



Algoritmos e Programação de Computadores

Matrizes e Vetores Multidimensionais

Ref.: material original (1o S., T. KLMN). por **Profa. Sandra Avila**, Instituto de Computação (IC/
Unicamp)

Agenda

- Matrizes
 - Matrizes e vetores multidimensionais
 - Criando matrizes
 - Acessando dados de uma matriz
 - Declarando vetores multidimensionais
- Exemplo com matrizes
- Exercícios
- Informações extras: NumPy
 - O tipo Array

Matrizes e Vetores Multidimensionais

- Suponha por exemplo que devemos armazenar as notas de cada aluno(a) (provas, laboratórios, atividades conceituais, exame) de MC102.
- Assumindo que um(a) aluno(a) é avaliado(a) com 4 notas, seria necessário um vetor de 4 posições para guardar as notas de um(a) aluno(a).

| 0 | 1 | 2 | 3 |
|-----|---|---|---|
| 9.5 | 9 | 8 | 0 |

notas

Matrizes e Vetores Multidimensionais

- Contudo, assumindo que uma turma tem 130 aluno(a)s, seria necessário uma matriz bidimensional para guardar as notas de todo(a)s o(a)s aluno(a)s de uma turma.

| | | notas | | | |
|-----------|---|-------|---|---|-----|
| | | 0 | 1 | 2 | 3 |
| aluno(a)s | 0 | 9.5 | 9 | 8 | 0 |
| | 1 | 5 | 6 | 7 | 8.5 |
| | 2 | 9 | 8 | 8 | 0 |
| | | ... | | | |

notas

| | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|-----|---|---|-----|
| 0 | 9.5 | 9 | 8 | 0 |
| 1 | 5 | 6 | 7 | 8.5 |
| 2 | 9 | 8 | 8 | 0 |

...

```
turma = [[9.5, 9, 8, 0], [5, 6, 7, 8.5], [9, 8, 8, 0],  
         [3.6, 7.0, 9.1, 8.7], [5.0, 4.5, 7.0, 5.2],  
         [2.1, 6.5, 8.0, 7.0], ... ]
```

notas

| | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|-----|---|---|-----|
| 0 | 9.5 | 9 | 8 | 0 |
| 1 | 5 | 6 | 7 | 8.5 |
| 2 | 9 | 8 | 8 | 0 |

aluno(a)s

...

```
turma = [[9.5, 9, 8, 0], [5, 6, 7, 8.5], [9, 8, 8, 0],  
         [3.6, 7.0, 9.1, 8.7], [5.0, 4.5, 7.0, 5.2],  
         [2.1, 6.5, 8.0, 7.0], ... ]
```

Diagram illustrating a 2D array structure representing student grades. The rows are labeled "aluno(a)s" (students) and the columns are labeled "notas" (grades).

| | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|-----|---|---|-----|
| 0 | 9.5 | 9 | 8 | 0 |
| 1 | 5 | 6 | 7 | 8.5 |
| 2 | 9 | 8 | 8 | 0 |

The second row (index 1) is highlighted with a red border, corresponding to the second element in the Python list below.

...

```
turma = [[9.5, 9, 8, 0], [5, 6, 7, 8.5], [9, 8, 8, 0],  
         [3.6, 7.0, 9.1, 8.7], [5.0, 4.5, 7.0, 5.2],  
         [2.1, 6.5, 8.0, 7.0], ... ]
```

notas

| | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|-----|---|---|-----|
| 0 | 9.5 | 9 | 8 | 0 |
| 1 | 5 | 6 | 7 | 8.5 |
| 2 | 9 | 8 | 8 | 0 |

aluno(a)s

...

```
turma = [[9.5, 9, 8, 0], [5, 6, 7, 8.5], [9, 8, 8, 0],  
         [3.6, 7.0, 9.1, 8.7], [5.0, 4.5, 7.0, 5.2],  
         [2.1, 6.5, 8.0, 7.0], ... ]
```

Diagram illustrating a 2D array structure representing student grades (notas) for three students (aluno(a)s).

| | | notas | | | |
|-----------|---|-------|---|---|-----|
| | | 0 | 1 | 2 | 3 |
| aluno(a)s | 0 | 9.5 | 9 | 8 | 0 |
| | 1 | 5 | 6 | 7 | 8.5 |
| | 2 | 9 | 8 | 8 | 0 |

...

```
turma = [[9.5, 9, 8, 0], [5, 6, 7, 8.5], [9, 8, 8, 0],  
         [3.6, 7.0, 9.1, 8.7], [5.0, 4.5, 7.0, 5.2],  
         [2.1, 6.5, 8.0, 7.0], ... ]
```

```
type(turma)
```

```
list
```

Acesso aos Valores: [linha][coluna]

- Segunda nota do primeiro aluno(a): `turma[0][1]`
- Quarta nota do terceiro aluno(a): `turma[2][3]`

| | | notas | | | |
|-----------|---|-------|---|---|-----|
| | | 0 | 1 | 2 | 3 |
| aluno(a)s | 0 | 9.5 | 9 | 8 | 0 |
| | 1 | 5 | 6 | 7 | 8.5 |
| | 2 | 9 | 8 | 8 | 0 |

...

Declarando uma Matriz com Listas

- Para criar uma matriz de dimensões $l \times c$ inicialmente vazia podemos utilizar listas.
- Exemplo de uma matriz 3 x 4 inicialmente vazia:

```
mat = [[] for i in range(3)]  
#dentro da lista externa cria-se vazia 3 listas []  
mat  
[[], [], []]
```

- Note que cada lista interna representa uma linha da matriz, e seu tamanho pode ser 4 ou qualquer outro valor.

Exemplo de Declaração de Matriz

- Criar matriz 3 x 4 onde cada posição (i, j) contém o valor de $i * j$.

| | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 0 | 2 | 4 | 6 |

Exemplo de Declaração de Matriz

- Criar matriz 3 x 4 onde cada posição (i, j) contém o valor de $i * j$.

```
mat = []  
for i in range(3): # para cada linha de 0 ate 2  
    l = [] # linha começa vazia  
    for j in range(4): # para cada coluna de 0 ate 3  
        l.append(i*j) # preenche colunas da linha I  
    mat.append(l) # adiciona linha na matriz  
print(mat)
```

```
[[0, 0, 0, 0], [0, 1, 2, 3], [0, 2, 4, 6]]
```

Exemplo de Declaração de Matriz

- Obtendo o mesmo resultado utilizando compreensão de listas:

```
mat = [[i*j for j in range(4)] for i in range(3)]  
print(mat)
```

```
[[0, 0, 0, 0], [0, 1, 2, 3], [0, 2, 4, 6]]
```

Compreensão de Listas

- *List comprehension*: recurso de Python para prover uma forma concisa de gerar listas; via expressões delimitadas por colchetes[] (*brackets*)

Sintaxe: [expression **for** item **in** list **if** conditional]

Equivalencia: **for** item **in** list: **if** conditional: expression

```
x = [ i for i in range(10) ] ; print (x)
```

```
[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]
```

```
y = [ i**2 for i in range(10) ] ; print (y)
```

```
[0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81]
```

Acessando os Dados da Matriz

```
nome_da_matriz[linha][coluna]
```

- **Ex:** `matriz[1][10]`: refere-se a variável na 2a linha e na 11a coluna da matriz.
- Lembre-se que, como a matriz está implementada com listas, a primeira posição em uma determinada dimensão começa no índice 0.
- O acesso a posições inválidas causa um erro de execução.

Declarando Vetores Multidimensionais

- Ainda para o exemplo da turma, assumindo que um curso tem duas turmas, seria necessário uma matriz tridimensional para guardar as notas de todo(a)s o(a)s aluno(a)s de todas as turmas do curso.

Declarando Vetores Multidimensionais

| | | notas | | | |
|-----------|---|-------|-----|-----|-----|
| | | 0 | 1 | 2 | 3 |
| aluno(a)s | 0 | 9.5 | 9 | 8 | 0 |
| | 1 | 2 | 8 | 10 | 5 |
| | 2 | 8.6 | 4.3 | 7 | 8.5 |
| | 8 | 3 | 5.7 | 7.9 | |

notas

| | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|-----|-----|-----|-----|
| 0 | 9.5 | 9 | 8 | 0 |
| 1 | 2 | 8 | 10 | 5 |
| 2 | 8.6 | 4.3 | 7 | 8.5 |
| | 8 | 3 | 5.7 | 7.9 |

aluno(a)s

```
turmas = [[ [9.5, 9, 8, 0], [5, 6, 7, 8.5], [9, 8, 8, 0]],
            [[2, 8, 10, 5], [8.6, 4.3, 7, 8.5], [8, 3, 5.7, 7.9]]]
```

notas

| | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|-----|-----|-----|-----|
| 0 | 9.5 | 9 | 8 | 0 |
| 1 | 2 | 8 | 10 | 5 |
| 2 | 8.6 | 4.3 | 7 | 8.5 |
| | 8 | 3 | 5.7 | 7.9 |

aluno(a)s

```
turmas = [[ [9.5, 9, 8, 0], [5, 6, 7, 8.5], [9, 8, 8, 0]],
            [ [2, 8, 10, 5], [8.6, 4.3, 7, 8.5], [8, 3, 5.7, 7.9] ] ]
```

turma

notas

| | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|-----|-----|-----|-----|
| 0 | 9.5 | 9 | 8 | 0 |
| 1 | 2 | 8 | 10 | 5 |
| 2 | 8.6 | 4.3 | 7 | 8.5 |
| | 8 | 3 | 5.7 | 7.9 |

aluno(a)s

```
turmas = [[ [9.5, 9, 8, 0], [5, 6, 7, 8.5], [9, 8, 8, 0]],
           [ [2, 8, 10, 5], [8.6, 4.3, 7, 8.5], [8, 3, 5.7, 7.9] ] ]
```

aluno(a)

notas

| | | 0 | 1 | 2 | 3 |
|-----------|---|-----|-----|-----|-----|
| aluno(a)s | 0 | 9.5 | 9 | 8 | 0 |
| | 1 | 2 | 8 | 10 | 5 |
| | 2 | 8.6 | 4.3 | 7 | 8.5 |
| | | 8 | 3 | 5.7 | 7.9 |

```
turmas = [[9.5, 9, 8, 0], [5, 6, 7, 8.5], [9, 8, 8, 0]],
          [[2, 8, 10, 5], [8.6, 4.3, 7, 8.5], [8, 3, 5.7, 7.9]]
print(turmas[0][0][2])
```

8

Exemplos com Matrizes

- Criar programas com operações básicas sobre matrizes quadradas
 - Soma de 2 matrizes com dimensões $n \times n$.
 - Subtração de 2 matrizes com dimensões $n \times n$.
 - Cálculo da transposta de uma matriz de dimensão $n \times n$.
 - Multiplicação de 2 matrizes com dimensões $n \times n$.

Exemplos com Matrizes

- Primeiramente vamos implementar o código para fazer a leitura e a impressão de uma matriz.

```
def leMatriz(dimensao):  
    mat = [[] for i in range(dimensao)]  
    for i in range(dimensao):  
        for j in range(dimensao):  
            num = int(input("(" + str(i+1) + ", " + str(j+1) + "): "))  
            mat[i].append(num)  
    return mat
```

Exemplos com Matrizes

- Primeiramente vamos implementar o código para fazer a leitura e a impressão de uma matriz.

```
def imprimeMatriz(mat):  
    for linha in mat:  
        for numero in linha:  
            print(numero, end=" ")  
            #imprime números na mesma linha separados por espaço  
        print() #apos impressão de uma linha, pula uma linha
```

Exemplos com Matrizes

- Vamos implementar o código para fazer a **soma** de duas matrizes.
- Para cada posição (i, j) fazemos:

$$\text{mat3}[i][j] = \text{mat1}[i][j] + \text{mat2}[i][j]$$

- tal que o resultado da soma das matrizes estará em `mat3`.

```
def somaMatriz(mat1, mat2):  
    tam = len(mat1)  
    mat3 = [[0 for j in range(tam)] for i in range(tam)]  
    for i in range(tam):  
        for j in range(tam):  
            mat3[i][j] = mat1[i][j] + mat2[i][j]  
    return mat3
```

Exemplos com Matrizes

- Vamos implementar o código para fazer a **multiplicação** de duas matrizes (de dimensão $n \times n$).
- Uma posição (i, j) de `mat3` terá o produto interno do vetor linha i de `mat1` com o vetor coluna j de `mat2`:

$$\text{mat3}[i][j] = \sum_{k=0}^{n-1} \text{mat1}[i][k] * \text{mat2}[k][j]$$

$$B.A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 3 & (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 4 \\ 4 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 4 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 10 & 16 \end{bmatrix}$$

Exemplos com Matrizes

- Vamos implementar o código para fazer a **multiplicação** de duas matrizes (de dimensão $n \times n$).

```
def multiplicaMatriz(mat1, mat2):  
    tam = len(mat1)  
    mat3 = [[0 for j in range(tam)] for i in range(tam)]  
    for i in range(tam):  
        for j in range(tam):  
            for k in range(tam):  
                mat3[i][j] = mat3[i][j] + (mat1[i][k] * mat2[k][j])  
    return mat3
```

Exemplos com Matrizes: O Programa

```
n = int(input("Dimensão das matrizes: "))
mat1 = leMatriz(n)
mat2 = leMatriz(n)
print("mat1: ")
imprimeMatriz(mat1)
print("mat2: ")
imprimeMatriz(mat2)
mat3Soma = somaMatriz(mat1, mat2)
print("Soma: ")
imprimeMatriz(mat3Soma)
mat3Mult = multiplicaMatriz(mat1, mat2)
print("Multiplicação: ")
imprimeMatriz(mat3Mult)
```

Exercícios

Exercícios: Corrida de Kart

- Uma pista de Kart permite 10 voltas para cada um de 6 corredores. Faça um programa que leia os nomes e os tempos (em segundos) de cada volta de cada corredor e guarde as informações em uma matriz.
- Ao final, o programa deve informar:
 - De quem foi a melhor volta da prova, e em que volta.
 - Classificação final em ordem crescente.
 - Qual foi a volta com a média mais rápida.

Exercícios

- Escreva um programa que leia todas as posições de uma matriz 10x10. O programa deve então exibir o número de posições não nulas na matriz.

Exercícios: Jogo da Velha

- Faça um programa para o Jogo da Velha. Seu programa deve ler uma matriz 3x3 que representa um tabuleiro de jogo da velha.

NumPy

NumPy

- NumPy é uma biblioteca para Python que contém tipos para representar vetores e matrizes juntamente com diversas operações, dentre elas operações comuns de álgebra linear.
- NumPy é implementado para trazer maior eficiência do código em Python para aplicações científicas.

NumPy

- Array Objects
 - N-dimensional arrays, data type objects, masked arrays
- Universal Functions
 - Broadcasting, internal buffers, error handling
- Routines
 - Array creation, manipulation, math; functions, floating-point, DFT. C-type
- Packaging
 - Use of other-language compiled functions (ex. C, Fortran)
- SW : Simple Wrapper + Interface Generators

NumPy

- Primeiramente deve-se instalar o NumPy baixando-se o pacote de <http://www.numpy.org>
- Para usar os itens deste pacote deve-se importá-lo inicialmente com o comando: `import numpy`

NumPy

- O objeto mais simples da biblioteca é o **array** que serve para criar vetores homogêneos multidimensionais.
- Um **array** pode ser criado a partir de uma lista:

```
import numpy as np
a = np.array([1,2,3])
print(a.ndim)
print(a.size)
a
```

```
1
3
array([1, 2, 3])
```

NumPy

- O objeto mais simples da biblioteca é o **array** que serve para criar vetores homogêneos multidimensionais.
- Um **array** pode ser criado a partir de uma lista:

```
import numpy as np
b = np.array([[1,2,3],[4,5,6]])
print(b.ndim)
print(b.size)
b
```

```
2
6
array([[1, 2, 3],
       [4, 5, 6]])
```

NumPy

- Um **array** pode ser criado com mais do que uma dimensão utilizando as funções **arange** e **reshape**.

```
a = np.arange(10)
a
a = np.arange(10).reshape(2, 5)
a
```

```
array([0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9])
array([[0, 1, 2, 3, 4],
       [5, 6, 7, 8, 9]])
```

NumPy

- NumPy oferece a função **zeros** que cria um **array** contendo apenas zeros. Seu argumento de entrada é uma tupla.

```
np.zeros((3))  
np.zeros((3,4))
```

```
array([ 0.,  0.,  0.])  
array([[ 0.,  0.,  0.,  0.],  
       [ 0.,  0.,  0.,  0.],  
       [ 0.,  0.,  0.,  0.]])
```

NumPy

- Os operadores `*`, `-`, `+`, `/`, `**`, quando utilizados sob arrays, são aplicados em cada posição do **array**.

```
m = np.ones((2,3))  
m+1
```

```
array([[ 2.,  2.,  2.],  
       [ 2.,  2.,  2.]])
```

NumPy

- Os operadores `*`, `-`, `+`, `/`, `**`, quando utilizados sob arrays, são aplicados em cada posição do **array**.

```
m*4
```

```
array([[ 4.,  4.,  4.],  
       [ 4.,  4.,  4.]])
```

NumPy

- Os operadores `*`, `-`, `+`, `/`, `**`, quando utilizados sob arrays, são aplicados em cada posição do **array**.

```
m = m + 1  
m**3
```

```
array([[ 8.,  8.,  8.],  
       [ 8.,  8.,  8.]])
```

NumPy

- Os operadores `*`, `-`, `+`, `/`, `**`, quando utilizados sob arrays, são aplicados em cada posição do **array**.

```
A = np.array([[1,1], [0,1]])  
B = np.array([[2,0], [3,4]])  
A*B
```

```
array([[2, 0],  
       [0, 4]])
```

- Multiplicação de elemento por elemento.

NumPy

- Os operadores $*$, $-$, $+$, $/$, $**$, quando utilizados sob arrays, são aplicados em cada posição do **array**.

```
A = np.array([[1,1], [0,1]])  
B = np.array([[2,0], [3,4]])  
np.dot(A,B) # multiplicação de matrizes
```

```
array([[5, 4],  
       [3, 4]])
```

NumPy

- Na biblioteca existe uma variedade de outras funções como funções para calcular autovalores e autovetores, resolução de um sistema de equações lineares, transformadas matemáticas, tal como DFT, etc.

Referências & Exercícios

- Os slides dessa aula foram baseados no material de MC102 dos Profs. Sandra Avila e Eduardo Xavier (IC/Unicamp).
- <https://panda.ime.usp.br/aulasPython/static/aulasPython/aula11.html>
- <http://www.galirows.com.br/meublog/programacao/exercicios-resolvidos-python/>
(Exercícios resolvidos, explicação com vídeo)