Algoritmos e Programação de Computadores

Funções Recursivas

Ref.: material original (1o S., T. KLMN). por **Profa. Sandra Avila**, Instituto de Computação (IC/ Unicamp)

Função Recursiva

- Uma função é chamada de recursiva **se o corpo da função chama a própria função**, direta ou indiretamente.
- Ou seja, o processo de execução do corpo de uma função recursiva pode, por sua vez, exigir a aplicação dessa função novamente.
- As funções recursivas não usam nenhuma sintaxe especial em Python, mas requerem algum esforço para entender e criar.

Soma de Números

- Exemplo: um problema simples a ser resolvido sem uso de recursão.
- Suponha que deseja-se calcular a soma de uma lista de números, tal como os elementos na lista: `[1,3,5,7,9]`.

Soma de Números

- Uma função iterativa que calcula a soma é mostrada a seguir.
- A função usa uma variável acumuladora (`soma`) para calcular o total de todos os números da lista iniciando com 0 e somando cada número da lista.

```
def somaLista(numeros):
    soma = 0
    for i in numeros:
        soma = soma + i
    return soma
```

```
lista = [1,3,5,7,9]
print(somaLista(lista))
```

Soma de Números

- Imagine que **não** há disponibilidade de laços `while` ou `for`.
- Como seria realizado o calculo da soma de uma lista de números?
- Do ponto de vista matemático a adição é uma função definida para dois parâmetros, i.e., um par de números.

Soma de Números

- Para redefinir o problema da adição de uma lista, para a adição de pares de números, pode-se reescrever a lista como uma expressão unicamente entre parênteses.
- Tal expressão poderia ser algo como: `(((1+3)+5)+7)+9)`
- Os parênteses também poderiam ser re-ordenados, da forma : `(1+(3+(5+(7+9))))`

Soma de Números

- Observe que o par de parênteses mais interno, `(7+9)`, é um problema que podemos resolver sem um laço ou qualquer construção especial.
- Na verdade, pode-se utilizar a seguinte sequência de simplificações para calcular uma soma final.

```
total = (1+(3+(5+(7+9))))
total = (1+(3+(5+16)))
total = (1+(3+21))
total = (1+24)
total = 25
```

Soma de Números

- Como utilizar essa ideia transformándo-la em um programa Python?
- Em primeiro lugar, vamos reformular o problema soma em termos de listas de Python.
- Poderíamos dizer que a soma da lista `numeros` é a soma do primeiro elemento da lista (`numeros[0]`), com a soma dos números no resto da lista (`numeros[1:]`).

Soma de Números

- De forma funcional podemos escrever:

```
somaLista(numeros) = primeiro(numeros) + somaLista(resto(numeros))
```

- Nesta equação `primeiro(numeros)` retorna o primeiro elemento da lista e `resto(numeros)` retorna a lista com tudo menos o primeiro elemento.

Soma de Números

```
def somaLista(numeros):
    if len(numeros) == 1:
        return numeros[0]
    else:
        return numeros[0] + somaLista(numeros[1:])
```

Recursão

Soma de Números

```
def somaLista(numeros):
    if len(numeros) == 1:
        return numeros[0]
    else:
        return numeros[0] + somaLista(numeros[1:])
```

```
def somaLista(numeros):
    soma = 0
    for i in numeros:
        soma = soma + i
   return soma
```

Fatorial

- Na matemática, o fatorial de um número natural `n`, representado por `n!`, é o produto de todos os inteiros positivos menores ou iguais a `n`.
- Exemplo: 4! = 4 * 3 * 2 * 1 = 24

Fatorial

- Uma implementação natural usando uma declaração `while` acumula o total multiplicando juntos cada inteiro positivo até `n`.

```
def fatorial (n):
    total = 1
    k = 1
    while k <= n:
        total = total * k
        k = k + 1
    return total
```

Fatorial

- Uma implementação natural usando uma declaração `while` acumula o total multiplicando juntos cada inteiro positivo até `n`.

```
def fatorial (n):
    total, k = 1, 1
    while k <= n:
        total, k = total * k, k + 1
    return total
```

Fatorial

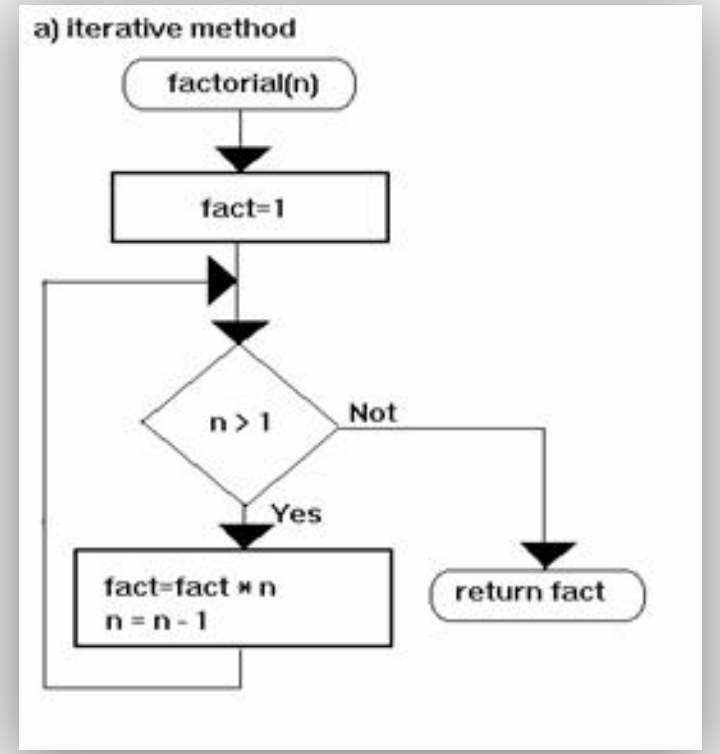
- Uma **implementação recursiva** de fatorial pode expressar o fatorial de `n` (ou `n!`) em termos do fatorial de `n-1`, isto é, `(n-1)!`, e o caso base da recursão é a forma mais simples do problema: `1! = 1`.

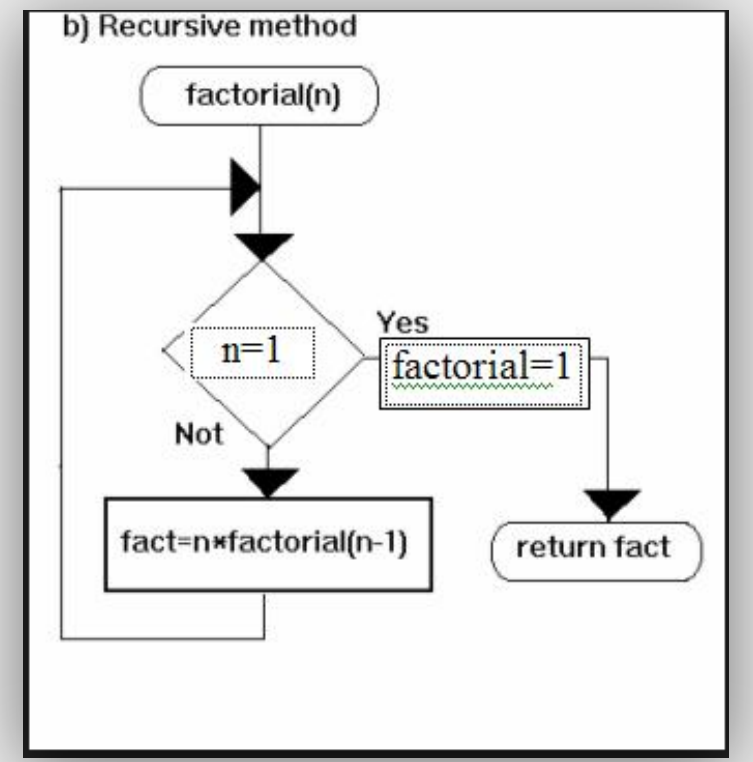
```
def fatorial(n):
    if n == 1:
        return 1
    else:
        return n * fatorial(n-1)
```

Fatorial

- Essas duas funções fatoriais diferem conceitualmente.
- A **função iterativa** constrói o resultado a partir do caso base 1, para o total final, multiplicando-se sucessivamente cada termo.
- A **função recursiva**, por outro lado, constrói o resultado diretamente do termo final, `n`, e o resultado do problema mais simples, i.e., a partir do fatorial `(n-1)`.

Fatorial


a) iterative method
factorial(n)
fact=1
n > 1
Not
Yes
fact=fact * n
n = n - 1
return fact


b) Recursive method
factorial(n)
n=1
Yes
factorial=1
Not
fact=n*factorial(n-1)
return fact

Recursão com várias chamadas

- Não há necessidade da função recursiva ter apenas uma chamada para si própria.
- A função pode fazer várias chamadas para si própria.
- A função pode ainda fazer chamadas recursivas indiretas. Neste caso a função 1, por exemplo, chama uma outra função 2 que por sua vez chama a função 1.

Números de Fibonacci

- A série (ou sequência) de Fibonacci é a seguinte:
- `0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...`
- Queremos determinar qual é o n-ésimo número da série que denotaremos por `fibonacci(n)`.
- Como descrever o n-ésimo número de Fibonacci de forma recursiva?

➢ Na serie, sucessão ou sequência de Fibonacci, cada termo corresponde a soma dos 2 anteriores, i.e. $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$; sendo que $F_1=1$, $F_2=1$.

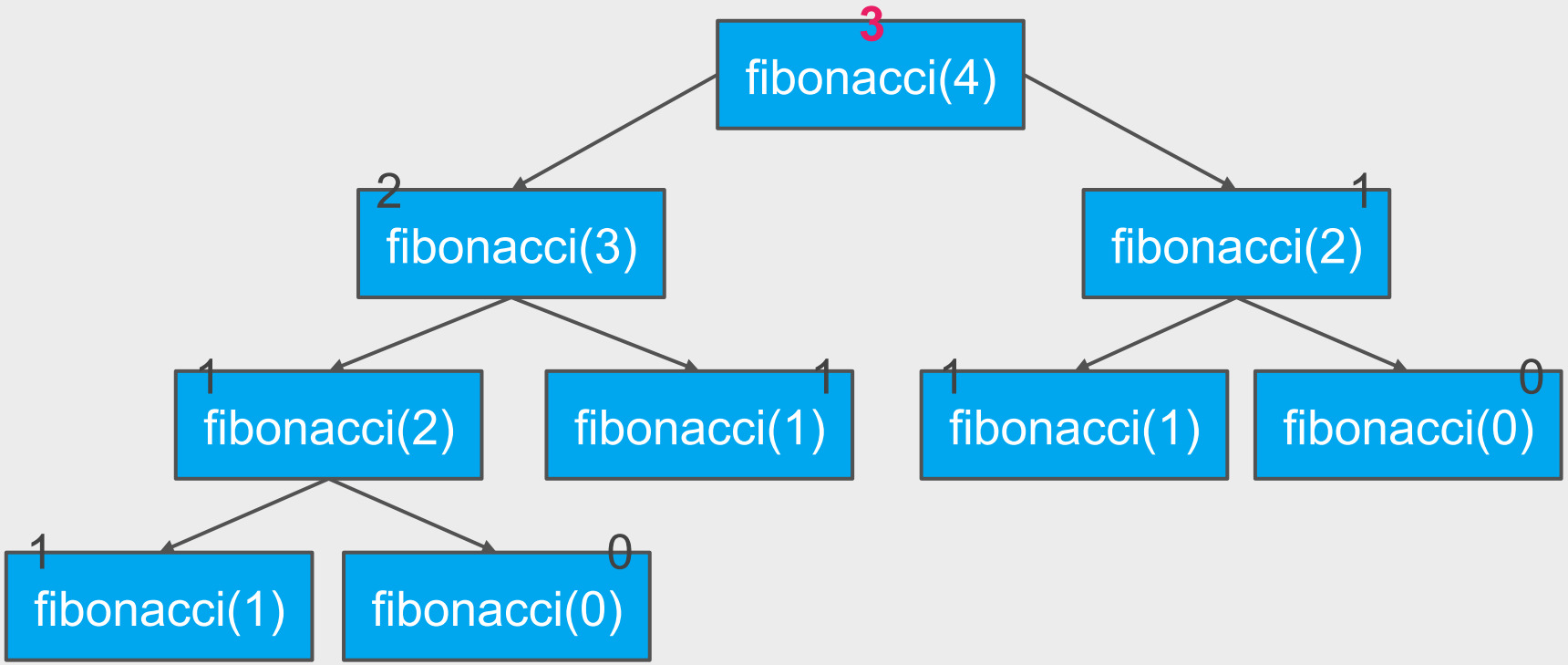
Números de Fibonacci

- No caso base temos:
  - Se `n = 0` então `fibonacci(0) = 0`.
  - Se `n = 1` então `fibonacci(1) = 1`.
- Sabendo casos anteriores podemos computar `fibonacci(n)` como:
  - `fibonacci(n) = fibonacci(n-1) + fibonacci(n-2)`.

Números de Fibonacci

```
def fibonacci(n):
    if n == 0:
        return 0
    elif n == 1:
        return 1
    else:
        return (fibonacci(n-1) + fibonacci(n-2))
```

Números de Fibonacci



Resumo ...

- Recursão é uma técnica para criar algoritmos onde:
  - Devem-se descrever soluções para casos básicos.
  - Assumindo a existência de soluções para casos de menor complexidade, pode-se obter a solução para o caso de maior complexidade.
- Algoritmos recursivos geralmente são mais claros e concisos.
- Implementador deve avaliar clareza de código × eficiência do algoritmo.

Referências

- Os slides dessa aula foram baseados no material de MC102 dos profs. Sandra Ávile e Eduardo Xavier (IC/Unicamp).
- https://panda.ime.usp.br/pensepy/static/pensepy/12-Recursao/recursionsimple-ptbr.html