)$ também em H são aqueles para os quais $p_H(i,j) = p_G(i,j) - (|V(G)| - |V(H)|)$. Nestas condições o decréscimo em $p_G(i,j)$ deve ser igual ao decréscimo em n.

Para que $p_G(i,j)$ decresça o mesmo número de vértices que n, todos os vértices retirados devem ser primos de v. Dessa forma, todos os vértices que preservarem o grau máximo estão no mesmo elemento da α-partição de G.

Se $\alpha_H(i)$ é o elemento da α-partição de H que contém os $\Delta(H)$-vértices e $w \in \alpha(i)$, então $gr_H(w) \leq \Delta(G) - (|V(G)| - |V(H)|)$. □

Lema 5 *Sejam G um cografo de cotree completa de nível 3 e H um subgrafo induzido overfull de G com $\Delta(H) = \Delta(G)$. Então todos os Δ-vértices de H estão em um único elemento da α-partição de G e nenhum vértice v deste elemento da partição com $gr_G(v) < \Delta$ pertence a H.*

Prova: Pelo Lema 4, todos os Δ-vértices de H estão em um único elemento da α-partição de G.

Sem perda de generalidade, vamos supor que estes vértices estão em $\alpha_G(i)$. Seja $v \in \alpha_G(i)$, com $gr_G(v) < \Delta(G)$. Então, $gr^*_G(v) = 0$. Sendo H *overfull*, pelo Corolário 1, $v \notin V(H)$. □

Teorema 3 *Seja G um cografo SO com cotree completa de nível 3. Então, G é O ou G é NO.*

Prova: Seja G um cografo *SO* de *cotree* completa de nível 3 que não é *O*. Então, G contém um subgrafo próprio *overfull* H com $\Delta(G) = \Delta(H)$. Pela Lema 3, H é um cografo de *cotree* de nível 3.

Do Lema 5, todos os Δ-vértices de H pertencem a um único elemento da α-partição de G e nenhum vértice v deste elemento da partição com $gr_G(v) < \Delta$ pertence a H. Seja $D(H)$ o conjunto dos Δ-vértices de H. Logo, $|D(H)| = kb_G(1,1)$, com $k \geq 1$.

Ainda, do Lema 4 temos que todo vértice $v \in V(H) \backslash \alpha_G(1)$ tem $gr_H(v) \leq \Delta(G) - x$, onde $x = |V(G)| - |V(H)|$. Sendo H um subgrafo próprio de G, x é um inteiro positivo.

Como H é *overfull*, então $|[V(H), \overline{V(H)}]| \leq \Delta(G) - 2$ (Corolário 2).

Uma vez que $|[V(H), \overline{V(H)}]| \geq x(|V(H)| - |D(H)|)$, nosso cálculo segue em $\Delta(G) - 2 \geq x(|V(H)| - D(H))$. (Lembrando que $\Delta(G) = |V(G)| - 1 - p_G(1) = |V(H)| - 1 - |D(H)| + b_G(1,1)$.)

$$\begin{aligned}
\Delta(G) - 2 &\geq x(|V(H)| - |D(H)|) \\
\Delta(G) &\geq x(\Delta(G) - b_G(1,1) + 1) + 2 \\
\Delta(G) &\geq x\Delta(G) - x(b_G(1,1) - 1) + 2 \\
(x-1)\Delta(G) &\leq x(b_G(1,1) - 1) - 2 \\
\Delta(G) &\leq \frac{x(b_G(1,1) - 1) - 2}{(x-1)}
\end{aligned}$$

Como, por hipótese, a *cotree* de G é completa, $x > 1$. Observe, ainda, que $1 < \frac{x}{(x-1)} \leq 2$. Temos que

$$\Delta(G) \leq 2b_G(1,1) - 4.$$

Tome $w \in V(H) \backslash D(H)$; $gr_H(w) = kb_G(1,1) + q$, onde q é o número de vértices em sua vizinhança que não estão em $D(H)$. Do Lema 4, tem-se que $gr_H(w) \leq \Delta(G) - x$. Logo, $gr_H(w) < \Delta(G)$ e

$$\begin{aligned} kb_G(1,1) + q &< 2b_G(1,1) - 4 \\ kb_G(1,1) - 2b_G(1,1) &< -(q+4) \\ b_G(1,1)(k-2) &< -(q+4) \end{aligned}$$

Com a desigualdade acima, obrigatoriamente teremos

$$k < 2.$$

Logo $k = 1$ e H será gerado pela vizinhança de um Δ-vértice.
Portanto, G *SO* com subgrafo H próprio é *NO*. □

6 Conclusão

Para os grafos multipartidos completos, uma subclasse dos cografos, sabíamos que *O* equivale a *SO* ([7]). Esta afirmação não é sempre verdadeira para os cografos. Mesmo para os que possuem *cotree* completa de nível 3, temos exemplos de grafos que são *SO* e não são *O* (veja Figura 6). O Teorema 3 afirma que estes cografos tem de ser *NO*.

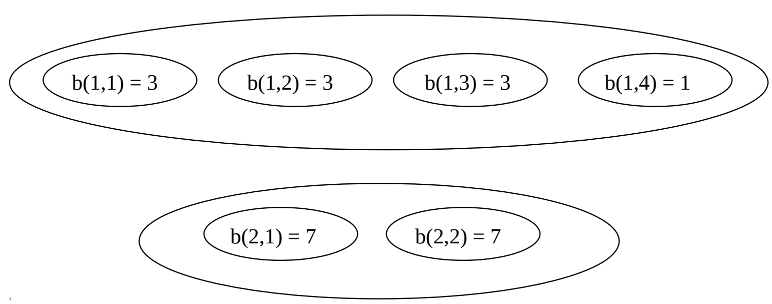

Figura 8: $G[V(G) \backslash \beta(1,4)]$ é *overfull*.

A Figura 8 mostra que o Teorema 3 não pode ser estendido para cografos que possuem *cotree* de nível 3 que não são completas. O exemplo exibe um cografo de *cotree* de nível 3 que é SO e possui subgrafo $H = G[V(G) \backslash \beta(1,4)]$ *overfull* com $f_H(1) = 3$. Logo G não é *NO*.

Um algoritmo para testar se um grafo é *SO*, necessita de encontrar um corte mínimo em um grafo especial ([5]). Para os cografos com *cotree* completa de nível 3, com uma simples contagem obteremos essa informação.

Nosso objetivo, agora, é verificar se a subclasse dos cografos com *cotree* completa de nível 3 é mais uma evidência para a conjectura de *Hilton* e *Chetwind*.

7 Agradecimentos

Agradecemos a Prof. Celina M. H. de Figueiredo (*Instituto de Matemática-UFRJ, Rio de Janeiro-RJ*) pelas sugestões e leitura cuidadosa durante a fase de preparação deste texto.

Referências

[1] D. G. Corneil, H. Lerchs, and L. S. Burlingham. Complement reducible graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 3:163–174, 1981.

[2] D. G. Corneil, Y. Perl, and L. K. Stewart. A linear recognition algorithm for cographs. *Siam Journal on Computing*, 14(4):926–934, 1985.

[3] C. M. H. de Figueiredo, J. Meidanis, and C. P. de Mello. On edge-colouring indifference graphs. *Theoretical Computer Science*, 181:91–106, 1997.

[4] C. M. H. Figueiredo, J. Meidanis, and C. P. Mello. Local conditions for edge-colouring. *Anais da II Oficina Nacional em Problemas Combinatórios: Teoria, Algoritmos e Aplicações*, 1995. Submetido para *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing.*

[5] C. M. H. Figueiredo, J. Meidanis, and C. P. Mello. Coloração em grafos. In *XVI Jornada de Atualização em Informática*, pages 39–83. Sociedade Brasileira de Computação, 1997.

[6] A. J. W. Hilton. Two conjectures on edge-colouring. *Discrete Mathematics*, 74:61–64, 1989.

[7] D. G. Hoffman and C. A. Rodger. The chromatic index of complete multipartite graphs. *Journal of Graph Theory*, 16(2):159–163, 1992.

[8] I. Holyer. The NP-completeness of edge-colouring. *Siam Journal on Computing*, 10(4):718–720, 1981.

[9] T. Niessen. How to find overfull subgraphs in graphs with large maximum degree. *Discrete Applied Mathematics*, 51:117–125, 1994.

[10] M. J. Plantholt. The chromatic index of graphs with a spanning star. *Journal of Graph Theory*, 5:45–53, 1981.

[11] V. G. Vizing. On an estimate of the chromatic class of a p-graph. *Diket. Analiz.*, 3:25–30, 1964. (In Russian).